SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CORSE

Classes de première S • 2011

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE PREMIERE
Session 2011 - TOUTES SERIES
Académie de CORSE

Toutes les pistes de recherche et tentatives de résolution, même infructueuses, pourront être valorisées
Une calculatrice est autorisée.

<u>Exercice 1- National : Essuie-glaces</u>

(les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

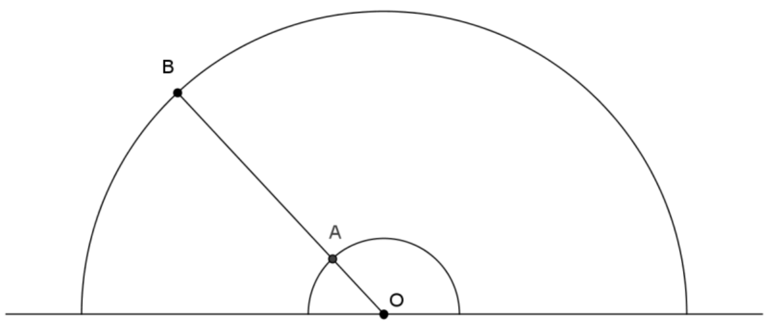


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

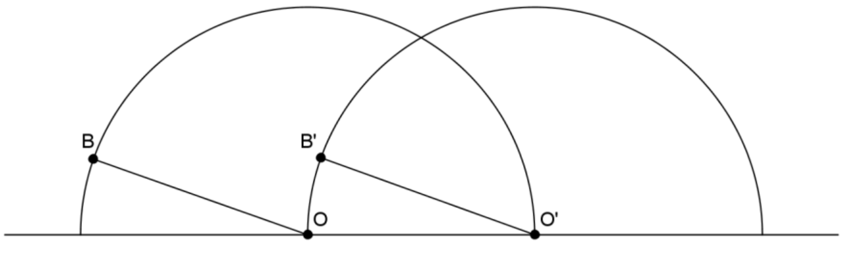


Fig. 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $OCA = 30°$, $CB = 4\,CA$ et $OC = \sqrt{3}\times CA$. On pose CA = *a*.

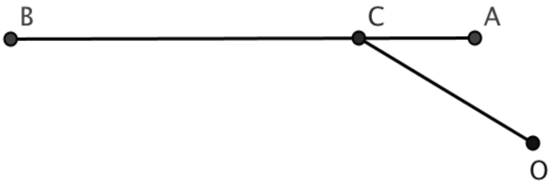


Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

   Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de *a* l'aire de la surface essuyée par le balai.

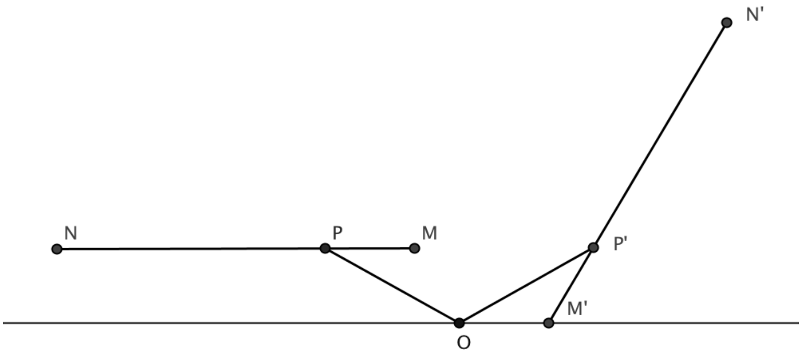


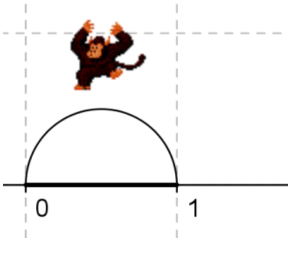
Fig. 4

<u>Exercice 2 - National: Le singe sauteur</u>

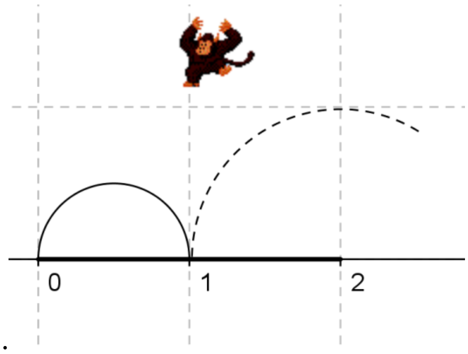
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit *atteignable* si le singe peut, en partant de l'origine (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en exactement n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (effectués dans cet ordre) et sans jamais sortir du segment [0 ; n].

