SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CLERMONT-FERRAND

Classes de première S • 2016

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Clermont-Ferrand

Mercredi 16 mars de 8 heures à 12 heures 10

Pause de 10 heures à 10 heures 10.

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie **(« exercices académiques »**). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant **9 h 30**.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Si tous les jumeaux du monde…*) et 2 (*Chemins aléatoires paraboliques*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Si tous les jumeaux du monde…*) et 3 (*Fête foraine*).

Exercice académique numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

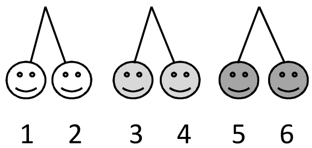
Si tous les jumeaux du monde voulaient se donner la main…

n paires d'enfants jumeaux, soit 2*n* enfants, se rassemblent, *n* étant un entier supérieur ou égal à 1. Chacun tient par une main son jumeau et, au hasard, de son autre main prend la main libre d'un enfant.

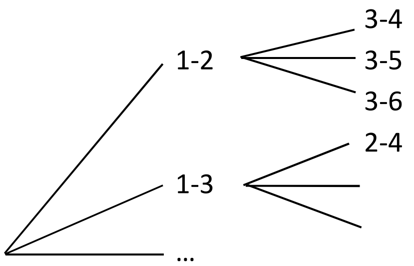
On s'intéresse à l'évènement E_n « obtenir une seule ronde constituée des 2*n* enfants ». Peu importe que ceux-ci soient tournés vers l'intérieur ou l'extérieur de la ronde.

Le problème consiste à déterminer la probabilité p_n de cet évènement.

1. Dans cette question $n = 1$. Que vaut la probabilité p_1 ?
2. Dans cette question $n = 2$. Montrer que la probabilité p_2 est égale à $\frac{2}{3}$.
3. Dans cette question $n = 3$.
   On modélise le problème en représentant les jumeaux comme l'indique le schéma ci-dessous.



   L'expérience consiste alors à associer les nombres deux par deux. Une issue sera notée, par exemple : $\omega = (1\text{-}4, 2\text{-}3, 5\text{-}6)$.
   a) L'issue ω ci-dessus est-elle favorable à l'évènement E_3 ?
   b) Expliquer pourquoi on peut se contenter de désigner ω par $e = (1\text{-}4, 2\text{-}3)$.
   c) Après avoir reproduit et complété l'arbre suivant, déterminer le nombre d'issues possibles ?



   d) Est-il vrai que $p_3 \geq 50\%$?

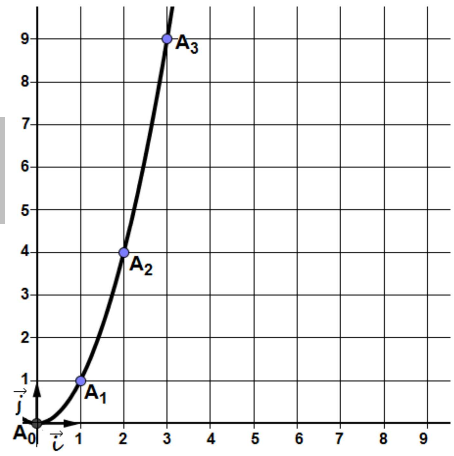
4. Dans cette question $n = 4$. Est-il vrai que $p_4 \geq 50\%$?

5. On admet que, pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = \frac{2n}{2n+1} p_n$.
   a) Retrouver avec cette formule les valeurs de p_2 et de p_3.
   b) Écrire un algorithme qui, un entier *n* supérieur ou égal à 1 étant donné, affiche p_n.
   c) Le programmer à la calculatrice. Est-il vrai qu'une valeur approchée à 10^{-2} près de p_{2016} est 2% ? Interpréter le résultat au vu du problème des jumeaux étudié.

Exercice académique numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Chemins aléatoires paraboliques

On considère $(A_0 ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point de coordonnées $(n ; n^2)$.



On se place sur l'origine du repère puis on parcourt un **chemin** de N **pas** ($N \geq 1$) de sorte que chacun d'eux soit effectué aléatoirement et de manière équiprobable vers la droite (noté **D**) ou vers le haut (noté **H**).

