SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CLERMONT-FERRAND

Classes de première S • 2012

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIERE

Durée : 4 heures

SESSION 2012

Le candidat doit traiter 4 exercices qui sont indépendants : les deux premiers sont nationaux et les deux suivants sont académiques.

Le quatrième exercice est distinct suivant la série du candidat : lire attentivement la consigne.

Les calculatrices sont autorisées.

<u>Exercice National 1 :</u> Nombres « digisibles »

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. Soit n un entier *digisible* quelconque.

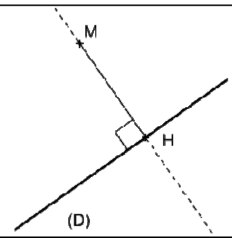
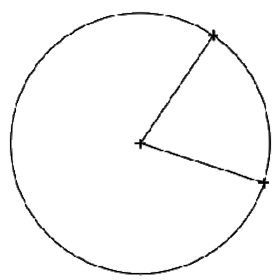
a. Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.

b. Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.

c. Déterminer le plus grand entier *digisible*.

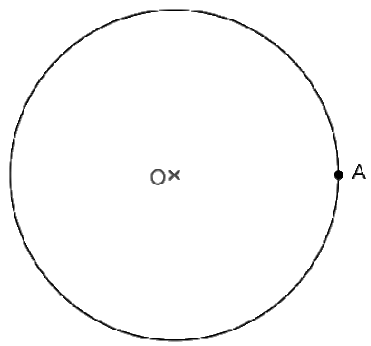
<u>Exercice National 2 :</u> **Plus proche, plus loin…**

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure* α *(en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\frac{\pi R^2 \alpha}{360}$. *Dans la partie II de l'exercice, on considèrera la distance d'un point M à* ***un segment*** *[BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



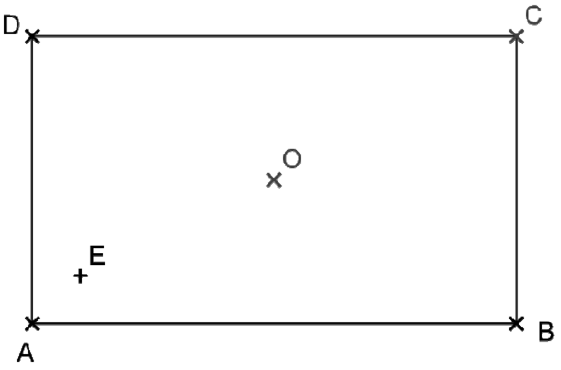
1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.
Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?
2. ***a.*** Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].

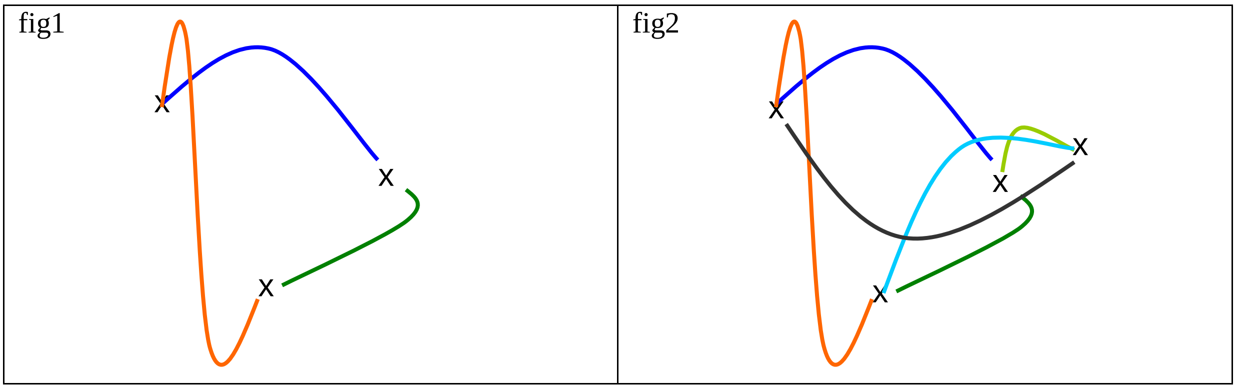
   b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

   c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?
3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?
4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

<u>**Exercice Académique 3 :**</u> **De toutes les couleurs**

Sur une toile blanche, une artiste en herbe place n points deux à deux distincts. (On suppose que $n \geq 2$). Elle relie alors les deux points de toute paire de points distincts par une ligne de couleur. Toutes les couleurs utilisées doivent être deux à deux différentes.

