SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CORSE

Classes de première S • 2014

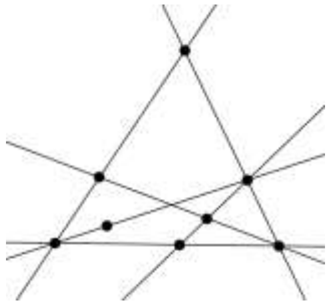
Académie de CORSE
OLYMPIADES ACADEMIQUES DE PREMIERE
Session 2014 - TOUTES SERIES

Une calculatrice est autorisée.
Ne pas hésiter à faire figurer sur la copie toutes les pistes de recherche et tentatives de résolution, même infructueuses, qui pourront être valorisées

EXERCICE 1 NATIONAL : FIGURES ÉQUILIBRÉES

La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.

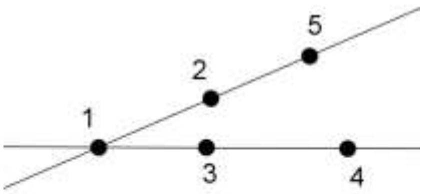
Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.



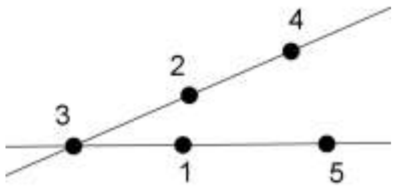
1. Construire une figure équilibrée constituée :
  a) de 7 points marqués et 5 droites ;
  b) de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.
Cette numérotation est alors dite ***magique*** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



$K = 8$

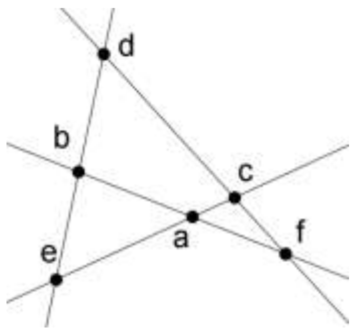


$K = 9$

Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.

  a) Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
  b) Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
  Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

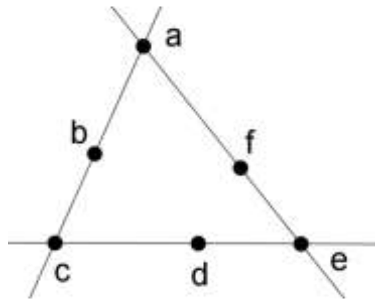


4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.

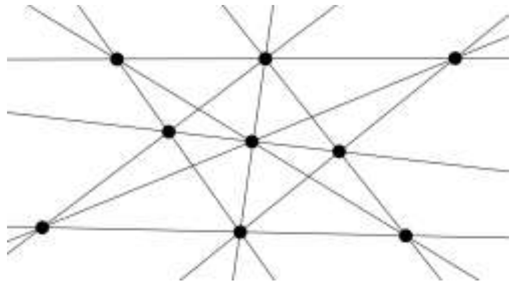
a) Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.

b) Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.

c) Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.



5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.
Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



EXERCICE 2 NATIONAL: LE PLUS COURT POSSIBLE

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.
La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.
« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.
« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

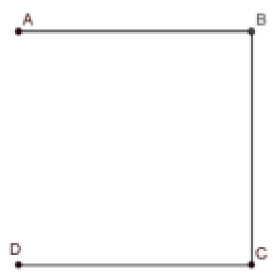


fig. 1
Assistant n°1

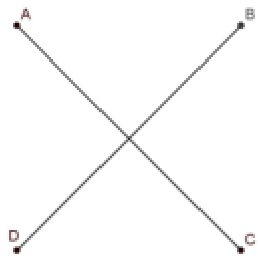


fig. 2
Assistant n°2

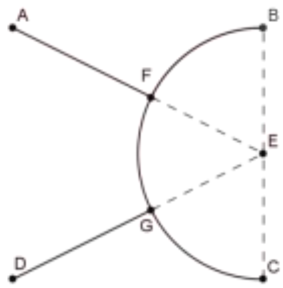


fig. 3
Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :

« On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

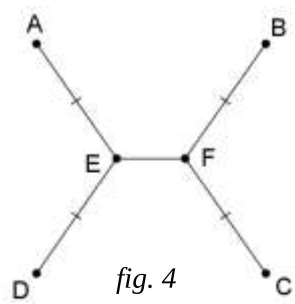


fig. 4

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :

Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :

on a toujours $AB + BC \geq AC$;

on a l'égalité $AB + BC = AC$ si, et seulement si, B appartient au segment [AC].