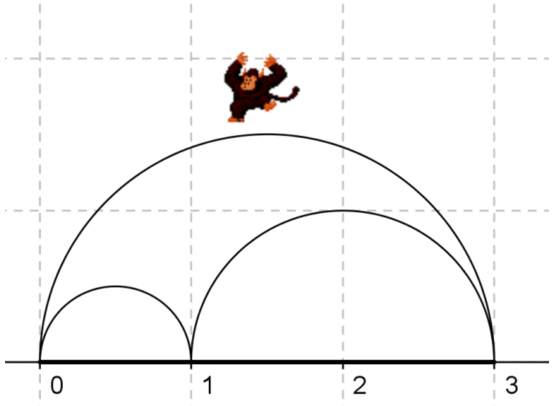
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle [0 ; 2].



Le nombre 3 n’est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l’avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l’arrière (sinon il sort de l’intervalle [0 ; 3]) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d’une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n’est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

   Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier *m*, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5.
   a. Montrer que si le nombre entier *n* est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l’entier *n* pour qu’il soit atteignable.
   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose $N \geq 6$ et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 …
   Montrer que N+4 est aussi atteignable.

Exercice 3 - Académique: Les carrés Enatéleutes

Dans cet exercice on s'intéresse, parmi les carrés de nombres entiers, à ceux dont le chiffre des unités dans l'écriture décimale est 1 : 1, 81, 121, …841 sont des carrés parfaits. On note E la liste ordonnée en ordre croissant de tous ces carrés.

1. Quel est le nombre suivant 841 dans la liste E ?
2. Démontrer que la différence de deux nombres quelconques de E est un multiple de 40.
3. Quel est le 2011ème nombre de la liste E.
4. Existe-il des nombres de E se terminant par 11 ?

Exercice 4 - Académique: Chasse au trésor

Sur un terrain, symbolisé par quadrillage se trouve caché un trésor. Un chasseur de trésor fouille le terrain pour découvrir un trésor de pièces métalliques, enterré dans une des case (marquée d'un x sur l'exemple) à l'aide d'un détecteur à métaux.

Soit le détecteur est placé sur la bonne case et indique la présence du trésor dans celle-ci, soit s'il est placé sur une case où le trésor ne se trouve pas, il indique par des signaux sonores différents trois types de renseignements:

- il indique la présence du trésor dans la « zone α » si celui-ci se trouve sur une des huit cases directement adjacentes.
- ou bien il indique la présence du trésor dans la « zone β » si celui-ci se trouve deux cases plus loin (voir l'exemple).
- ou bien il n'indique rien si le trésor est encore plus loin, et nous dirons alors qu'il est dans la « zone γ ».

Ainsi lorsqu'il est au dessus d'une case le détecteur a quatre états possibles.

β	β	β	β	β		
β	α	α	α	β		
β	α	x	α	β		
β	α	α	α	β		
β	β	β	β	β		

Exemple sur un terrain de 7×7 cases ou x *désigne la position du trésor*

On cherche une stratégie permettant au chasseur de déterrer à coup sûr le trésor en un nombre de tentatives minimum.

5					
4					
3					
2					
1					
	a	b	c	d	e

1. On commence par un terrain carré de dimension 5×5 cases et on repère les cases comme suit où les lettres indiquent les colonnes et les nombres indiquent les lignes

   a. Reproduire et compléter le tableau suivant, dans lequel on note, pour chaque case du terrain indiquée sur la première colonne du tableau, le nombre de cases se trouvant respectivement dans les zones α, β et γ . Par exemple, la zone α de la case $a1$ est constituée des cases $a2$, $b1$ et $b1$ qui sont donc au nombre de trois.