Par exemple si $N = 2$, on a :
- 4 **chemins** possibles : **DD**, **DH**, **HD** et **HH** ;
- 3 **arrivées** possibles : le point A_1, le point de coordonnées $(2 ; 0)$, ou celui de coordonnées $(0 ; 2)$.

Nous appellerons **chemin parabolique** tout chemin ayant comme arrivée un des points A_n (pour $n \geq 1$) et passant par tous les précédents, c'est-à-dire A_0, A_1, A_2, … et A_{n-1}.

Par exemple :
- **DH** est un chemin parabolique (on part de A_0 et on arrive en A_1) ;
- ainsi que **HDHHDH** (on part de A_0, on passe par A_1 et on arrive en A_2) ;
- tandis que **DD** et **HDHDD** ne sont pas des chemins paraboliques.

Partie A

1. Donner l'exemple d'une valeur de N pour laquelle il n'existe pas de chemin parabolique.
2. Donner toutes les valeurs de N comprises entre 1 et 100 pour lesquelles il existe au moins un chemin parabolique.
3. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il détermine s'il existe un chemin parabolique pour l'entier N saisi par l'utilisateur.

```
Variables : N,p (entiers)
Début
 | p prend la valeur 0
 | Saisir N
 | TantQue ................. < N
 | | p prend la valeur p + 1
 | FinTantQue
 | Si ................... = N
 | | Afficher « Il existe un chemin parabolique pour cette valeur de N »
 | Sinon
 | | Afficher « Il n'existe pas de chemin parabolique pour cette valeur de N »
 | FinSi
Fin
```

Partie B

Dans cette partie on suppose que $N = 20$.

1. Combien a-t-on d'arrivées possibles ?
2. Combien a-t-on de chemins possibles ?
3. Calculer la probabilité d'effectuer un chemin parabolique.

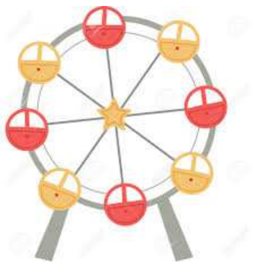
Partie C

Dans cette partie on suppose que l'on arrive en A_n (avec $n \geq 1$).

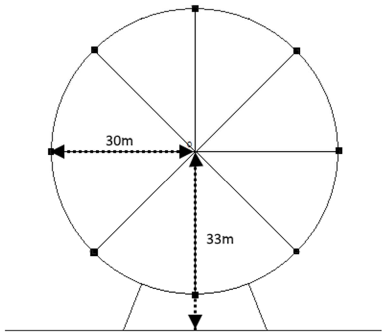
1. Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n d'effectuer un chemin parabolique.
2. Déterminer à l'aide d'un programme développé sur calculatrice, le plus petit entier naturel tel que $p_n < 10^{-50}$.
   On écrira le programme sur la copie, afin d'en laisser une trace.

Exercice académique numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que S)

Fête foraine



La grande roue à l'arrêt.



Une grande roue de 30 m de rayon compte 8 nacelles comme sur le dessin ci-contre : chaque nacelle sera assimilée à un point. La distance du sol au centre de la roue est de 33 m. Cette roue tourne à vitesse constante.

Un groupe d'adolescents décide de profiter de la vue dégagée et monte dans la nacelle du bas.

1) Quelle distance vont-ils parcourir en un tour ?
(On arrondira le résultat au dm près)

2) Sachant qu'une nacelle met 2 min pour revenir à son emplacement d'origine, quelle est sa vitesse en $m.s^{-1}$?
(On gardera 2 chiffres après la virgule)

3) a) Au bout de 45 s, à quelle hauteur du sol, arrondie au mètre, se situera la nacelle ?

b) Après 1 min et 10 s, à quelle hauteur du sol, arrondie au mètre, se situera la nacelle ?

4) L'un des adolescents est sujet au vertige à 60 m d'altitude. Pendant combien de temps, arrondi à la seconde près, en souffrira-t-il ?