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.
On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100km de coté, comme dans le dessin suivant.

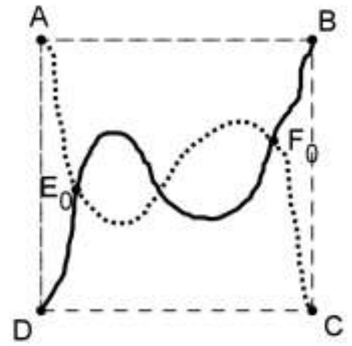


fig. 5

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.
En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).
Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

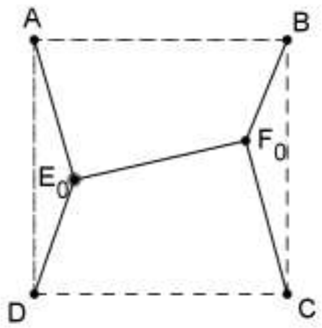


fig. 6

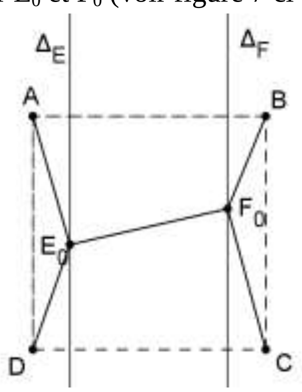


fig. 7

a. Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.
On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b. Montrer que $EF \leq E_0F_0$.

c. Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

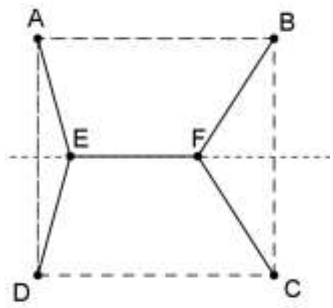


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].
   a. Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].
   b. D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).
   Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?
   c. Quelle est alors la valeur de l'angle DEA ?

EXERCICE 3 ACADEMIQUE : ENSEMBLES P-STABLES

Un ensemble E de nombres réels est dit « *stable par produit* » ou plus simplement « *P-stable* » s'il est non vide et s'il possède la propriété suivante :
Pour tous réels a et b de E, $a \times b$ est un élément de E.
Par exemple considérons l'ensemble G= {0 ; 1}
0×0=0 qui appartient bien à G, de même 0×1=0, 1×1=1 sont aussi dans G. G est donc P-stable.
H={0 ; 1 ; 2} n'est pas P-stable car 2×2=4 qui n'est pas dans H.

1- Quelques exemples d'ensembles P-stables.
   a. Démontrer que les ensembles E={1} et F={-1 ; 1} sont P-stables.
   b. Donner un exemple d'ensemble P-stable ayant exactement trois éléments.
   c. Démontrer que l'ensemble K= $\{a^3, a \in \mathbb{N}\}$ des nombres qui sont des cubes d'entier naturel est un ensemble P-stable.
   d. On note D l'ensemble de toutes les puissances de 10 d'exposant entier naturel. Démontrer que D est un ensemble P-stable.
   e. Déterminer le plus petit ensemble P-stable de nombres réels contenant le nombre 7.

2- Ensembles P-stables ayant un ou deux éléments ;
   a. Déterminer tous les ensembles P-stables ayant un seul élément.
   b. Déterminer tous les ensembles P-stables ayant exactement deux éléments distincts.

3- Une surface dont le bord est un triangle rectangle isocèle étant donnée, on cherche à la « découper » en plusieurs surfaces de même aire, ayant aussi pour bord un triangle rectangle isocèle. On s'intéresse au nombre de petits triangles isocèles obtenus.
   a. Vérifier qu'il est possible d'obtenir un découpage en 2 triangles rectangles isocèles, puis en 16 triangles rectangles isocèles.
   b. Démontrer qu'il est possible d'obtenir un découpage en 9 triangles rectangles isocèles.
   c. Démontrer qu'il est possible de découper cette surface suivant 49 triangles rectangles isocèles.
   d. Démontrer que l'ensemble des nombres de triangles possibles est un ensemble P-stable.
   e. Démontrer qu'il est possible de découper cette surface suivant 127008 triangles rectangles isocèles.

