

www.freemaths.fr

SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
ACADÉMIE DE CLERMONT-FERRAND
Classes de première S • 2014



OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Classes de premières (série S)

Concours 2014



Mercredi 19 Mars 2014

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.



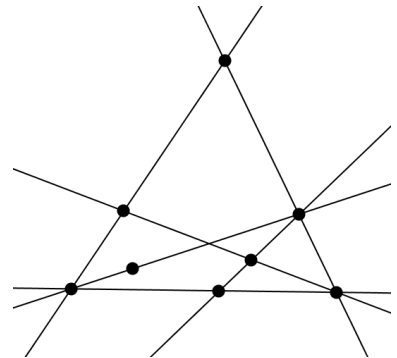
Les quatre exercices sont à traiter. Les candidats sont invités à faire figurer sur les copies les résultats, même partiels, auxquels ils sont parvenus et les idées qui leur sont venues.

Exercice numéro 1 : figures équilibrées

La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).

Elle possède la propriété suivante :

Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.



Une figure vérifiant cette propriété est dite *équilibrée*.

1. Construire une figure équilibrée constituée :

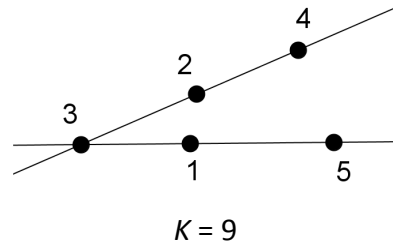
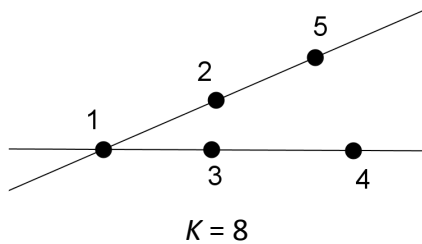
- a. de 7 points marqués et 5 droites ;
- b. de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p .

Cette numérotation est alors dite *magique* s'il existe un entier K , tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K .

Cet entier K est appelé *constante magique* de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



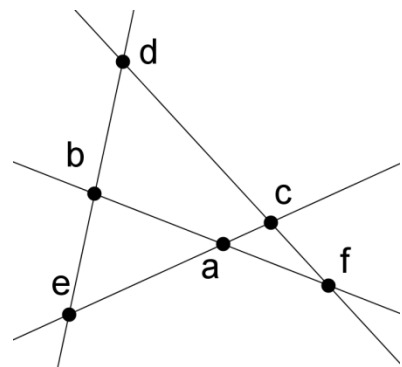
Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.

Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.

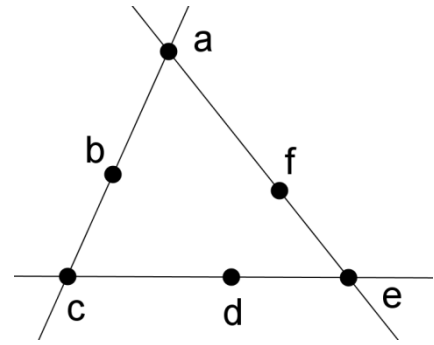
- a. Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K , alors $4 \times K = 42$.
- b. Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?

Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.



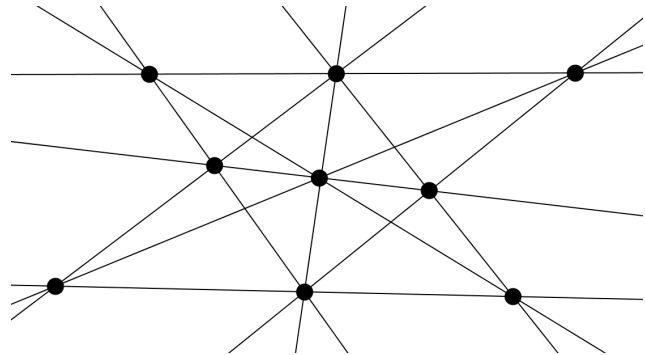
4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.

- Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.
- Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K , alors $a + c + e = 3(K - 7)$.
- Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.



5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.

Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



Exercice numéro 2 : le plus court possible

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.

La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.

« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.

« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

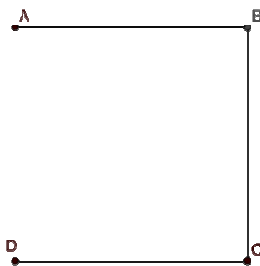


fig. 1
Assistant n°1

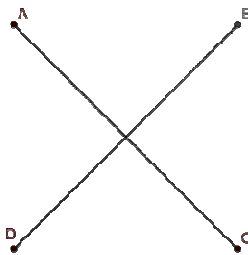


fig. 2
Assistant n°2

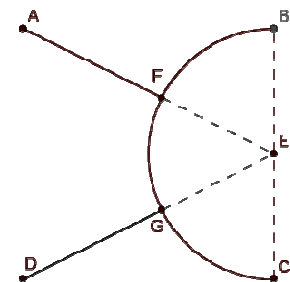


fig. 3
Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?
2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :

« On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

Si $EF = 20$ km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

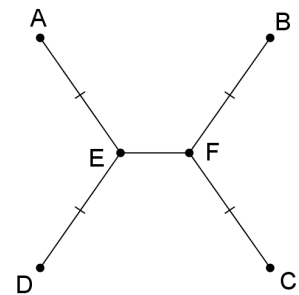


fig. 4

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :

Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :

on a toujours $AB + BC \geq AC$;

on a l'égalité $AB + BC = AC$ si, et seulement si, B appartient au segment $[AC]$.

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B , la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment $[AB]$ (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.

On admettra qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100 km de côté, comme dans le dessin suivant.

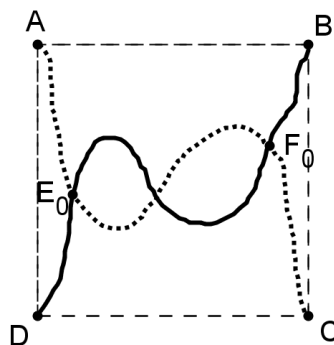


fig. 5

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (fig. 5).

Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (fig. 6).

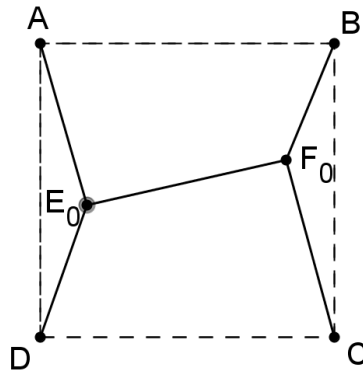


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F , parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

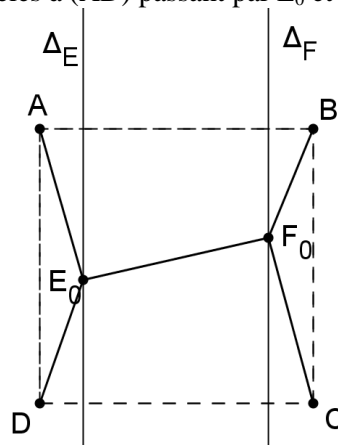


fig. 7

- Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances $DE + EA$ soit minimale. On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0 .
- Montrer que $EF \leq E_0F_0$.
- Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment $[AD]$ (fig. 8).

