SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CORSE

Classes de première S • 2012

Académie de CORSE
OLYMPIADES ACADEMIQUES DE PREMIERE
Session 2012 - TOUTES SERIES

Une calculatrice est autorisée.
Ne pas hésiter à faire figurer sur la copie toutes les pistes de recherche et tentatives de résolution, même infructueuses, qui pourront être valorisées

EXERCICE 1

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. Soit n un entier *digisible* quelconque.

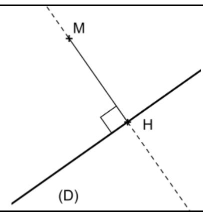
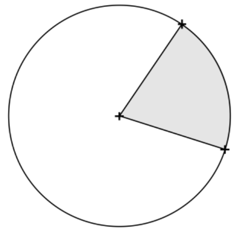
a. Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.

b. Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.

c. Déterminer le plus grand entier *digisible*.

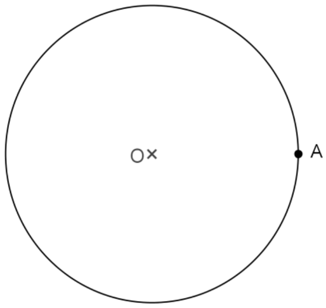
EXERCICE 2

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\pi\alpha R^2/360$. *Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point M à* ***un segment [****BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

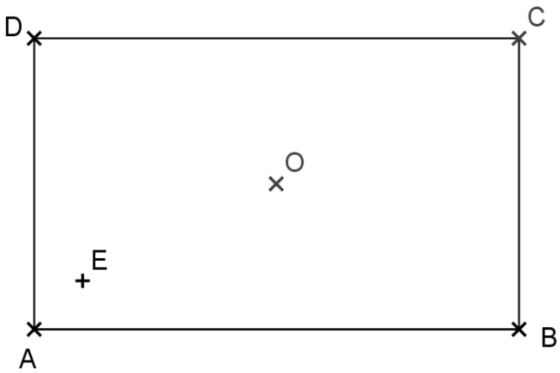
Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.
   Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?
2. ***a.*** Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
   b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
   c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?
3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?
4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

EXERCICE 3: **Les *nombres « Corses »***

On appelle « grille » du plan l'ensemble des points, sommets des carrés d'un quadrillage de 1 cm de côté.

La figure 1 représente de façon simplifiée la forme du tour de la Corse, à l'aide de trois segments dont les extrémités sont des points de la grille.
La même « forme » c'est à dire avec des segments parallèles à ceux ci, peut être obtenue avec davantage de points de la grille comme le montre la figure 2.

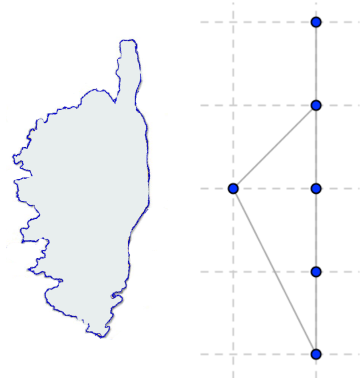


Figure 1.

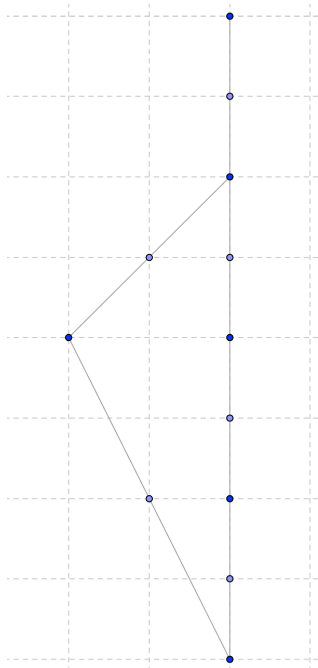


Figure 2.

1. Le nombre de points de la grille situés sur ces segment est un nombre entier naturel appelé nombre « *tour de Corse* ». On note T_1, T_2, …, T_n,…les nombres « *tour de Corse* » ordonnés en ordre croissant. Ainsi T_1=6 et T_2= 12.

   a. Déterminer T_3 et T_4.
   b. Calculer T_{100} et déterminer la longueur en centimètres de la ligne brisée représentant la Corse en passant par ces points.