	α	β	γ
$a1$	3	5	16
$b1$			
$c1$			
$b2$			
$c2$			
$c3$			

b. On entoure, sur chaque ligne, le plus grand des trois entiers. On appelle *choix raisonnable* la case du terrain 5×5 pour laquelle l'entier entouré est le plus petit possible. Quel est l'unique choix raisonnable du tableau précédent ?

c. Expliquer pourquoi il est alors possible de déterminer sans tableau supplémentaire toutes les cases du terrain 5×5 qui sont des choix raisonnables, et colorier sur le quadrillage 5×5 les choix raisonnables.

2. On décide, à la première tentative, de fouiller la case $b2$ et on suppose que le détecteur indique la présence du trésor dans la zone α .

	α	β	γ
$c2$	4	3	0
$c3$			
$d2$			
$d3$			
$d4$			

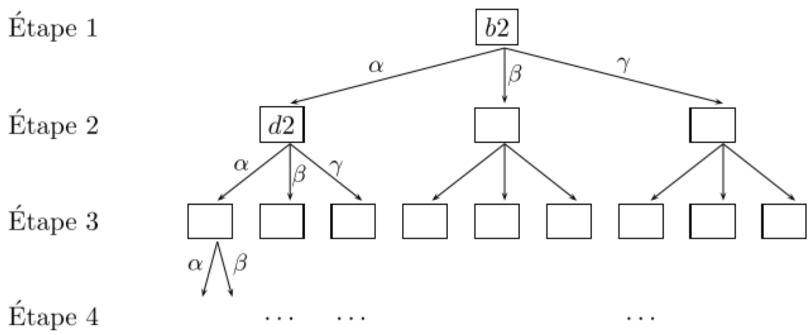
a. Compléter le tableau suivant, construit sur le même modèle que le précédent, mais dans lequel on ne compte plus que les cases, dans chaque zone, susceptibles de contenir le trésor.

b. Indiquer dans ce cas un choix raisonnable pour la deuxième étape. Y a-t-il unicité de ce choix ?

c. Poursuivre l'étude de ce cas et montrer ainsi que le trésor sera découvert en quatre tentatives maximum, quelque soit son emplacement.

3. A la première tentative, on fouille la case $b2$ et on suppose désormais que le trésor se trouve dans la zone γ . Mener une étude similaire (on pourra construire un tableau contenant les cases $c5$, $d5$, $e5$, $b4$, $c4$ et $d4$) et en conclure à nouveau que la stratégie du choix raisonnable permet de découvrir le trésor en quatre tentatives maximum.

4. Terminer l'étude de la case $b2$ comme premier choix. On pourra présenter la stratégie complète dans un arbre à quatre lignes :



5. Est-il possible de déterrer le trésor à coup sûr en quatre tentatives si on commence par fouiller la case $c2$?

6. On considère désormais un terrain de taille $n \times n$, et on note T_n le nombre de tentatives nécessaires pour déterrer à coup sûr le trésor sur ce terrain (par exemple $T_5 = 4$).

a. Montrer que : $161765 \leq T_{2011} \leq 162410$.

b. ***Question pour les premières S uniquement***

A l'aide d'inégalités, montrer que la suite T_n / n^2 tend vers 1/25 lorsque n tend vers l'infini.

CORRECTION, CORSE 2011

Premier exercice Académique (exo 3)

Olympiades mathématiques, S

1. $841 = 29^2$, le nombre suivant sera donc 31^2 soit 961.
2. Les nombres dont le carré a 1 pour chiffre des unités ont eux mêmes 1 ou bien 9 pour chiffre des unités ; ce sont donc les nombres entiers de la forme $(10n+1)^2$ ou de la forme $(10n+9)^2$, où n désigne un entier naturel.
   Considérons la différence de deux carrés de ce type consécutifs.
   - S'ils sont dans la même dizaine :
     $$(10n+9)^2 - (10n+1)^2 = (10n+9+10n+1)(10n+9-10n-1) = 8(20n+10) = 80(2n+1)$$
   - S'ils ne sont pas dans la même dizaine :
     $$(10n+11)^2 - (10n+9)^2 = (10n+11+10n+9)(10n+11-10n-9) = 2(20n+20) = 40(n+1)$$

