SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CLERMONT-FERRAND

Classes de première S • 2015

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Clermont-Ferrand

Mercredi 18 mars 2015 de 8 heures à 12 heures

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices indépendants, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

Le quatrième exercice est distinct suivant la série du candidat : lire attentivement la consigne.

Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 2 heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

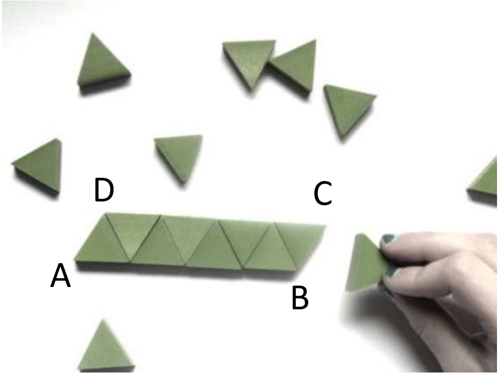
Exercice numéro 1

(proposé par le jury national)

Défi entre sœurs

Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïques en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.
Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

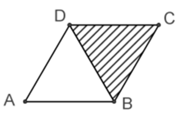
- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].



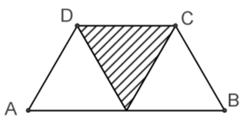
Partie A

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

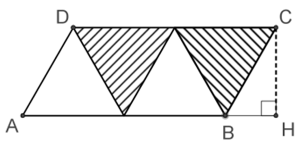
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



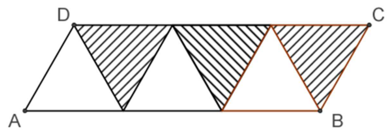
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.

2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?

3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »

2e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?

3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?

4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$.
Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.

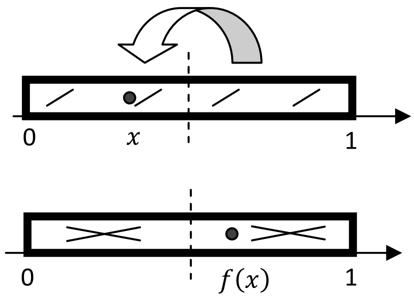
5. Clémence dit à sa sœur : « Sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

Exercice numéro 2

(proposé par le jury national)

On est les rois !

Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.



Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de $[0\,;1]$ appartient à $[0\,;1]$.
2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0\,;1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? l'abscisse 0,33 ? Commenter.
2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.
3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.
4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il sa cible ?
5. Déterminer tous les nombres de $[0\,;1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint sa cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** à la fin du sujet, afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouvel algorithme sur sa copie).
2. D'après les questions **B.5**. ou même **B.2.**, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

Exercice numéro 3
(proposé par le jury académique)

Nombres chanceux d'Euler

Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 300 :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293.

Partie A

1. Pourquoi 1 n'est-il pas un nombre premier ?
2. Pourquoi 2 est-il le seul nombre pair premier ?

Partie B

On considère l'algorithme suivant :

> Choisir un entier naturel
> L'élever au carré
> Ajouter au résultat le nombre de départ
> Lui ajouter 11
> Afficher le résultat obtenu.

1. a) Qu'affiche l'algorithme si le nombre choisi est 20 ?
   b) Qu'affiche l'algorithme si le nombre choisi est n ?

2. a) Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 1417 ?
   b) L'algorithme peut-il afficher le nombre 100 ?

3. a) Vérifier que si on choisit un entier naturel compris entre 0 et 9, alors le résultat affiché est un nombre premier.
   b) Si on choisit un entier naturel quelconque, le résultat affiché est-il toujours un nombre premier ?

Partie C

On appelle « **nombre chanceux d'Euler** », un nombre entier c ($c \geq 2$) tel que, pour tout entier n compris entre 0 et $c-2$, n^2+n+c soit un nombre premier.

1. Déterminer les nombres chanceux d'Euler inférieurs à 11.

2. a) Olympe affirme : « Si c est un nombre chanceux d'Euler alors c est un nombre premier ». Son affirmation est-elle vraie ou fausse ?
   b) Enoncer la réciproque de l'implication précédente : cette réciproque est-elle vraie ?