EXERCICE 4 ACADEMIQUE : SAUTE GRENOUILLE

Soient m et n deux entiers naturels non nuls donnés. On considère une ligne de $m+n+1$ cases dans lesquelles on place m crapauds et n grenouilles selon la disposition initiale suivante :

- les m crapauds sont placés dans les m cases les plus à gauche ;
- les n grenouilles sont placées dans les n cases les plus à droite ;
- une case est laissée vide.
-

L'objectif est que les m crapauds se déplacent vers les m cases les plus à droite et les n grenouilles vers les n cases les plus à gauche. Pour cela, deux types de déplacements sont autorisés:

- un crapaud ou une grenouille peut **avancer** sur une case immédiatement voisine.
- un crapaud ou une grenouille peut **sauter** par dessus un animal de l'autre espèce (et un seul à la fois). De plus, les crapauds se déplacent toujours de gauche à droite et les grenouilles de droite à gauche.

Autrement dit, les animaux ne peuvent pas « revenir en arrière ».

Dans tous les cas, il ne peut y avoir deux animaux dans la même case.

Exemple. Par exemple, si $m = 1$ et $n = 2$, il y a 1+2+1 cases avec un crapeau à gauche et 2 grenouilles à droite, séparés par une case ; on note C le crapaud et G_1 et G_2 les deux grenouilles.

Configuration initiale

C		G_1	G_2

Configuration finale

G_1	G_2		C

Pour passer de l'une à l'autre, une réponse au problème est donnée par la succession d'étapes suivante :

Configuration initiale

C		G_1	G_2

	C	G_1	G_2

C **avance** d'une case.

G_1	C		G_2

G_1 **saute** par dessus C.

G_1		C	G_2

C **avance** d'une case.

G_1	G_2	C	

G_2 **saute** par dessus C.

Configuration finale

G_1	G_2		C

C **avance** d'une case.

1. **(a)** Apporter une réponse au problème lorsque $m = n = 1$.

   (b) Apporter une réponse au problème lorsque $m = n = 2$.

   (c) Apporter une réponse au problème lorsque $m = 2$ et $n = 3$.

2. Dans chacune des situations étudiées précemment vous pouvez constater que, pour répondre au problème, chaque case est laissée vide au moins une fois.

   Montrer que c'est le cas, quelles que soient les valeurs de m et n.

3. Dans cette question, m et n sont des entiers naturels strictement supérieurs à 1.

   Montrer que si on rencontre la configuration suivante alors on aboutira systématiquement à une impasse. *Les éventuelles cases précédentes ou suivantes ont volontairement été omises.*

C	G		C	G

4. On désigne par "déplacement" un saut ou le fait d'avancer d'une case.
   Montrer que le nombre de déplacements nécessaires pour répondre au problème est $mn + m + n$

5. **(a)** On s'intéresse à présent au cas suivant : 4 crapauds et 4 grenouilles sont placés dans les cases d'un carré. On veut passer de la configuration initiale :

C	G	G
C		G
C	C	G

   à la configuration finale :

G	C	C
G		C
G	G	C

   Comme précédemment, les animaux peuvent avancer sur une case immédiatement voisine ou sauter par dessus un animal d'une autre espèce. Les crapauds peuvent se déplacer uniquement vers la droite et vers le haut, et les grenouilles uniquement vers la gauche et vers le bas.

   Proposer une solution à ce problème.

   (b) Soit p un entier supérieur ou égal à 1. On considère un quadrillage carré composé de $2p+1$ cases en ligne comme en colonne.

   La case centrale est laissée vide. Les autres cases sont occupées pour moitié par des grenouilles et pour moitié par des crapauds de la manière suivante :

   – les colonnes de gauche sont occupées par les crapauds ;

– les colonnes de droite sont occupées par les grenouilles ;
– dans la colonne centrale, les cases du haut sont occupées par des crapauds et les cases du bas par des grenouilles.

L'objectif est que :

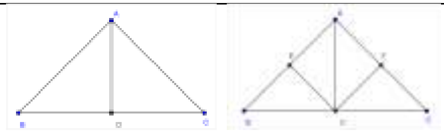
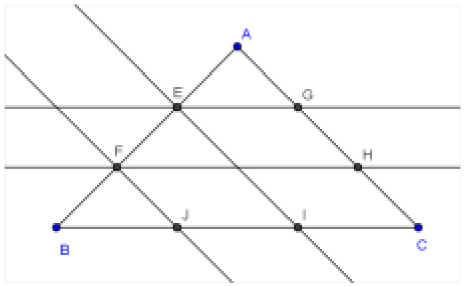
– les crapauds remplissent les colonnes de droite ainsi que les cases du bas de la colonne centrale ;
– les grenouilles remplissent les colonnes de gauche ainsi que les cases du haut de la colonne centrale.