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

CLERMONT-FERRAND 2016

Exercice 1 : Si tous les jumeaux du monde …

1. L'expérience a une seule issue, l'issue $(1-2)$: $p_1 = 1$.

2. L'expérience a trois issues équiprobables : $(1-2)$; $(1-3)$; $(1-4)$. Le cas $(1-2)$ correspond à deux rondes séparées de deux enfants, et les deux autres sont favorables à la réalisation de E_2. En conséquence $p_2 = \dfrac{2}{3}$

3.a. L'issue décrite correspond à deux rondes distinctes, l'une des enfants 1 à 4 et l'autre des enfants 5 et 6. Elle n'est pas favorable à E_3.

3.b. La connexion $(5-6)$ est une connexion obligée puisque aucune main d'un autre enfant de 1 à 4 n'est libre. Il est possible de sous-entendre cette connexion.

3.c. Les connexions possibles dans le cas de trois paires de jumeaux sont les suivantes ; seuls deux niveaux de connexions apparaissent puisque la dernière connexion est sous-entendue :

1-2	3-4	
	3-5	
	3-6	
1-3	2-4	
	2-5	appartient à E_3
	2-6	appartient à E_3
1-4	2-3	
	2-5	appartient à E_3
	2-6	appartient à E_3
1-5	2-3	appartient à E_3
	2-4	appartient à E_3
	2-6	
1-6	2-3	appartient à E_3
	2-4	appartient à E_3
	2-5	

3.d. On note 15 issues possibles dont 8 sont favorables à E_3 :

$$p_3 = \frac{8}{15} > 0{,}5 .$$

Il est vrai qu'avec trois paires de jumeaux il y a plus d'une chance sur deux de former une ronde complète.

4. Avec $n = 4$, il n'est plus possible de construite un arbre, le nombre d'issues est trop grand. Examinons ce qu'il se passe si on ajoute une paire de jumeaux à la situation précédente.

Il y a deux connexions supplémentaires possibles pour l'enfant numéro 1 (7 possibilités dont une ne réalise pas E_4, celle avec l'enfant numéro 2).

Il y a aussi deux connexions supplémentaires possibles pour chaque enfant du deuxième niveau (5 possibilités dont, pour chaque branche autre que la branche 1-2 déjà fermée, une ne réalise pas E_4). À ce niveau, nous avons $7 \times 5 = 35$ issues provisoires dont 6×4 peuvent encore réaliser E_4.

Il reste en prolongement de chacune des 35 issues provisoires quatre enfants à connecter, l'un d'entre eux avec un des trois autres. Il s'ajoute donc un troisième niveau avec trois nouvelles connexions possibles pour chacune des 35 issues provisoires. Pour chaque issue provisoire pouvant encore réaliser E_4, une des trois nouvelles connexions possibles se fait avec le jumeau d'un enfant déjà lié à un autre et ferme une ronde, ce qui ne réalise pas E_4.

À ce niveau, qui est définitif puisque la dernière connexion est obligée, nous avons $7 \times 5 \times 3 = 105$ issues dont $6 \times 4 \times 2 = 48$ réalisent E_4.

On en déduit : $p_4 = \dfrac{48}{105} = \dfrac{16}{35} < 0{,}5$

Il est faux de dire que $p_4 \geq 50\%$. Avec quatre paires de jumeaux, il y a moins d'une chance sur deux de former une seule ronde avec tous les enfants.