3. Il a été prouvé en 1967 qu'il existe exactement six nombres chanceux d'Euler. Sachant que le plus grand est 41, quels sont ces six nombres ?

Exercice numéro 4

(proposé par le jury académique)

Petits cadeaux entre amis

Cet exercice est réservé aux candidats de la série S

Voici une méthode assez classique pour organiser un échange de cadeaux au sein d'un groupe d'amis : on écrit le nom de chacun sur un petit papier, puis chaque participant tire un petit papier pour connaître l'identité de la personne à qui il sera chargé de faire un cadeau (le budget étant fixé à l'avance). Cette méthode, qu'on appellera ici « la méthode des petits papiers », présente au moins deux intérêts :

- personne n'est oublié ou lésé ;
- les dépenses de chacun restent limitées, car il n'a qu'un cadeau à faire.

Bien entendu, il se peut qu'au moins l'un des participants découvre son propre nom sur son petit papier. Dans ce cas, le tirage est déclaré ***invalide*** et l'on procède à un nouveau tirage.

Partie I : cas de trois amis

Pour un tel groupe d'amis, nommés A, B et C, le résultat d'un tirage peut-être présenté sous la forme d'un tableau à deux lignes et trois colonnes, où la première ligne contient les noms des participants et la deuxième ligne, le nom de la personne à qui ce participant devra faire un cadeau.

Par exemple, le tableau donné ci-dessous indique que A doit faire un cadeau à C, que B doit faire un cadeau à A et que C doit faire un cadeau à B.

A	B	C
C	A	B

Remarquons que, si l'ordre des participants a été clairement indiqué, on peut même se passer de la première ligne du tableau. Dans notre exemple, on se contentera de noter : CAB.

1. Faire la liste de tous les tirages possibles dans un groupe de trois amis.

2. Préciser ceux qui sont valides.

3. En déduire la probabilité d'obtenir un tirage valide dans ce cas.

Partie II : cas de quatre amis

En procédant comme dans la partie I, déterminer la probabilité pour un groupe de quatre amis d'obtenir un tirage valide.

Partie III : une relation fondamentale

Dans la suite du problème, on notera V_m le nombre de tirages valides pour un groupe de m amis (m étant un entier supérieur ou égal à 1).

Le groupe d'amis considéré est constitué de Paul, Julie et n autres personnes (avec $n \geq 1$). Secrètement épris de Julie, Paul aimerait être celui qui lui fera un cadeau.

1. Quelle est la probabilité que ce soit le cas ?

2. Montrer qu'il y a V_n tirages valides pour lesquels Paul et Julie se font mutuellement un cadeau.

3. On admettra par ailleurs qu'il y a V_{n+1} tirages valides pour lesquels Paul fait un cadeau à Julie sans que cela soit réciproque. En déduire le nombre de tirages valides pour lesquels Paul fait un cadeau à Julie.

4. Justifier l'égalité suivante :

$$\frac{V_n + V_{n+1}}{V_{n+2}} = \frac{1}{n+1}$$

<u>Partie IV : obtention de V_n</u>

1. Donner V_1 et V_2 en justifiant chaque réponse.

2. La question 4 de la partie III permet d'affirmer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $V_{n+2} = (n+1)(V_n + V_{n+1})$. En utilisant cette relation, retrouver les nombres V_3 et V_4 rencontrés dans les parties I et II.

3. Déterminer V_5.

4. La feuille de calcul suivante a été réalisée avec un tableur.

   Quelle formule faut-il écrire dans la cellule B4, après avoir complété les cellules B2 et B3, pour obtenir par recopie vers le bas les différentes valeurs de V_n pour $n \geq 3$?

	A	B
1	n	Vn
2	1	
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	

5. Rédiger un algorithme permettant d'obtenir V_n pour une valeur de n (supérieure ou égale à 3) précisée par l'utilisateur.

<u>Partie V : application dans le cas d'un groupe de huit amis</u>

Pour les fêtes de fin d'année, huit amis ont décidé de s'offrir des cadeaux par la méthode « des petits papiers ».

1. Montrer que l'arrondi à 10^{-2} de la probabilité qu'un tirage soit valide est 0,37.

2. En utilisant cette valeur approchée, calculer la probabilité que deux tirages soient nécessaires et suffisants pour obtenir un tirage valide. *On donnera un résultat arrondi à* 10^{-2}.