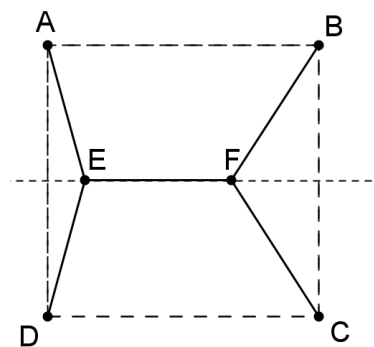
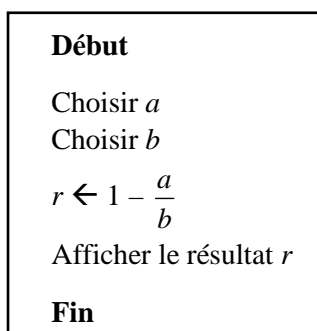


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de $[AB]$.
- Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de $[AB]$.
 - D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (fig. 4).
Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?
 - Quelle est alors la valeur de l'angle \widehat{DEA} ?

Exercice numéro 3 : la machine à calculer

On dispose d'un ordinateur dépourvu de toute fonctionnalité, à l'exception du programme suivant, traduit en langage naturel :



- Qu'affiche l'ordinateur lorsque l'on choisit $a = 1$ et $b = 4$?
 - Pour quels couples de nombres réels $(a ; b)$ choisis en entrée l'ordinateur affiche-t-il un message d'erreur ?
- On choisit $a = 1$ en entrée.
Existe-t-il des valeurs de b à saisir en entrée pour lesquelles l'affichage final est b ? Si oui, lesquelles ?
 - Même question avec $a = -2$ en entrée.
 - Discuter, selon les valeurs de a , l'existence de valeurs de b à choisir en entrée pour lesquelles l'affichage final est b .
Lorsqu'elles existent, donner leur expression en fonction de a .

Dans la suite, on notera $a \circ b$ (qui se lit a « rond » b) le résultat affiché par l'algorithme lorsque l'on choisit des réels a et b en entrée ne produisant pas un message d'erreur.

Par exemple : $1 \circ 2 = 1 - \frac{1}{2} = 0,5$.

- À quelle condition sur a et b a-t-on $a \circ b = 0$?
- Existe-t-il des réels a et b distincts tels que $a \circ b = b \circ a$?
- Expliquer comment on peut obtenir le résultat de $(1 \circ 2) \circ 3$ à l'aide de cet ordinateur.

On souhaite maintenant pouvoir effectuer les quatre opérations arithmétiques $(+ ; - ; \times ; :)$ à l'aide de cet ordinateur, c'est-à-dire uniquement avec l'opération \circ .

- Vérifier que, pour tout réel b non nul : $(a \circ b) \circ 1 = \frac{a}{b}$.

L'expression $(a \circ b) \circ 1$ permet donc d'obtenir le quotient de a par b .

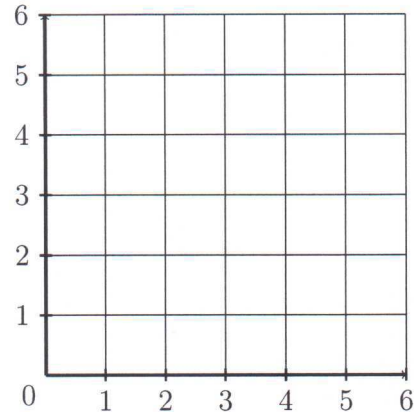
On dispose donc ainsi d'un moyen pour effectuer une division grâce au programme précédent.

- Sans effectuer de calculs, utiliser ce qui précède pour déterminer l'opération obtenue par l'expression : $(a \circ [(1 \circ b) \circ 1]) \circ 1$.
- Vérifier que, pour tout réel a différent de b et b non nul, on a : $1 \circ (a \circ b) = \frac{a}{a-b}$.
 - En déduire une expression ne comportant que l'opération \circ permettant d'obtenir $a - b$.
- Pour tous réels a et b non nuls, avec a différent de b , déterminer l'opération obtenue par l'expression $(a \circ b) \circ (b \circ a)$.
 - En déduire une expression ne comportant que l'opération \circ permettant d'obtenir $a + b$.