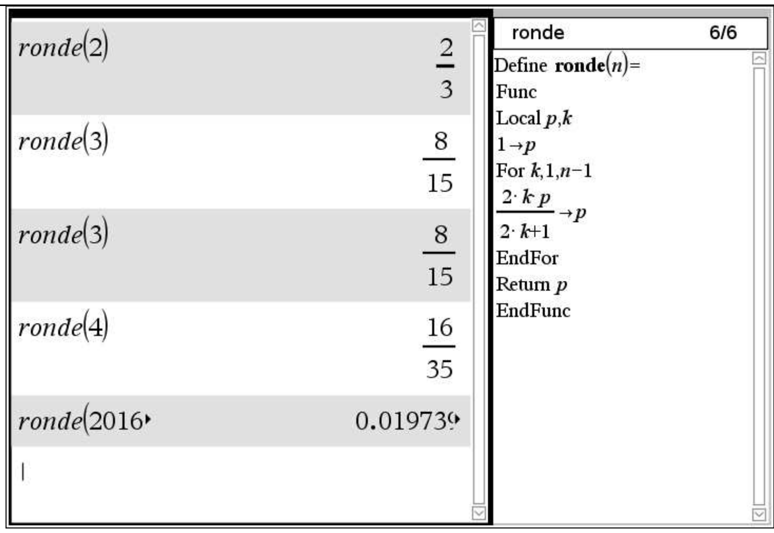
5a et b. La fonction **ronde** calcule la probabilité de former au hasard une ronde avec tous les enfants lorsqu'il y a n paires de jumeaux.

Nous reconnaissons des résultats déjà obtenus.

La calculatrice nous indique que $0{,}0197 < p_{2016} < 0{,}0198$.

Nous pouvons en déduire que :

$0{,}019 < p_{2016} < 0{,}02$.



5.c. Puisque la distance entre p_{2016} et 0,02 est inférieure à 10^{-3}, nous pouvons dire que 0,02 est une valeur approchée de p_{2016} à 10^{-3} près ou nous pouvons dire aussi que 2 % est une valeur approchée de p_{2016} à 0,1 % près. (La réponse 1,98 % à 0,01 % près est correcte mais paraît exagérément précise dans ce contexte).

En conclusion et en langage courant : « Si on réunit 2016 paires de jumeaux, il y a environ 2 chances sur cent de former au hasard une seule ronde complète avec les 4032 enfants ». Ce qui, au bout du compte, n'est pas si mal …

*NB. La formulation de la question **5.c** n'est pas satisfaisante. En effet « à 10^{-2} près » s'applique à un nombre et non à un pourcentage.*

Ou bien on donne une valeur approchée de la probabilité écrite sous forme de rapport et dans ce cas compte tenu de la faible valeur de p_{2016} on en donnera plutôt une valeur approchée à 10^{-3} près, ou bien on donne une valeur approchée de la probabilité écrite sous forme de pourcentage à un certain pourcentage près et en l'occurrence le plus judicieux est à 0,1 % près.

Exercice 2 : Chemins paraboliques

Partie A

1. Une condition nécessaire pour qu'il existe un chemin parabolique de N pas est que ce chemin aboutisse en un point $A_n\ \left(n,\ n^2\right)$ situé sur la parabole, c'est-à-dire qu'il existe un entier n vérifiant : $N = n + n^2$.

Par exemple, il n'existe pas de chemin parabolique comportant un pas, ou bien trois pas.

2. Un chemin à deux pas aboutit en A_1 en venant de A_0. On remarque que, de façon plus générale, on peut aboutir en A_n en venant de A_{n-1} en effectuant un pas vers la droite et $(2n-1)$ pas vers le haut. Ainsi, quelle que soit la valeur de l'entier naturel n, on peut construire un chemin parabolique aboutissant en A_n.

La condition « il existe un entier n vérifiant : $N = n + n^2$ » est suffisante pour qu'il existe un chemin parabolique comportant N pas.

Les valeurs de N pour lesquelles il existe un chemin parabolique comportant N pas sont exactement celles de la forme $n + n^2 = n(n+1)$ où n est un entier strictement positif. En particulier, les valeurs inférieures à 100 sont les suivantes : 2 ; $2\times3=6$; $3\times4=12$; $4\times5=20$; $5\times6=30$; $6\times7=42$; $7\times8=56$; $8\times9=72$; $9\times10=90$

3. Il faut écrire dans les pointillés le produit : $p(p+1)$ (ou, ce qui revient au même, la somme $p^2 + p$)

Partie B

1. Un chemin de 20 pas est composé de k pas vers la droite et de $20-k$ pas vers le haut, où k est un entier tel que $0 \le k \le 20$. Ce chemin aboutit au point de coordonnées $(k,\ 20-k)$ Il existe 21 points d'arrivée possibles.