   Ainsi la différence de deux éléments de E est une somme de multiples de 40 donc elle-même un multiple de 40.
3. Il y a 2 nombres dont le carré se termine par 1 dans une dizaine de 10n à $10n+9$.
   $2010 = 2 \times 1005$. Donc dans les 1005 premières dizaines il y a 2010 nombres dont le carré se termine par 1.
   Le $2010^{\text{ème}}$ est $10 \times 1004 + 9 = 10049$. Le $2011^{\text{ème}}$ est 10051.
   Le $2011^{\text{ème}}$ élément de E est donc 10051^2.
4. Nous cherchons les carrés se terminant par 11. Ils sont de la forme $100N + 11$ où N est un entier naturel. Supposons qu'il existe des entiers n et N tels que
   $(10n+1)^2 = 100N + 11 ou (10n+9)^2 = 100N + 11$,
   $(10n+1)^2 = 100N + 11 \Leftrightarrow 100n^2 + 20n + 1 = 100N + 11 \Leftrightarrow 10n^2 + 2n - 100N = 1$,
   $(10n+9)^2 = 100N + 11 \Leftrightarrow 100n^2 + 180n + 81 = 100N + 11 \Leftrightarrow 10n^2 + 18n - 10N = 1$.

   On aboutit à une absurdité, 1 n'étant pas pair.
   Il n'existe donc pas d'entiers de E se terminant par 11.

CORRECTION, CORSE 2011

Second exercice Académique (exo 4)

Olympiades mathématiques, S

1. a et b.

	α	β	γ
$a1$	3	5	$\boxed{16}$
$b1$	5	6	$\boxed{13}$
$c1$	5	9	$\boxed{10}$
$b2$	8	7	$\boxed{9}$
$c2$	8	$\boxed{11}$	5
$c3$	8	$\boxed{16}$	0

Le choix raisonnable est celui de la case $b2$, avec un « minimax » égal à 9.

c. Le travail exéctué vaut pour les 25 cases du terrain, en raison des deux symétries indépendantes : par rapport à la colonne c et par rapport à l'une des diagonales, par exemple la diagonale $a1 \to e5$. Toutes les cases du terrain se déduisent d'une des six cases du tableau par application d'une ou plusieurs de ces symétries.

2. a.

	α	β	γ
$c2$	4	3	0
$c3$	2	5	0
$d2$	3	2	3
$d3$	2	3	3
$d4$	1	2	5

Ici, les cases $d2$ et $d3$ sont toutes les deux des choix raisonnables avec un minimax valant 3. Puisque la somme des chiffres sur une ligne vaut au moins 7, aucune case du terrain ne peut avoir un minimax inférieur ou égal à deux (sans quoi cette somme vaudrait au plus 6) et donc ces deux cases sont nécessairement des choix raisonnables pour la deuxième étape (même si le tableau est incomplet).

b. Voir l'arbre de la question 4.

3.

	α	β	γ
$c5$	2	4	2
$d5$	3	2	3
$e5$	2	2	4
$b4$	3	1	5
$c4$	3	5	1
$d4$	5	2	2

La case $d5$ est un choix raisonnable et il est inutile de tester les autres cases pour l'affirmer, ne pouvant être égal à 2 car la zone testée comporte 9 cases. Voir l'arbre suivant pour la fin de l'étude de ce cas.(page suivante)

4.