Exercice numéro 4 : les segments aléatoires

On considère l'algorithme et le repère suivants :

```
1 VARIABLES
2 p1 EST_DU_TYPE NOMBRE
3 p2 EST_DU_TYPE NOMBRE
4 DEBUT_ALGORITHME
5 p1 PREND_LA_VALEUR ALEA_ENT(1,6)
6 p2 PREND_LA_VALEUR ALEA_ENT(0,6)
7 TRACER_SEGMENT (0,p1)→(p1,0)
8 TRACER_SEGMENT (0,p2)→(p2,6)
9 FIN_ALGORITHME
```



La commande « $ALEA_ENT(a,b)$ » permet de générer de manière équiprobable un **nombre entier aléatoire** compris entre a et b (inclus).

La commande « $TRACER_SEGMENT(a,b) \rightarrow (c,d)$ » génère le tracé du segment de droite d'extrémités les points de coordonnées $(a ; b)$ et $(c ; d)$ dans le repère ci-dessus.

1. Représenter les segments obtenus pour $p1 = 1$ et $p2 = 5$.
2. Démontrer que tous les segments programmés à la ligne 7 de l'algorithme sont de même direction quelle que soit la valeur de $p1$.
3. Quelle est la probabilité que les segments programmés aux lignes 7 et 8 soient perpendiculaires ?

On complète l'algorithme précédent par une troisième variable $p3$ qui permet de programmer le tracé d'un troisième segment.

```
1 VARIABLES
2 p1 EST_DU_TYPE NOMBRE
3 p2 EST_DU_TYPE NOMBRE
4 p3 EST_DU_TYPE NOMBRE
5 DEBUT_ALGORITHME
6 p1 PREND_LA_VALEUR ALEA_ENT(1,6)
7 p2 PREND_LA_VALEUR ALEA_ENT(0,6)
8 p3 PREND_LA_VALEUR ALEA_ENT(0,6)
9 TRACER_SEGMENT (0,p1)→(p1,0)
10 TRACER_SEGMENT (0,p2)→(p2,6)
11 TRACER_SEGMENT (0,p3)→(6,p3)
12 FIN_ALGORITHME
```

4. Quelle particularité tous ces nouveaux segments programmés à la ligne 11 ont-ils en commun, quelle que soit la valeur de $p3$?
5. Quelle est la probabilité que ces trois segments se coupent deux à deux de telle sorte que l'on obtienne trois points distincts formant un triangle rectangle ?

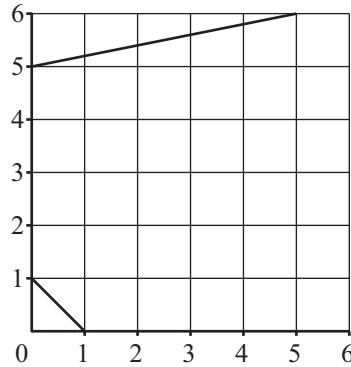
Exercice numéro 3 : La machine à calculer