2. Le nombre de points de la grille situés sur le bord ou à l'intérieur de la représentation de la Corse est appelé nombre « *Corse* ». On note C_1, C_2, …, C_n,…les nombres « *Corses* » ordonnés en ordre croissant. Ainsi C_1 = 6 et C_2 = 14.

   a. Déterminer C_3 et C_4.
   b. Déterminer le nombre « *Corse* » le plus proche de 2012.

Rappels

Pour tout entier naturel n, la somme de tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à n est

$$1+2+3+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

<u>EXERCICE 4 : Modélisation d'une hélice d'avion à trois pales.</u>

Le but de cet exercice est de modéliser et calculer l'aire des pales d'une hélice dont un exemple est représenté ci contre. Pour simplifier on ne considèrera que des surfaces planes.

1. Pour cela on considère un hexagone régulier, c'est à dire un un polygone ayant six côtés, ayant tous la même longueur et dont les sommets sont sur un même cercle de centre O.

   ABCDEF est un hexagone régulier de côté R cm. On considère les cercles (*C*) de centre *B* , (*C'*) de centre *D*, (*C''*) de centre *F*, de rayons R cm.

   a. Démontrer que les trois cercles passent par le point O.

   b. Déterminer en fonction de R, l'aire de la portion de plan limitée par les arcs de ces cercles d'extrémités *A* et *O*, représentant une pale de l'hélice.

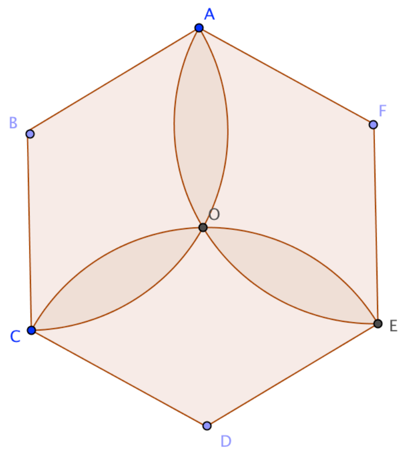
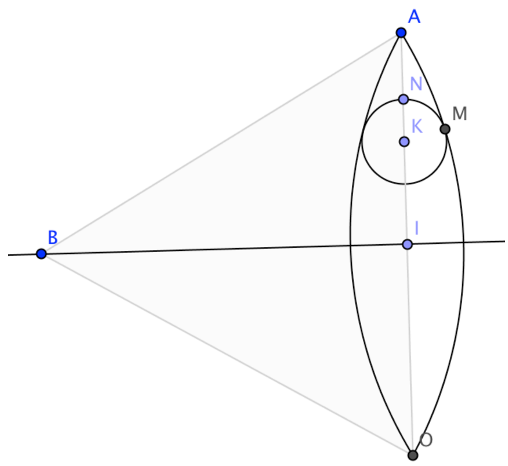


Figure 3.

2. On veut améliorer le modèle de la forme de chaque pale, en « arrondissant » l'extrémité. On considère donc un cercle (Γ) dont le centre *K* est situé sur le segment [*OA*], à une distance *AK*=R/10 de *A*, et tangent en un point *M* au cercle (*C*) de centre *B* et de rayon R.
   a. Déterminer en fonction de R, le rayon *r* du cercle (Γ).
   b. Sachant que la longueur *ON* de la pale obtenue est 1 mètre, déterminer sa largeur, calculée au niveau du point I, milieu du segment [*OA*].
   c. Déterminer dans ce cas une valeur approchée de l'aire de la pale à 1 cm^2 près par défaut.



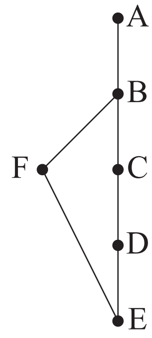
CORRECTION, CORSE 2012

Premier exercice Académique (exo 3)

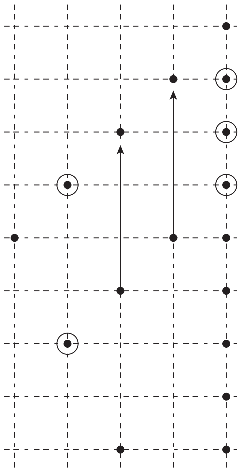
Olympiades mathématiques, S

1. a) En faisant un dessin on constate que $T_3 = 18$ et $T_4 = 24$.

   b) A chaque étape la « Corse » est dessinée sur quatre carrés dont les sommets sont des points de la grille. Il y a autant de points de la grille sur le côté d'un carré que sur sa diagonale.
   Du fait de sa pente il y a autant de points sur [EF] que sur les autres segments. Notons a_n le nombre de points de la grille situés à l'intérieur d'un côté de ces carrés.
   A l'étape n on a donc :
   4 extrémités des trois segments : ABEF
   2 sommets des carrés (C et D)
   $6a_n$ points à l'intérieur des segments



On déduit de la figure 1 qui montre le passage d'une étape à l'autre que (a_n) est une suite arithmétique de raison 1.
$a_1 = 0$ donc pour tout entier naturel n , $a_n = n - 1$.
Ainsi $T_n = 6 + 6(n-1) = 6n$. $T_{100} = 600$ et il y a 99 points à l'intérieur de chaque segment.