Etape 1							$\boxed{b2}$						
Etape 2			α $\boxed{d2}$				β $\boxed{d4}$				γ $\boxed{d5}$		
Etape 3		α $\boxed{c3}$	β $\boxed{b3}$	γ $\boxed{a3}$		α $\boxed{d3}$	β $\boxed{d2}$	γ $\boxed{d1}$		α $\boxed{e5}$	β $\boxed{e3}$	γ $\boxed{e2}$	
Etape 4	α $\boxed{c2}$	β $\boxed{c1}$	β $\boxed{b1}$	α $\boxed{a2}$	β $\boxed{a1}$	α $\boxed{c4}$	β $\boxed{b4}$	γ $\boxed{a4}$	α $\boxed{e2}$	β $\boxed{c5}$	γ $\boxed{b5}$	α $\boxed{e1}$	γ $\boxed{a5}$

5. La réponse est oui. La zone α est analogue au cas précédent, la zone γ comportant 5 cases est triviale, et la difficulté se situe dans la zone β comportant 11 cases. Mais la deuxième tentative effectuée en $d2$ (ou $b2$) permet de scinder cette zone en 3 zones de respectivement 3, 4 et 4 cases alignées, ce qui permet de déterrer le trésor en au plus deux tentatives supplémentaires.

6. ► Nous dirons que le trésor est *localisé* s'il est déterré ou s'il est situé dans la zone α ou dans la zone β d'une case fouillée. Un trésor déterré est un trésor localisé, mais chaque tentative permet de localiser le trésor sur au plus 25 des 2011^2 cases, donc il faut au moins $\dfrac{2011^2}{25}$ tentatives pour réussir à coup sûr. Comme $\dfrac{2011^2}{25} = 161764.84$, c'est que $T_{2011} \geqslant 161765$.

   ► Exhibons une stratégie permettant de déterrer le trésor en 162410 tentatives au plus, ce qui montrera que $T_{2011} \leqslant 162410$.

   On a $2011 = 5 \times 402 + 1$ donc on peut découper le terrain en :
   $$\begin{cases} 402^2 \text{ carrés de taille } 5 \times 5 \\ 2 \times 402 \text{ rectangles de taille } 5 \times 1 \text{ ou } 1 \times 5 \\ 1 \text{ case restante.} \end{cases}$$

   ▷ On commence par tester successivement chacun des 402^2 carrés de taille 5×5 en fouillant en leur centre. Si le trésor est localisé sur un des carrés, il reste alors au plus 4 tentatives pour le déterrer, comme le montre les questions précédentes (et sans même tenir compte de l'information obtenue en le localisant). Au plus il faut $402^2 + 4$ tentatives dans ce cas.

   ▷ Si ceci a échoué, on teste successivement les 2×402 rectangles en fouillant en leur centre, et si le trésor est localisé on peut alors le déterrer en 2 tentatives supplémentaires. Au total il aura fallu au maximum $402^2 + 2 \times 402 + 2$ tentatives.

   ▷ Si tout ceci a échoué, le trésor est sur la dernière case et une tentative suffit, pour un total de $402^2 + 2 \times 402 + 1$ tentatives.

   Le nombre maximum de tentatives nécessaires avec cette stratégie est $402^2 + 2 \times 402 + 2 = 162410$.

7. Soit n un entier naturel non nul.

   Le même raisonnement qu'au début de la question précédente montre qu'on a $T_n \geqslant \dfrac{n^2}{25}$ et donc $\dfrac{1}{25} \leqslant \dfrac{T_n}{n^5}$.
   Notons p l'unique entier naturel vérifiant $5p \leqslant n \leqslant 5p+4$ (c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n}{5}$). On a alors $n^2 \leqslant (5p+4)^2 = 25p^2 + 40p + 16$ et on peut découper le terrain en p^2 carrés de taille 5×5 et un nombre de cases restantes valant au plus $40p + 16$. On imite alors la stratégie de la question précédente : on teste successivement les p^2 carrés en leur centre, et si cela échoue, on teste les cases restantes l'une après l'autre, soit au maximum $p^2 + 40p + 16$ tentatives.

   Cela montre que $T_n \leqslant p^2 + 40p + 16$ mais comme $p \leqslant \dfrac{n}{5}$ on obtient : $T_n \leqslant \dfrac{n^2}{25} + 8n + 16$. Finalement on a l'encadrement :
   $$\frac{1}{25} \leqslant \frac{T_n}{n^2} \leqslant \frac{1}{25} + \frac{8}{n} + \frac{16}{n^2}$$
   et donc $\dfrac{T_n}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{25}$ par le théorème des gendarmes.