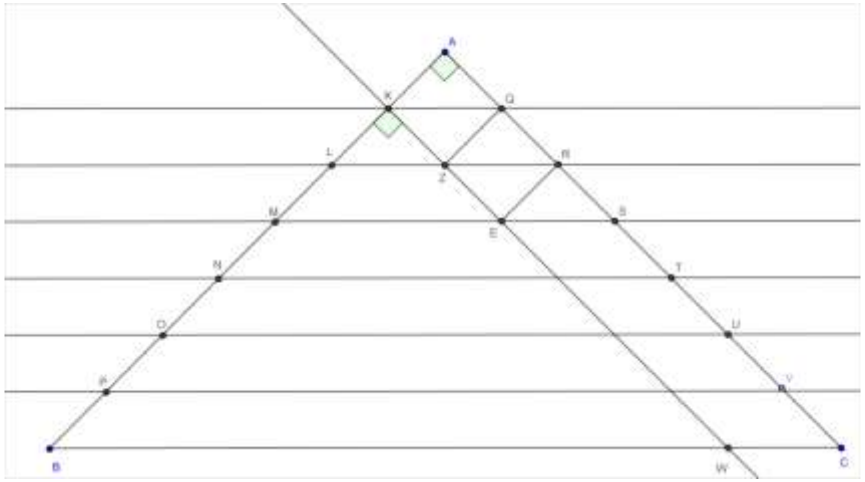
Ainsi, pour $p = 1$, la configuration initiale et la configuration finale sont celles décrites dans la question précédente.

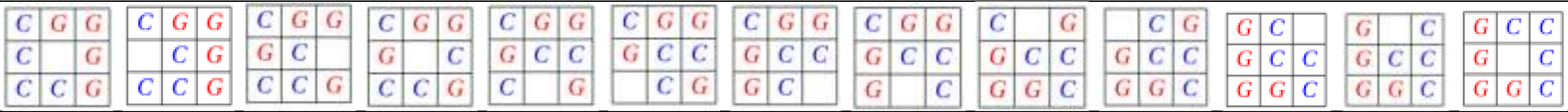
Les déplacements autorisés sont également ceux décrits dans la question précédente.

Déterminer, en fonction de p, le nombre de déplacements nécessaires pour répondre au problème.

FIN

EXERCICE 3 ACADEMIQUE	
1a	E={1} est P stable puisque 1×1=1 et F={-1 ; 1} est P-stable puisque on a les trois égalités : 1×1=1, (-1)×1=-1 et (-1)×(-1)=1
1b	un exemple d'ensemble P-stable ayant exactement trois éléments est {-1 ; 0 ; 1}
1c	Pour tous entiers naturels a et b, on a $a^k \times b^k = (a \times b)^k$, et a×b est un entier naturel, ce qui montre que K est P-stable.
1d	Pour tous entiers naturels m et n , on a $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$, et m+n est un entier naturel, ce qui montre que D est P-stable.
1e	Notons E le plus petit ensemble P-stable contenant 7. Si E contient 7 et est P-stable alors il doit contenir 7^2, et aussi 7×7^2…E doit contenir toutes les puissances de 7 d'exposant entier naturel non nul. Considérons l'ensemble des puissances de 7 d'exposant entier naturel non nul $\{7, 7^2, 7^3, \ldots 7^n, \ldots\}$. On montre de même qu'en **d.** que c'est un ensemble P-stable. C'est donc le plus « petit » ensemble P-stable contenant 7.
2a	Soit E= {a}, un ensemble P-stable ayant un seul élément. Nécessairement on doit avoir $a^2=a$ soit $a(a-1)=0$ donc a=0 ou a=1. Les singletons {0} et {1} sont bien des ensembles P-stables
2b	Soit E= {a ; b}, un ensemble P-stable ayant exactement deux éléments distincts, avec $a < b$. Deux cas se présentent : a^2 étant dans E, $a^2 = a$ ou $a^2 = b$. • Si $a^2 = a$ alors a = 0 ou a = 1 - Si a = 0 alors b>0 et donc $b^2=b$. Ce qui montre que b=1 - Si a = 1 alors b > 1 et donc $b^2>1$, ce qui montrer que b^2 n'est pas a , et donc est égal à b, ce qui est impossible. • Si $a^2 = b$. Considérons le produit ab : - Si $ab=a$ alors $a^3=a$ soit $a(a^2-1)=0$ soit $a(a-1)(a+1)=0$ qui donne a=0 et b=0 qui est impossible, a=1 et b=1 qui est impossible, ou a=-1 et b=1 - Si $ab=b$ alors $a^3=a^2$ soit $a^2(a-1)=0$, qui donne a=0 et b=0 ou a=1 et b=1, qui est impossible En conclusion les seules possibilités sont E= {0 ; 1} ou E= {-1 ; 1}, qui sont bien P-stables.
3a	 En itérant le procédé on voit qu'il est possible de découper en 2,4,8, 16…en toute puissance de 2.
3b	 Considérons les points E et F de [AB] tels que BF=FE=EA ; Le théorème de Thalès montre que les parallèles à (BC) recoupent [AC] en et G et H tels que CH=HG=GA. La réciproque du théorème de Thalès montre que les droites (HI) et (GJ) sont parallèles à (AB). De plus EG=GJ et donc EGIJ est un parallélogramme, ce qui prouve que [EI] et [GJ] se coupent en leur milieu. Cela permet de prouver en utilisant les angles, que tous les triangles obtenus sont rectangles et isocèles.