CORRECTION

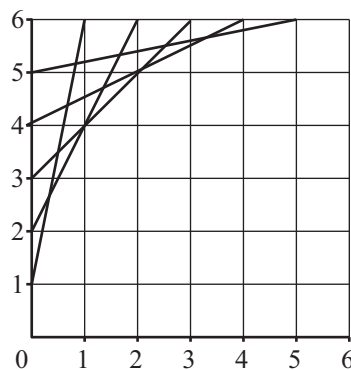
1. Il affiche 0,75.
Il affiche un message d'erreur si $b = 0$.
L'algorithme n'est pas exécutable pour les couples $(a; 0)$ avec a réel.
2. a) Il s'agit de résoudre l'équation $b^2 - b + 1 = 0$ de discriminant strictement négatif. Pas de valeurs réelles possibles pour b .
b) Il s'agit de résoudre l'équation $b^2 - b - 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et 2 .
c) Il s'agit de résoudre l'équation $b^2 - b + a = 0$ d'inconnue b . Le discriminant est $\Delta = 1 - 4a$.
Si $a > \frac{1}{4}$, aucune valeur de b possible, si $a = \frac{1}{4}$ une seule valeur possible pour $b : \frac{1}{2}$.
Et si $a < \frac{1}{4}$, deux valeurs possibles pour $b : \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$.
3. $a \circ b = 0$ si et seulement si $a = b$.
4. Oui, par exemple $a = -1$ et $b = 1$.
5. On applique le programme au résultat du programme obtenu à partir de 1 et 2, avec 3.
6. a) $(a \circ b) \circ 1 = \left(1 - \frac{a}{b}\right) \circ 1 = 1 - \frac{1 - \frac{a}{b}}{1} = \frac{a}{b}$.
b) L'expression effectue la division de a par $1/b$, c'est-à-dire la multiplication de a par b .
7. a) $1 \circ (a \circ b) = 1 \circ \left(1 - \frac{a}{b}\right) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{a}{b}} = 1 - \frac{b}{b - a} = \frac{a}{a - b}$.
b) L'expression $(a \circ [1 \circ (a \circ b)]) \circ 1$ permet d'obtenir le quotient de a par $\frac{a}{a - b}$ soit $a - b$.
8. a) $(a \circ b) \circ (b \circ a) = \left(1 - \frac{a}{b}\right) \circ \left(1 - \frac{b}{a}\right) = 1 - \frac{1 - \frac{a}{b}}{1 - \frac{b}{a}} = 1 - \frac{\frac{b - a}{b}}{\frac{a - b}{a}} = 1 - \frac{a}{b}$.
b) $[(a \circ b) \circ (b \circ a)] \circ [(1 \circ b) \circ 1] \circ 1$ donne le quotient de $1 + \frac{a}{b}$ par $\frac{1}{b}$ soit $a + b$.

Exercice numéro 4 : Les segments aléatoires CORRECTION

1. Tracé des segments pour $p_1 = 1$ et $p_2 = 5$



2. Quelle que soit la valeur de p_1 , les segments programmés à la ligne 7 ont pour direction commune celle décrite par le vecteur \vec{u} de coordonnées $(1 ; -1)$.
3. Représentons les 7 possibilités pour les segments programmés à la ligne 8 :

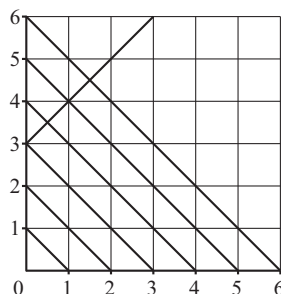


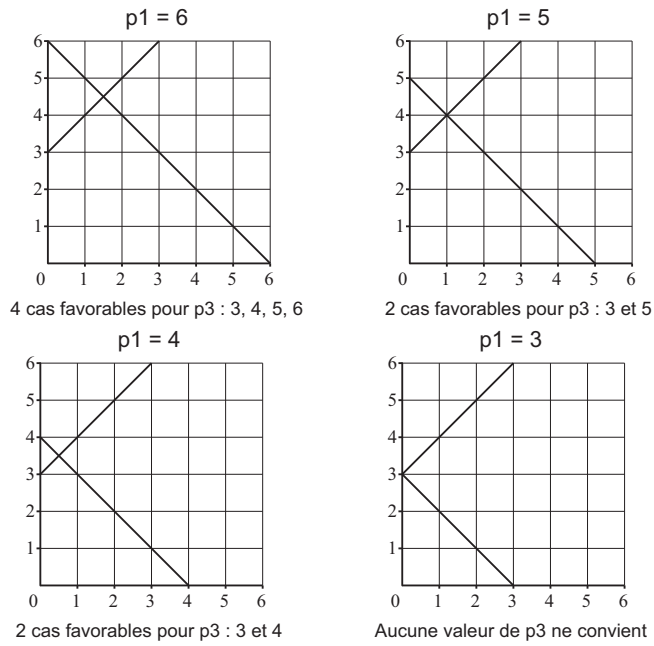
Seul celui pour $p_2 = 3$ convient pour les 6 positions de direction commune que peuvent prendre les segments programmés à la ligne 7 (justification par produit scalaire, par exemple).