Ainsi pour une œuvre réalisée en partant de trois points, trois couleurs sont nécessaires (fig1), tandis que pour une œuvre réalisée en partant de quatre points, six couleurs sont nécessaires (fig2).



1. a) Dessiner une œuvre possible en partant de cinq points.

   b) Combien de couleurs sont nécessaires à sa réalisation ?

   c) Combien de couleurs sont nécessaires à la réalisation d'une œuvre en partant de huit points ?

2. Chacune des propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

   - *Proposition n°1 :* Il existe au moins un entier *n* supérieur ou égal à 2 pour lequel le nombre de couleurs nécessaires à la réalisation d'une œuvre soit égal au double du nombre initial *n* de points.

   - *Proposition n°2 :* Quel que soit l'entier *n* supérieur ou égal à 2, le nombre de couleurs nécessaires à la réalisation d'une œuvre est un multiple du nombre initial *n* de points.

   - *Proposition n°3 :* Il existe au moins un entier *n* supérieur ou égal à 2 pour lequel le nombre de couleurs nécessaires à la réalisation d'une œuvre soit égal au triple du nombre initial *n* de points.

3. a) Conjecturer une formule donnant le nombre de couleurs nécessaires à la réalisation d'une œuvre en fonction du nombre initial de points. La démontrer.

   b) On considère l'algorithme ci-dessous :

```
k est un entier naturel non nul
Affecter à n la valeur 2
Affecter à c la valeur 1
Tant que c < k×n
        Affecter à n la valeur n+1
        Affecter à c la valeur n(n−1)/2
Afficher n et c
```

   a. Faire fonctionner l'algorithme pour $k = 3$. Interpréter le résultat obtenu.
   b. Est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

   c) Déterminer pour quelles valeurs du nombre initial de points, le nombre de couleurs nécessaires est un multiple de celui-ci.

4. « Le chiffre des unités du nombre de couleurs utilisées pour une œuvre ne peut être que 0, 1, 3, 5, 6 ou 8 ». Que penser de l'affirmation ?

5. Pour peindre un triptyque, c'est à dire trois tableaux successifs, sans jamais utiliser deux fois la même couleur, l'artiste en herbe a eu besoin d'une palette de 184 couleurs. Sans tenir compte de l'ordre des tableaux, combien de points figuraient sur chacun ?

…/…

Exercice Académique 4 : Naissance de triplets (arithmétiques)

Cet exercice est réservé aux candidats de la série S

Trois entiers naturels distincts a, b, c **rangés par ordre strictement croissant**, a < b < c, sont en **progression arithmétique** si

$$c - b = b - a.$$

On dit alors que (a, b, c) est un **triplet arithmétique.**

1. Compléter les triplets arithmétiques suivants :
   a. (57, 101, . . .) ;
   b. (57, . . . , 101) ;
   c. (. . . , 57, 101).

2. a. Peut-on trouver un triplet arithmétique (a, b, c) dont la somme vaut 2012 ?
   b. Combien y a-t-il de triplets arithmétiques (a, b, c) de somme 2013 ?

3. On prend au hasard trois nombres a, b, c dans {1, 2, 3, . . . , 10} avec a < b < c. Quelle est la probabilité que (a, b, c) soit un triplet arithmétique ?

4. On rappelle qu'un entier naturel p est **premier** si p $\geq$ 2 et si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p.

   a. Quels sont les cinq plus petits nombres premiers ?
   b. Donner un triplet arithmétique (a, b, c) constitué uniquement de nombres premiers. Ce triplet est-il celui pour lequel la somme a + b + c est minimale ? On demande de justifier la réponse.
   Sinon, trouver les trois nombres premiers a < b < c en progression arithmétique et de somme minimale.
   c. Peut-on trouver un triplet arithmétique (a, b, c) constitué uniquement de nombres premiers et dont la somme a + b + c vaut 366 ?

5. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On se donne une liste $[\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_\mathrm{n}]$, d'entiers naturels **rangés par ordre strictement croissant**. On veut savoir si trois de ses termes **consécutifs** forment un triplet arithmétique.

   a. **Dans cette question uniquement**, la liste est [1, 3, 6, 10, 15, 21, 27, 32, 39, 45]. Contient-elle un triplet arithmétique formé de trois termes consécutifs ?
   b. On revient au cas général d'une liste $[\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_\mathrm{n}]$, d'entiers rangés par ordre strictement croissant. Écrire un algorithme qui affiche, s'il existe, le premier triplet arithmétique formé de trois termes consécutifs.
   c. Avec la calculatrice, programmer puis tester cet algorithme sur la liste $[\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_{20}]$ où, pour $1 \leq k \leq 20$,

   $$\mathrm{a}_k = -k^3 + 36k^2 + 9k$$

   On ne demande pas de vérifier que cette liste est formée d'entiers naturels rangés par ordre strictement croissant.

<u>Exercice Académique 4 :</u> Sudomaths !

Cet exercice est réservé aux candidats des séries L, ES, STI2D, STL, STG et ST2S

Voici une grille composée de 9×9 cases : certaines comportent déjà un chiffre compris entre 1 à 9.

3	8			9	7		b	e
7			5			d		
9				3	4			
				4	2	f	a	
	7						c	
	9	2	7	8				
			1	5				6
		9			8			5
5	4		3	2			7	9

1. Six cases comportent des lettres notées a, b, c, d, e et f. Ces lettres représentent six chiffres inconnus, deux à deux distincts, compris entre 1 et 9.
   Déterminer a, b, c, d, e et f à partir des définitions ci-dessous :

   a est le nombre de sommets d'un cube ;
   b est le plus grand diviseur commun à 2012 et 201 ;

   Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Lire un nombre entier strictement positif N Si $N<5$ alors A prend la valeur $3\times N$ Sinon A prend la valeur $3\times N-12$ Afficher A

   c est le nombre affiché lorsque le nombre entré est 2 ;
   d est le nombre affiché lorsque le nombre entré est 5 ;
   e est l'un des nombres qu'il faut entrer pour obtenir 12 ;
   f est le nombre qu'il faut entrer pour obtenir 15.

2. Recopier la grille en remplaçant les six lettres par les valeurs trouvées à la question 1.

3. Il s'agit maintenant de compléter toutes les cases de la grille à l'aide de chiffres compris entre 1 et 9 en utilisant la règle suivante :
   Chaque chiffre de 1 à 9 doit figurer une et une seule fois sur chaque ligne, chaque colonne et chaque région : les régions sont les 9 carrés de 3×3 cases délimités par des traits gras.

CORRECTION DES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIERE

SESSION 2012

Exercice National 1 : Nombres « digisibles »

1. Essayer différents chiffres des dizaines, chiffres des unités : 12, 15, 24 ou encore 36…

2. L'idée est d'utiliser le 1 comme chiffre des milliers. 1000 étant divisible par 2, 4, 8 … on cherche à partir des trois chiffres 2, 4, 8 ; **1248** est divisible par 8 donc par 4 ainsi que par 2 et 1. Il convient.