3. Est-il vrai que la probabilité qu'au moins quatre tirages soient nécessaires est proche de $\frac{1}{4}$? Justifier.

Exercice numéro 4

(proposé par le jury académique)

Que de six !

Cet exercice est réservé aux candidats des séries L, ES, STD2A, STI2D, STL, STMG et ST2S

1. Jules a simplifié la fraction $\frac{65}{66}$. Il explique à Julie : « c'est facile : je barre les 6 et j'obtiens $\frac{5}{6}$ ».
   a) Le résultat est-il correct ?
   b) Que pensez-vous de la démarche utilisée ?

2. a) Prouver que, pour tous nombres réels a, b, c et d non nuls vérifiant la condition $b + d \neq 0$:

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ alors } \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

   b) En utilisant a) et en remarquant que $665 = 10 \times 65 + 15$ et que $266 = 10 \times 26 + 6$, montrer que $\frac{665}{266} = \frac{5}{2}$.

3. Julie affirme : « j'en déduis que $\frac{66665}{26666} = \frac{5}{2}$ ». Expliquer sa démarche.

4. On admet, dans le cas général, que l'égalité $\frac{66\ldots65}{26\ldots66} = \frac{5}{2}$ est vraie, le numérateur et le dénominateur de la première fraction comportant *n* fois le chiffre 6, *n* étant un entier naturel non nul.
   Jules annonce alors à Julie : « en utilisant ce qui précède, je peux te donner mentalement le quotient et le reste de la division euclidienne de 66 ... 65 par 26 ... 66, chacun des deux nombres comportant 2015 fois le chiffre 6 ». Est-ce vraisemblable ?

Exercice numéro 2 : annexe

Variables
    x est un élément de $[0\,;1]$
Début
    Saisir le nombre x compris entre 0 et 1
    Tant que $x \neq 0$ **faire**
        Si $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**
            x **prend la valeur** $2\,x$
        Sinon
            x **prend la valeur** $2(1 - x)$
    Fin tant que
Fin

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

CLERMONT-FERRAND 2015

Exercice 3 : Nombres chanceux d'Euler

Partie A

1. 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur et non deux diviseurs.

2. L'entier 2 a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même, donc 2 est un nombre premier. Tout nombre pair autre que 2 a au moins trois diviseurs : 1, 2 et lui-même. Donc, tout nombre pair autre que 2 est un entier non premier. 2 est l'unique nombre pair premier.

Partie B

1.a. L'algorithme élève 20 au carré, il obtient 400. Il ajoute au résultat le nombre de départ, il obtient 420. Il ajoute 11 au résultat obtenu, il obtient 431.
L'algorithme affiche 431.

1.b. L'algorithme élève l'entier naturel n au carré, il obtient n^2. Il ajoute au résultat le nombre de départ, il obtient n^2+n. Il ajoute 11 au résultat obtenu, il obtient n^2+n+11.
L'algorithme affiche n^2+n+11.

2.a. L'algorithme affiche 1417 si et seulement s'il existe un entier naturel n vérifiant : $n^2+n+11=1417$.

Si un tel entier naturel existe, il est solution de l'équation au deuxième degré : $n^2+n-1406=0$ **(1)**.
Le discriminant de cette équation est égal à 5625, qui est le carré de 75. L'équation **(1)** admet deux solutions qui sont des nombres entiers : $n_1=\dfrac{-1+75}{2}=37$ et $n_2=\dfrac{-1-75}{2}=-38$.
Une seule des deux solutions de l'équation **(1)** est un entier naturel, la solution $n_1=37$.
Pour obtenir 1417, il faut choisir le nombre 37.

2.b. L'algorithme affiche 100 si et seulement s'il existe un entier naturel n vérifiant : $n^2+n+11=100$.

Si un tel entier naturel existe, il est solution de l'équation au deuxième degré : $n^2+n-89=0$ **(2)**.
Le discriminant de cette équation est égal à 357, qui n'est pas le carré d'un nombre entier. Aucune des deux solutions de l'équation **(2)** n'est un nombre entier.
L'algorithme ne peut pas afficher le nombre 100.

3.a. L'algorithme est exécuté ci-contre par un tableur, la colonne **C** du tableur étant un test de primalité.