Par équiprobabilité, on obtient, parmi 42 possibilités, une probabilité égale à $\frac{6}{42}$ soit $\frac{1}{7}$.

4. Les segments programmés à la ligne 11 sont tous parallèles à l'axe des abscisses.
5. Plusieurs types de configurations sont à prendre en compte :
- **Angle droit entre les segments programmés aux lignes 9 et 10 :**

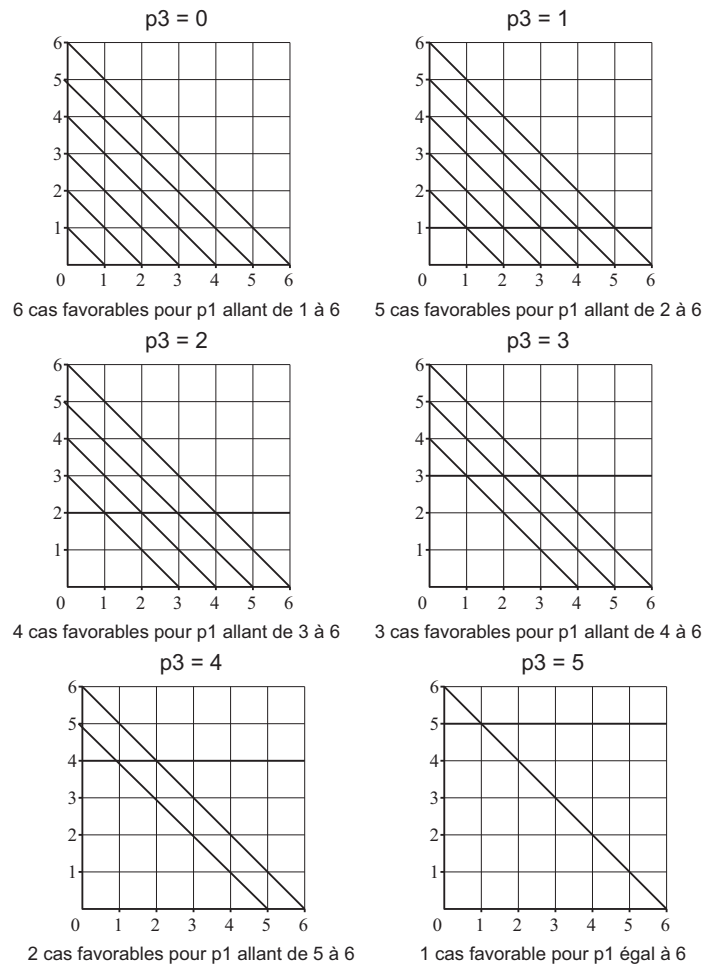
D'après la question 3, ceci n'est possible que lorsque $p_2 = 3$, pour lequel seules quatre valeurs de p_1 (de 3 à 6) permettent d'obtenir l'angle droit dans le repère.





Nous avons donc, pour ce type de configuration, en tout 8 cas favorables.

- **Angle droit entre les segments programmés aux lignes 10 et 11 :**
 Nous avons nécessairement $p2 = 0$.



Nous avons donc, pour ce type de configuration, en tout 21 cas favorables.

- **Angle droit entre les segments programmés aux lignes 9 et 11 :**

Impossible car quelles que soient les valeurs de p_1 et de p_3 , ces segments sont de directions constantes et non orthogonales.

Conclusion : nous avons donc en tout 29 cas favorables.

Par ailleurs le nombre de cas possibles s'élève à : $6 \times 7^2 = 294$.

Ainsi, par équiprobabilité, la probabilité recherchée est égale à $\frac{29}{294}$.