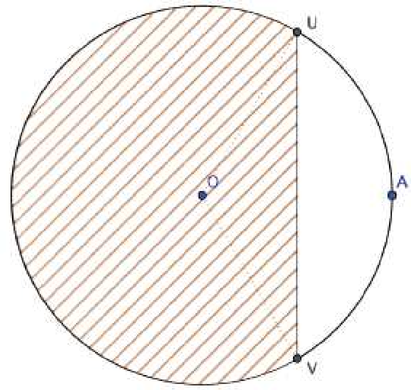
3. a) Le nombre est divisible par 5, son chiffre des unités est 0 ou 5 ; seul 5 est possible car aucun des chiffres ne doit être nul. **5 est le chiffre des unités.**
   b) Avec 5 comme chiffre des unités, le nombre est impair et n'a donc que des diviseurs impairs ; tels sont les chiffres de son écriture décimale. **Tous les chiffres de *n* sont impairs.**
   c) Les cinq chiffres impairs peuvent-ils figurer dans l'écriture du nombre ? Si oui, celui-ci s'écrit xyzt5, x, y, z, t étant quatre chiffres impairs. Cela fait vingt-quatre nombres éventuels ; la somme des chiffres $1+3+5+7+9$ valant 25, aucun n'est divisible par 3. ***n* s'écrit avec au plus quatre chiffres.**
   d) Le nombre s'écrit xyz5, x, y, z étant des chiffres impairs tous différents. On cherche le plus grand possible …Essayons x = 9. Le plus grand nombre qui puisse être écrit, 9735 ne convient pas (non divisible par 9) ; puis 9715 non plus (non divisible par 9) ; 9375 pas plus (non divisible par 9) ; 9315 est digisible. **9315 est le plus grand nombre digisible s'écrivant avec un 5.**

4. La somme des neuf chiffres $1+2+...+9$ vaut 45.
   a) S'il y a le 5, l'écriture du nombre digisible ne comporte pas plus de quatre chiffres, d'après 3.c).
   S'il n'y a pas le 5, avec huit chiffres, la somme des chiffres vaut 40 ; il est impossible que le nombre soit divisible par 3. **Un entier digisible *n* s'écrit avec au plus sept chiffres.**
   b) Si le nombre s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, il n'y a donc pas le 5.
   Les huit chiffres éventuels ont une somme valant $45-5=40$. Quel chiffre ôter pour que cette somme soit un multiple de 9 ? Il s'agit du chiffre 4.
   Un nombre digisible s'écrivant avec sept chiffres, dont le 9, comporte exclusivement les chiffres 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9.
   c) Pour la recherche du plus grand entier digisible, on tente avec le 9 comme chiffre des centaines de mille…
   Le chiffre des unités ne peut être que 2, 6 ou 8 puisqu'il doit être pair.
   S'il s'écrit 9876xy2, il n'y a que deux possibilités : 9876312 non divisible par 7 et 9876132 non divisible par 8.
   S'il s'écrit 9867xy2, il n'y a que deux possibilités : 9867312 et 9867132. 9867312 est divisible par chacun de ses sept chiffres. **9867312 est le plus grand entier digisible.**

Exercice National 2 : Plus proche, plus loin…

Partie I

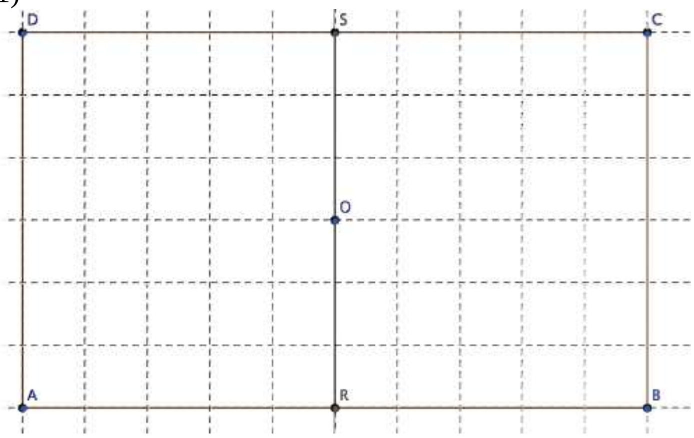
1) et 2)
On représente le segment [UV] intersection avec le disque de la médiatrice du segment [OA].
On hachure : noter que les points du segment [UV] ne sont pas dans l'ensemble hachuré.



3) Quel est le rapport de l'aire hachurée à celle du disque ?
L'aire du disque (de rayon R) : πR^2 (l'aire d'un secteur d'angle de mesure 360°).
Le secteur angulaire UOV a pour aire le tiers de la précédente.
L'aire du triangle OUV est $\frac{1}{2}OU\times OV\times\sin(120°)=\frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$.
L'aire de la portion hachurée est la somme des deux tiers de l'aire du disque et de l'aire du triangle OUV, soit $\frac{2}{3}\pi R^2+\frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$.
La probabilité que M soit plus proche de O que de A est :
$\boxed{\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\approx 80{,}5\%}$.