2. Il se présente une alternative à chaque pas : ou bien un pas de type **D**, ou bien un pas de type **H**. Il y a donc $2^{20} = 1048576$ chemins différents.

3. Un chemin de 20 pas est parabolique s'il aboutit en A_4 en passant successivement par A_1, par A_2 et par A_3.

- Il existe 2 chemins allant de A_0 à A_1.
- Il existe 4 chemins allant de A_1 à A_2 (un tel chemin nécessite un pas à droite et trois vers le haut)
- Il existe 6 chemins allant de A_2 à A_3 (un tel chemin nécessite un pas à droite et cinq vers le haut).
- Il existe 8 chemins allant de A_3 à A_4 (un tel chemin nécessite un pas à droite et sept vers le haut).

Il existe donc $2\times4\times6\times8 = 384$ chemins paraboliques de 20 pas.

La probabilité qu'un chemin de 20 pas soit parabolique est $\dfrac{384}{2^{20}}$ soit $\dfrac{3}{8192}$

Partie C

Dans cette partie, on considère un chemin aboutissant en A_n. Ce point ayant pour coordonnées $(n,\ n^2)$, un chemin aboutissant en A_n se compose de n pas vers la droite et de n^2 pas vers le haut.

Le nombre de ces chemins est le nombre de façons de combiner les n pas vers la droite parmi le total $n(n+1)=n^2+n$ de pas nécessaires. Il s'agit du nombre de combinaisons $\binom{n^2+n}{n}$ c'est-à-dire $\dfrac{(n^2+n)!}{n!\times(n^2)!}$.

Il existe 2^{n^2+n} chemins comportant $n(n+1)=n^2+n$ pas.

De façon générale, le point A_{n-1} ayant pour coordonnées $\left(n-1\ ;\ (n-1)^2=n^2-2n+1\right)$ et le point A_n ayant pour coordonnées $(n,\ n^2)$, il faut un chemin de $2n$ pas, un pas vers la droite et $(2n-1)$ pas vers le haut pour atteindre A_n depuis A_{n-1}. Il existe $2n$ chemins différents reliant les deux points.

Un chemin parabolique aboutissant en A_n devant passer par les points $A_1,\ldots,A_{n-1}$, il existe $2\times4\times\ldots\times2n$ tels chemins. Soit $2^n\times n!$ chemins

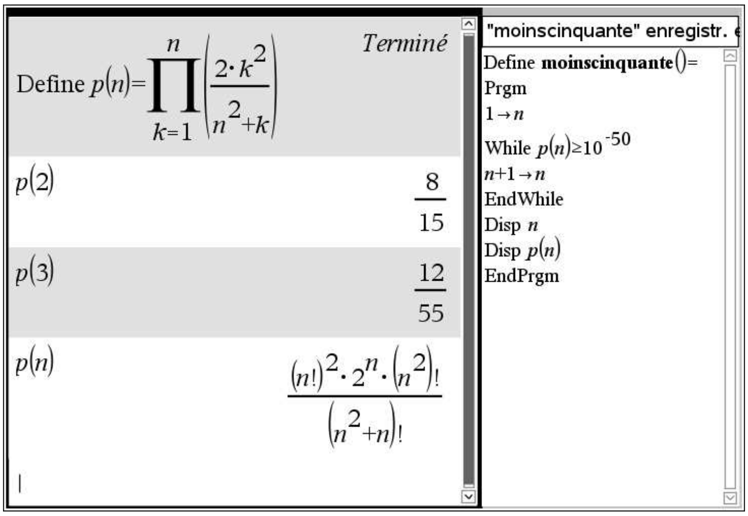
La probabilité qu'un chemin aboutissant en A_n soit parabolique est le quotient $\dfrac{2^n\times n!}{\binom{n^2+n}{n}}$, c'est-à-dire

$p_n=\dfrac{2^n\times(n!)^2\times\left[(n^2)!\right]}{(n^2+n)!}$, ou encore : $p_n=\dfrac{2^n\times n^2\times(n-1)^2\times\ldots\times2^2}{(n^2+n)\times(n^2+n-1)\ldots(n^2+2)(n^2+1)}$.