Ainsi $AB = BC = CD = DE = 100$ et $BF = 100\sqrt{2}$.
D'après le théorème de Pythagore
$EF^2 = 100^2 + 200^2 = 5.100^2$ donc $EF = 100\sqrt{5}$.
La longueur totale de la ligne brisée est donc
$L = 400 + 100\sqrt{2} + 100\sqrt{5} = 100\left(4 + \sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$

On peut aussi remarquer qu'à chaque étape la figure subit un agrandissement de rapport variable :
3/2, puis 4/3, puis 5/4. . .jusqu'à 100/99.
La longueur initiale $4+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ est donc multipliée par
$\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{100}{99} = \frac{100}{2} = 50$.

2. a) A l'étape 3 il y a $a_3 = 2$ points intérieurs à [EB]. Sur les droites verticales issues de ces points, il y a les points « intérieurs à la Corse », 2 sur la droite la plus à gauche et 3 de plus sur la suivante.
   A l'étape 3 il y a donc $2 + 5 = 7$ points intérieurs.
   Donc $C_3 = T_3 + 5 = 18 + 7 = 25$.
   A l'étape 4, il y a $a_4 = 3$ points intérieurs à [EB]. Il y a donc $2 + 5 + 8$ points « intérieurs à la Corse », donc $C_4 = 24 + 15 = 39$.

   b) A l'étape n il y a $n-1$ points intérieurs à [EB]. Le nombre de points intérieurs à la « Corse » est donc $2+(2+3)+(2+2\times3)+(2+3\times3)+\cdots+(2+(n-2)\times3)$, c'est-à-dire la somme de $n-1$ termes d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2, soit

$$(n-1)\frac{2+(2+(n-2)\times 3)}{2} = \frac{(n-1)(3n-2)}{2}$$

   Ainsi

$$C_n = 6n + \frac{(n-1)(3n-2)}{2} = \frac{12n + 3n^2 - 5n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 7n + 2}{2}.$$

source : apmep

Considérons

$$C_n - 2012 = \frac{3n^2+7n+2}{2} - 2012 = \frac{3n^2+7n+2-4024}{2} = \frac{3n^2+7n-4022}{2}.$$

Étudions le signe du trinôme $3x^2+7x-4022$:
$\Delta = 49+4\times 3\times 4022 = 48313$; la racine réelle positive du trinôme est donc $x_1 = \dfrac{-7+\sqrt{48313}}{6}$.
Sans calculatrice, si on remarque que $22^2 = 4\times 181 = 484$, donc $220^2 = 48400$, on obtient alors $219^2 = (220-1)^2 = 48400-440+1 = 47961$.

Ainsi $\dfrac{219-7}{6} \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{220-7}{6}$ soit $\dfrac{212}{6} \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{213}{6}$ ce qui montre que $35 < x_1 < 36$.

Avec la calculatrice on obtient sans effort $\dfrac{-7+\sqrt{48313}}{6} \approx 35,47$.

Donc pour $n \geqslant 36$, on a $C_n \geqslant 2012$.

La comparaison de C_{35} et C_{36} avec 2012 montre que C_{35} est le nombre « Corse » le plus proche de 2012.

$$\begin{aligned}\frac{3\times 35^2+7\times 35+2}{2} &= \frac{7\times 35\times(3\times 5+1)}{2}+1\\ &= 7\times 35\times 8+1 = 7\times 70\times 4+1\\ &= 490\times 4+1 = 1960+1 = 1961\end{aligned}$$

$C_{35} = 1961$.

n	C_n	n	C_n	n	C_n	n	C_n	n	C_n
1	6	2	14	3	25	4	39	5	56
6	76	7	99	8	125	9	154	10	186
11	221	12	259	13	300	14	344	15	391
16	441	17	494	18	550	19	609	20	671
21	736	22	804	23	875	24	949	25	1026
26	1106	27	1189	28	1275	29	1364	30	1456
31	1551	32	1649	33	1750	34	1854	35	1961
36	2071	37	2184						