3c	 Partageons le côté [AB] du triangle rectangle ABC en 7 segments de même longueur : AK=KL=LM=MN=NO=OP=PB=AB/7. Des parallèles à (BC) recoupent [AC] en QRSTUV tels que AQ=QR=…=VC=AC/7. Or AB=AC donc AQ=AK et le triangle AKQ est rectangle isocèle. La parallèle à (AC) passant par K recoupe [LR] en Z et [BC] en W. Le théorème des milieux appliqué au triangle LAR montre que Z est le milieu de [LR] et KZ=AR/2=AQ donc KZ=AK=KL. De plus le parallélisme de (KZ) et (AR) montre que $LKZ = 90^\circ$. Cela finit à prouver que le triangle LKZ est rectangle isocèle. Le théorème des milieux montre aussi que (QZ) est parallèle à (AK) et donc que AKZQ est un carré puis que ZQR est aussi un triangle rectangle isocèle. $QZE = ZQR = 90^\circ$ et ZE=QZ=QR donc QZER est un carré. On répète ce procédé pour prouver qu'on obtient 13 triangles rectangles isocèles de même aire, de QZK à CVW. En considérant ses angles par exemple on voit que le triangle KBW est rectangle isocèle et une parallèle passant par L permet d'obtenir 2×5+1=11, triangle rectangles isocèles que même aire que les précédents. En itérant ce procédé on construit 13+11+9+7+5+3+1 triangles rectangles isocèles de même aire, soit 7×(1+13)/2=49 triangles.
3d	Supposons que nous puissions découper tout triangle rectangle isocèle en *n* triangles rectangles isocèles de même aire, et en *p* triangle rectangle isocèles de même aire (des triangles rectangles isocèles de même aire étant nécessairement isométriques). Après avoir partagé un triangle rectangle isocèle d'aire *A* en *n* triangles rectangles isocèles de même aire *A/n* , redécoupons chacun d'eux en *p* triangles rectangles isocèles de même aire(*A*/*n*)/*p*. On obtient alors *n*×*p* triangles rectangles isocèles de même aire *A*/(*np*).
3e	Décomposons 3528 en facteurs premiers. 127008=2^5×9^2×7^2. Il est possible de découper suivant 7^2 triangles rectangles isocèles. Il est possible aussi de découper un triangle rectangle isocèle en 2 triangles rectangles isocèles et en 9, donc en 9^2 triangles rectangles isocèles. D'après la question c. il est donc possible de découper suivant 2^5×9^2×7^2triangles rectangles isocèles.
EXERCICE 4 ACADEMIQUE	
1a	[C][ ][G] [ ][C][G] [G][C][ ] [G][ ][C]
1b	[C_1][C_2][ ][G_1][G_2] [C_1][ ][C_2][G_1][G_2] [C_1][G_1][C_2][ ][G_2] [C_1][G_1][C_2][G_2][ ] [ ][G_1][C_1][G_2][C_2] [C_1][G_1][ ][G_2][C_2] [G_1][ ][C_1][G_2][C_2] [G_1][G_2][C_1][ ][C_2] [G_1][G_2][ ][C_1][C_2]
1c	[C_1][C_2][ ][G_1][G_2][G_3] [C_1][ ][C_2][G_1][G_2][G_3] [C_1][G_1][C_2][ ][G_2][G_3] [C_1][G_1][C_2][G_2][ ][G_3] [C_1][G_1][ ][G_2][C_2][G_3] [ ][G_1][C_1][G_2][C_2][G_3] [G_1][ ][C_1][G_2][C_2][G_3] [G_1][G_2][C_1][ ][C_2][G_3] [G_1][G_2][C_1][G_3][C_2][ ] [G_1][G_2][C_1][G_3][ ][C_2] [G_1][G_2][ ][G_3][C_1][C_2] [G_1][G_2][G_3][ ][C_1][C_2]
2	Lorsqu'un animal effectue un déplacement, il laisse vide la case qu'il occupait avant de se déplacer. Or, chaque animal effectuant au moins un déplacement, chaque case occupée initialement par un animal est laissée vide au moins une fois.