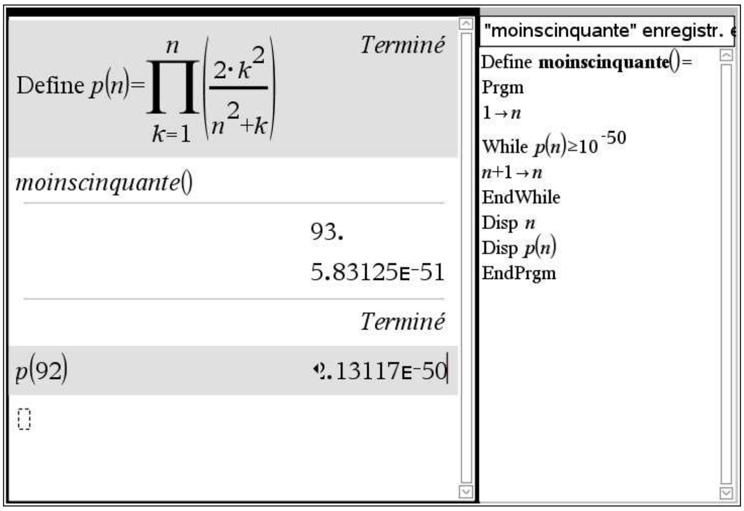
Pour faciliter un calcul automatique, cette probabilité peut s'écrire sous forme d'un produit : $p_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2k^2}{n^2+k}\right)$

NB. La notation « Pi », symbolisée par $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\ldots..)$, désigne le produit des termes inscrits dans la parenthèse, pour les valeurs de la parenthèse allant de $k=1$ jusqu'à $k=n$. Elle est analogue à la notation « sigma » qui symbolise, quant à elle, une somme de termes.

Ci-contre, la définition de la probabilité p_n en fonction de l'entier n et ses premières valeurs.



La calculatrice affiche 93 comme plus petite valeur pour laquelle $p_n < 10^{-50}$.



On que note la probabilité demandée dans cette partie n'est pas du même type que celle demandée dans la partie B. Dans la partie B la question était « quelle est la probabilité qu'un chemin de 20 pas soit parabolique » ; ici la question est « quelle est la probabilité qu'un chemin aboutissant en A_n soit parabolique ». L'univers de référence n'est pas de même nature.

À titre d'exemple, six pas sont nécessaires pour atteindre $A_2\,(2,\ 4)$.

Il y a $2^6 = 64$ chemins de six pas. Un seul aboutit au point $(6,\ 0)$ et un seul au point $(0,\ 6)$, 6 aboutissent au point $(5,\ 1)$ et 6 autres au point $(1,\ 5)$, $\binom{6}{2} = 15$ aboutissent au point $(4,\ 2)$ et 15 autres au point $A_2\,(2,\ 4)$ et enfin $\binom{6}{3} = 20$ aboutissent au point $(3,\ 3)$. Nous avons bien : $1+6+15+20+15+6+1 = 64$ chemins de six pas et la probabilité qu'un chemin de six pas aboutisse en A_2 est égale à $\frac{15}{64}$

Parmi les 15 chemins aboutissant en A_2, seuls sont paraboliques ceux qui passent par A_1 et nous avons vu qu'il y en a $2\times 4 = 8$.

La probabilité qu'un chemin de six pas soit parabolique est égale à $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$.

La probabilité qu'un chemin qui aboutit en A_2 soit parabolique est $\frac{8}{15}$.

De même, douze pas sont nécessaires pour atteindre $A_3\,(3,\ 9)$. Il y a $2^{12} = 4096$ chemins de douze pas. Parmi eux, $\binom{12}{3} = 220$ aboutissent en A_3 dont $2\times 4\times 6 = 48$ sont paraboliques.

La probabilité qu'un chemin de douze pas soit parabolique est : $\frac{48}{4096} = \frac{3}{256}$ et la probabilité qu'un chemin qui aboutit en A_3 soit parabolique est $\frac{48}{220} = \frac{12}{55}$ (résultat que la calculatrice a effectivement affiché).