Ce test certifie que, si on choisit un entier quelconque de 0 à 9, l'algorithme affiche toujours un nombre premier.

3.b. En revanche, si on choisit 10, l'algorithme affiche 121 qui n'est pas premier.

Le résultat affiché n'est pas toujours un nombre premier.

NB. On remarque que si on choisit 11 l'algorithme n'affichera pas non plus un nombre premier : il affichera $11^2+11+11$, qui est divisible par 11.

	A num	B algo	C	D	E
=	=seq(n,n,0,15)	=num^2+num+11	=seq(isprime(algo[k]))		
1	0	11	true		
2	1	13	true		
3	2	17	true		
4	3	23	true		
5	4	31	true		
6	5	41	true		
7	6	53	true		
8	7	67	true		
9	8	83	true		
10	9	101	true		
11	10	121	false		

Partie C

La partie B a montré que 11 est un exemple de nombre chanceux puisque les dix premiers entiers affichés ci-dessus par l'algorithme de la partie B sont premiers.

Supposons que le nombre c est fixé. En substituant dans cet algorithme l'entier c à l'entier 11, on obtient un nouvel algorithme qui renvoie pour toute valeur de n le nombre n^2+n^2+c.

1. On note que, lorsque l'on choisit pour n l'entier zéro, le nombre affiché par ce nouvel algorithme est le nombre 0^2+0+c, c'est-à-dire l'entier c lui-même.

De ce fait, les entiers non premiers 4, 6, 8, 9 et 10 ne sont pas des nombres chanceux car, pour $c=4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10$, l'entier 0^2+0+c n'est pas premier.

Il reste à examiner le cas des autres nombres c, celui des nombres premiers inférieurs à 11.

- Lorsque $c=2$, il y a un seul cas à examiner, le choix $n=0$. Le nombre $0^2+0+c=2$ est un nombre premier, l'entier 2 est un nombre chanceux.
- Lorsque $c=3$, il y a un deux cas à examiner, les choix $n=0$ et $n=1$. Les nombres $0^2+0+3=3$ et $1^2+1+3=5$ sont tous deux des nombres premiers, l'entier 3 est un nombre chanceux.
- Lorsque $c=5$, il y a quatre cas à examiner, les choix $n=0$, $n=1$, $n=2$ et $n=3$. Les nombres $0^2+0+5=5$, $1^2+1+5=7$, $2^2+2+5=11$ sont tous des nombres premiers, l'entier 5 est un nombre chanceux.
- Lorsque $c=7$, il y a six cas à examiner, les choix $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ et $n=5$. Le nombre $0^2+0+7=7$ est premier mais $1^2+1+7=9$ ne l'est pas. Il est désormais inutile d'examiner les autres choix de l'entier n, l'entier 7 n'est pas un nombre chanceux.

Les entiers chanceux inférieurs ou égaux à 11 sont 2, 3, 5 et 11.

2.a. L'affirmation d'Olympe est fausse, nous venons de trouver un contre-exemple, un entier premier qui n'est pas un nombre chanceux, le nombre premier 7.

On appelle « contre-exemple » ce qui **ne vérifie pas** une propriété donnée. La mise en évidence d'un contre-exemple permet de démontrer qu'une affirmation du type « quel que soit … » est fausse.

2.b. Un énoncé recevable de la réciproque de l'affirmation d'Olympe est celui-ci : « Quel que soit l'entier c non premier, ce n'est pas un nombre chanceux ».