<table>
<tr><td></td><td>La seule case non occupée initialement par un animal étant par définition vide dans la configuration de départ, on peut dire que chaque case est laissée vide au moins une fois.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Etant donné que les crapauds ne peuvent se déplacer que vers la droite et que les grenouilles ne peuvent se déplacer que vers la gauche, les seuls déplacements possibles dans cette configuration sont : le saut de la grenouille de droite ou le saut du crapaud de gauche.
– Si on choisit d'effectuer le saut de la grenouille de droite, on se trouve dans la configuration suivante
<table><tr><td>C</td><td>G</td><td>G</td><td>C</td><td></td></tr></table>
:
Pour résoudre le problème, le crapaud de gauche devra inverser sa position avec les deux grenouilles. Les grenouilles ne pouvant sauter par dessus le crapaud (car, la case vide étant ici située à droite, toutes les cases précédant éventuellement le crapaud de gauche sont occupées), ni avancer, le crapaud de gauche devra sauter par dessus les deux grenouilles, et ce, en un seul saut, ce qui est interdit. On aboutit donc à une impasse.
– Si on choisit d'effectuer le saut du crapaud de gauche, la configuration est symétrique à celle que l'on vient de décrire.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Pour résoudre le problème, chaque crapaud doit avancer de $n+1$ cases et chaque grenouille de $m+1$ cases. Ainsi les animaux dans leur ensemble avancent de $m(n+1)+n(m+1)=2mn+m+n$ cases. Or,
– sauter par dessus un autre animal fait avancer de deux cases,
– avancer sur une case vide fait avancer d'une seule case.
De plus, pour résoudre le problème, on effectue mn sauts. En effet, pour passer de la configuration initiale à la configuration finale, chaque grenouille doit inverser sa position avec chaque crapaud. Il y a donc mn inversions de positions, c'est à dire mn sauts.
Ces mn sauts font avancer les animaux de $2mn$ cases. Il y a donc aussi $m+n$ déplacements qui consistent au fait d'avancer sur une case vide.
Au total, il y a donc $\boldsymbol{mn+m+n}$ déplacements.</td></tr>
<tr><td>5a</td><td></td></tr>
<tr><td>5b</td><td>(b) Résoudre le problème sur le carré revient à le résoudre $\boxed{\text{sur les } 2p+1 \text{ lignes}}$ ainsi que sur la colonne centrale, donc $2p+2$ fois.
On peut adopter la stratégie suivante :
– on cherche à résoudre le problème sur la colonne centrale ;
– on sait d'après une question précédente que l'on va tour à tour libérer chaque case de la colonne centrale ;
– lorsqu'une case de la colonne centrale est vide, on résout le problème dans la ligne correspondante.
Or, sur chaque ligne comme sur la colonne centrale, lorsque la case centrale est laissée vide, on a $m=n=p$, par conséquent sur chaque ligne comme sur la colonne centrale, il faut effectuer $mn+m+n=p^2+2p=p(p+2)$ déplacements.
Au total, le nombre de déplacements est donc $(2p+2)p(p+2)=2p(p+1)(p+2)$.</td></tr>
</table>