CORRECTION, CORSE 2012

Second exercice Académique (exo 4)

Olympiades mathématiques, S

1. (a) O étant le centre du cercle circonscrit, les triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA sont isocèles et isométriques. Ils ont donc les mêmes angles en O, qui ont ainsi tous pour mesure 360/6=60°.
Les six triangles précédents sont donc équilatéraux, ce qui permet d'affirmer que $BA = BO = BC$ et donc que le cercle de centre B et de rayon R passe par O. De même pour (C') et $(C")$.
   (b) L'aire de la demi-pale est égale à la différence entre l'aire du secteur OFA et celle du triangle équilatéral OFA, soit $R^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. L'aire d'une pale est donc $R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. a) le triangle AOB étant équilatéral, $OA = R$.
Donc $IK = \frac{R}{2}-\frac{R}{10}=\frac{4R}{10}=\frac{2R}{5}$.
Les cercles (C) et (Γ) étant tangents en M, les deux centres O et K sont alignés avec M.
Ainsi $r = KM = BM - BK = R - BK$.
Le triangle BIK est rectangle en I puisque la médiane (BI) est aussi hauteur dans le triangle équilatéral AOB. De plus $BI^2 = R^2 + (R/2)^2 = 3R^2/4$.
CalculonsBK grâce au théorème de Pythagore appliqué au triangle BIK : $BK^2 = BI^2 + IK^2$.
Donc : $BK^2 = \frac{3R^2}{4}+\frac{4R^2}{25}=\frac{75R^2+16R^2}{100}=\frac{91R^2}{100}$.
Donc $BK = \frac{R\sqrt{91}}{10}$
Ainsi $r = R-\frac{R\sqrt{91}}{10}=\left(1-\frac{\sqrt{91}}{10}\right)R$.
   b) $ON = OK + r = \frac{9}{10}R+\left(1-\frac{\sqrt{91}}{10}\right)R=\frac{19-\sqrt{91}}{10}R$. Sachant que ON=1 en mètres , on obtient donc
$$R=\frac{10}{19-\sqrt{91}}=\frac{10\left(19+\sqrt{91}\right)}{19^2-91}=\frac{19+\sqrt{91}}{27}$$
La largeur de l'hélice est donc égale à
$$2(R-BI)=2R\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\left(19+\sqrt{91}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{27}.$$
Ainsi la largeur de la pale est environ de 28,3 cm.

source : apmep

c) L'aire de la pale est le double de la somme des deux aires :
L'aire A_1 d'une portion de plan limitée par les segments [OK], [KM] et l'arc OM.
L'aire A_2 de la portion de disque de centre K interceptant le petit arc MN.

Notons α une mesure en degrés de l'angle aigu $\widehat{MKN}$
$A_2 = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360}$.

De plus, $\widehat{IBK} = 90 - \alpha$ et donc $\widehat{OBK} = 30 + 90 - \alpha = 120 - \alpha$.
L'aire du secteur angulaire OBM est donc $\dfrac{\pi R^2(120-\alpha)}{360}$.

Donc $AI = \dfrac{\pi R^2(120-\alpha)}{360} - BI \times \dfrac{OK}{2} = \dfrac{\pi R^2(120-\alpha)}{360} = -R\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{2}R$

L'aire de la pale est donc :

$$\pi\left(1 - \frac{\sqrt{91}}{10}\right)^2 R^2\frac{\alpha}{180} + \frac{\pi R^2(120-\alpha)}{180} - R^2\frac{9\sqrt{3}}{20} = R^2$$

$$\pi R^2\left(\left(1 + \frac{91}{100} - \frac{\sqrt{91}}{5}\right)\frac{\alpha}{180} + \frac{2}{3} - \frac{\alpha}{180}\right) - R^2\frac{9\sqrt{3}}{20}$$

$$= \pi R^2\left(\frac{91}{100} - \frac{\sqrt{91}}{5}\right)\frac{\alpha}{180} + \frac{2}{3}\pi R^2 - R^2\frac{9\sqrt{3}}{20}.$$

Il reste à déterminer α : $\tan\alpha = \dfrac{IB}{IK} = \dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\frac{2R}{5}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

d'où $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{5\sqrt{3}}{4} = 65,209^o$.
L'aire de la pale est donc : 0,2003 m^2, soit 2003 cm^2.