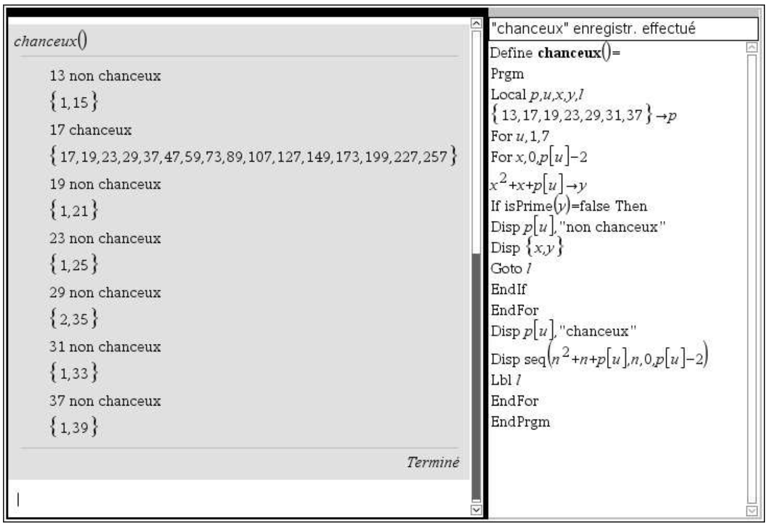
Cette réciproque est vraie : pour tout entier c non premier, le choix $n = 0$ provoque l'affichage de l'entier $0^2 + 0 + c = c$ qui est non premier : pour au moins un entier compris entre 0 et $c - 2$, l'entier $n^2 + n + c$ n'est pas un nombre premier, donc c n'est pas un nombre chanceux.

3. Nous avons débusqué quatre nombres chanceux et avec 41, cela fait cinq. Il en reste donc un à trouver. Nécessairement, c'est un des nombres premiers compris entre 11 et 41. Nous pouvons les tester un par un et nous arrêter dès que nous aurons trouvé un nombre chanceux.

Le programme **chanceux** automatise la recherche du sixième nombre chanceux. En outre (ce qui est facultatif à partir du moment où 17 est reconnu comme chanceux), il indique pourquoi les autres nombres premiers candidats ne sont pas des nombres chanceux en affichant le choix n qui provoque l'affichage d'un nombre non premier.

Par exemple, pour $c = 13$, le choix $n = 1$ provoque l'affichage du nombre 15, non premier.

En revanche, lorsque $c = 17$, le programme fournit la liste des seize nombres premiers que l'on obtient pour tous les choix de l'entier n tel que $0 \le n \le 15$.



Les nombres chanceux sont 2, 3, 5, 11, 17 et 41.

Exercice 4 : Petits cadeaux entre amis

On appelle « dérangement » une permutation d'un ensemble de n éléments telle qu'aucun des n éléments n'a pour image lui-même, c'est-à-dire une permutation qui n'a aucun point fixe.

Cet exercice est une occasion d'aborder l'étude de ces « dérangements » dans un contexte ludique. Un « tirage valide » n'est autre qu'un « dérangement ». Nous verrons notamment quels sont les dérangements d'un ensemble de trois éléments puis de quatre éléments, et nous dénombrerons les dérangements d'un ensemble de huit éléments.

Partie I : Cas de trois amis

1. Il y a six tirages possibles symbolisés par des « mots » de trois lettres qui sont les mots ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

2. Parmi ces six tirages, deux exactement sont valides, les tirages BCA et CAB (il faut que A ne soit pas la première lettre, B ne soit pas la deuxième lettre et C ne soit pas la troisième lettre du mot).

3. La probabilité qu'un tirage soit valide est $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Partie II : Cas de quatre amis

Le nombre de façons de permuter quatre lettres est la factorielle de 4, le nombre $4!=4\times3\times2\times1=24$.
Il y a donc 24 tirages possibles correspondant à des « mots » de quatre lettres que l'on peut, par exemple, ordonner de la façon indiquée ci-dessous. Les mots grisés sont les mots invalides (au moins une lettre est restée à sa place dans le mot). Nous sommes amenés à griser 15 des 24 mots.

A en premier				A en deuxième				A en troisième				A en quatrième			
A	B	C	D	B	A	C	D	B	C	A	D	B	C	D	A
A	B	D	C	B	A	D	C	B	D	A	C	B	D	C	A
A	C	B	D	C	A	B	D	C	B	A	D	C	B	D	A
A	C	D	B	C	A	D	B	C	D	A	B	C	D	B	A
A	D	B	C	D	A	B	C	D	B	A	C	D	B	C	A
A	D	C	B	D	A	C	B	D	C	A	B	D	C	B	A

9 tirages sont valides, la probabilité pour un groupe de quatre amis d'obtenir un tirage valide est $\frac{9}{24}$

Partie III : Une relation fondamentale

1. Il y a en tout $n+2$ personnes (Paul y compris) mais pour que le tirage soit valide, Paul doit faire un cadeau à l'une des $n+1$ personnes autres que lui-même. Julie est l'une de ces $n+1$ personnes. La probabilité, sachant que le tirage est valide, que Paul fasse un cadeau à Julie est égale à $\frac{1}{n+1}$.

2. Sachant que Paul et Julie se font mutuellement un cadeau, le tirage est valide si et seulement la restriction du tirage aux n autres personnes est un tirage valide entre ces n personnes. Il y a V_n tirages de ce type.

3. NB. *Notons $\{P, J, X_1, X_2, ..., X_n\}$ le groupe d'amis. On suppose que Paul fait un cadeau à Julie sans que cela soit réciproque. Cela signifie que les papiers écrits par le groupe $\{M_1 = J, M_2 = X_1, ..., M_{n+1} = X_n\}$ sont attribués au groupe $\{M'_1 = P, M_2 = X_1, ..., M_{n+1} = X_n\}$ sans qu'un seul indice ne soit laissé invariant. Ces groupes sont composés de $(n+1)$ personnes. C'est pourquoi il y a V_{n+1} tirages valides tels que Paul fait un cadeau à Julie sans que cela soit réciproque (propriété admise dans l'énoncé, il n'y a pas lieu de la justifier).*

Le nombre de tirages valides dans lesquels Paul fait un cadeau à Julie est la somme des nombres de tirages valides dans lesquels que Paul et Julie se font mutuellement un cadeau et de tirages valides dans lesquels Paul fait un cadeau à Julie sans que cela soit réciproque. Ce nombre est donc $V_n + V_{n+1}$

4. Considérons la probabilité conditionnelle : « sachant que le tirage est valide, Paul fait un cadeau à Julie ».

Cette probabilité peut se calculer de deux façons :

- Ou bien avec la méthode de la **question 1**, où l'on a trouvé $\dfrac{1}{n+1}$
- Ou bien en considérant le rapport $\dfrac{V_{n+1} + V_n}{V_{n+2}}$ du nombre de tirages valides dans lesquels Paul fait un cadeau à Julie au nombre total de tirages valides entre les $n+2$ amis.

Les deux méthodes doivent donner un même résultat : $\dfrac{V_{n+1} + V_n}{V_{n+2}} = \dfrac{1}{n+1}$

Partie IV : Obtention de V_n

1. $V_1 = 0$ (il y a un seul tirage qui est invalide) et $V_2 = 1$ (s'il y a deux personnes, ou bien ils échangent leurs cadeaux, ou bien chacun garde le sien, il y a deux tirages dont un seul est valide).

2. En utilisant la relation de récurrence : $V_3 = 2(V_2 + V_1) = 2$ puis $V_4 = 3(V_3 + V_2) = 3(2+1) = 9$

3. Toujours en utilisant la relation de récurrence : $V_5 = 4(V_4 + V_3) = 4\ (9+2) = 44$

4. Compte tenu de la numérotation des lignes de la feuille de calcul, V_n est inscrit dans la cellule **B(n+1)**, V_{n+1} est inscrit dans la cellule **B(n+2)**, et $(n+1)$ est inscrit dans la cellule **A(n+2)**. Pour obtenir V_3 il faut inscrire dans la cellule **B4** la formule : **(B3+B2)*A3**.

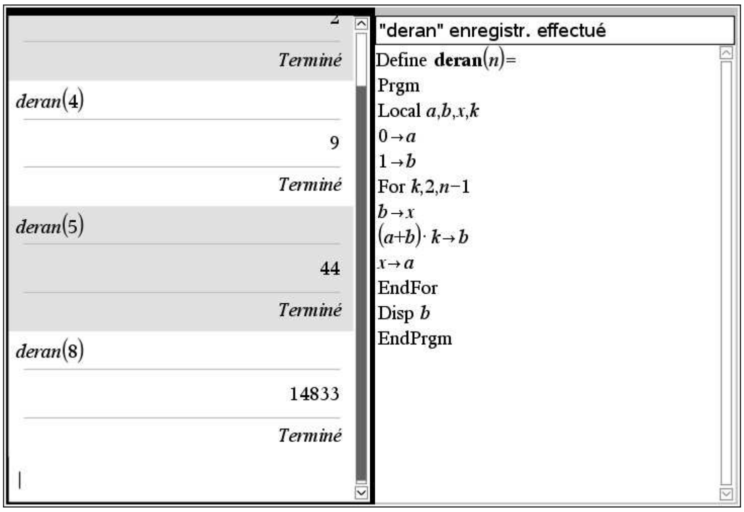
Le programme **deran** calcule, pour une valeur de n donnée, le nombre V_n.

Les variables **a** et **b** sont initialisées par 0 et par 1.

La valeur courante de **b** est stockée dans une variable d'attente **x**.

La relation de récurrence permet de calculer la nouvelle valeur de **b** et la variable d'attente **x** est envoyée en **a**.

L'algorithme s'exécute jusqu'à l'obtention de V_n.



Partie V : Application dans le cas d'un groupe de huit amis

1. L'algorithme de la **partie IV** établit que $V_8 = 14833$. Or, le nombre total de façons de distribuer huit « petits papiers » aux membres d'un groupe de huit personnes est égal au nombre de permutations de ces huit personnes, ce nombre est la factorielle de huit, c'est-à-dire : $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$.
La probabilité p, dans le cas d'un groupe de huit amis, qu'un tirage soit valide est $p = \dfrac{14833}{40320}$ (soit $p = \dfrac{2119}{5760}$ sous forme de fraction irréductible).

Une calculatrice indique que $0{,}367 < \dfrac{14833}{40320} < 0{,}368$. L'arrondi d'un nombre réel x au centième (ou à 10^{-2}) est le nombre décimal d tel que $100d$ est un entier et que $d - 0{,}005 < x \leq d + 0{,}005$.

Il est donc vrai que l'arrondi à 10^{-2} près de cette probabilité p est 0,37.

2. Deux tirages sont nécessaires et suffisants pour que le tirage soit valide si et seulement si le premier tirage est invalide (il est *nécessaire* d'en faire au moins un deuxième) et le deuxième est valide (ce deuxième tirage est *suffisant*).
La probabilité qu'un tirage soit valide est égale à p et la probabilité de l'évènement contraire (tirage invalide) est égale à $1 - p$. Donc, ces tirages étant indépendants, la probabilité d'obtenir un tirage invalide suivi d'un tirage valide est égale au produit : $(1 - p) \times p$.

L'énoncé préconisant d'utiliser dans les calculs la valeur de p arrondie à 10^{-2}, la réponse attendue est $(1 - 0{,}37) \times 0{,}37 = 0{,}63 \times 0{,}37 = 0{,}2331$ dont l'arrondi à 10^{-2} près est 0,23.

3. Au moins quatre tirages sont nécessaires si et seulement si les trois premiers tirages sont invalides. La probabilité que les trois premiers tirages soient invalides est égale à $(1 - p)^3$.

En tenant compte de la valeur arrondie à 10^{-2} de p, la valeur arrondie de $1 - p$ à 10^{-2} est : $1 - p \approx 0{,}63$
La réponse attendue est $0{,}63^3 = 0{,}250047$, que l'on arrondit à 0,25. Il est vrai que la probabilité qu'au moins quatre tirages soient nécessaires est proche de $\dfrac{1}{4}$ car l'arrondi de cette probabilité à 10^{-2} près est 0,25 c'est-à-dire $\dfrac{1}{4}$, sous forme de fraction irréductible.

NB. Lorsqu'on dispose d'une calculatrice, la procédure généralement conseillée dans ce genre de situation est de mettre en mémoire la valeur exacte de p, d'effectuer les calculs avec cette valeur mise en mémoire et d'effectuer l'arrondi seulement lorsqu'on dispose du résultat final. Cette procédure conseillée minimise le cumul des erreurs dues aux arrondis.

On constate une légère différence suivant que le calcul de cette probabilité est effectué en utilisant d'emblée l'arrondi 0,37 (procédure préconisée par l'énoncé et que nous avons suivie) ou que ce calcul est effectué avec p mis en mémoire : les arrondis à 10^{-3} près ne sont pas les mêmes, respectivement 0,253 et 0,250.

Cependant, dans les deux cas, l'arrondi à 10^{-2} est 0,25, cette différence de procédure n'influencerait pas la réponse à la question posée.