Partie II

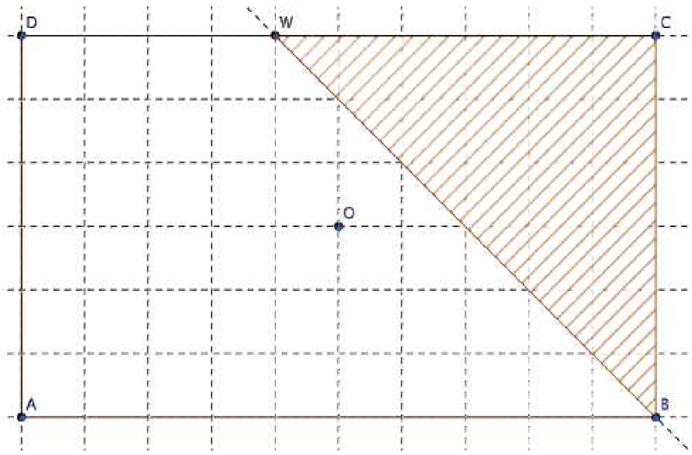
1)



La médiatrice du segment [AB] coupe le segment [AB] en R et le segment [CD] en S. Le segment [RS] représente l'ensemble des points du rectangle
équidistants du côté [BC] et du côté [AD].
Le rectangle RBCS est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AD].

Son aire est la moitié de celle du rectangle.
La probabilité cherchée est : $\boxed{\frac{1}{2}=50\%}$.

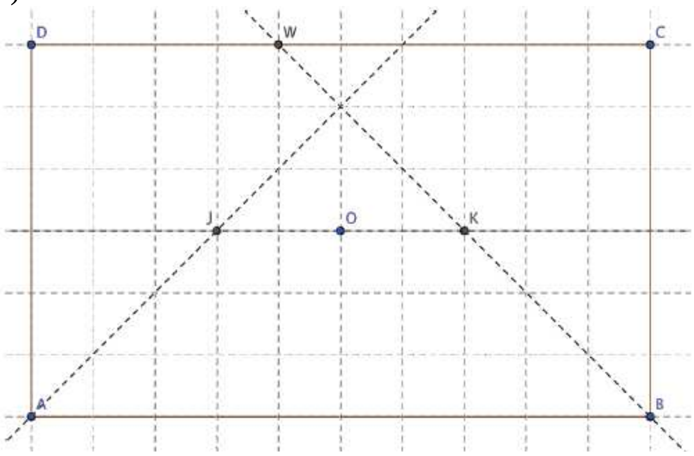
2) a) et b)



La bissectrice de l'angle droit en B coupe le segment [CD] en W. Le segment [BW] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AB].
Le triangle BCW rectangle isocèle en C (excepté le segment [BW]) est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

Son aire : $\frac{12\times 12}{2}=72\ \text{cm}^2$.
Le rapport de celle-ci à celle du rectangle est la probabilité cherchée : $\boxed{\frac{72}{240}=\frac{3}{10}=30\%}$.

3)

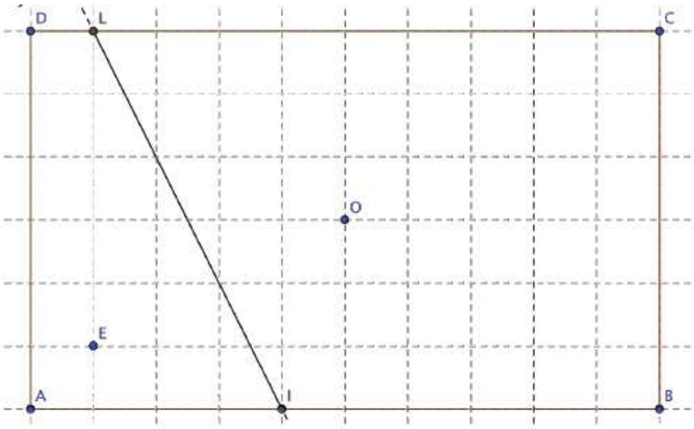


Les bissectrices de l'angle droit en B, de l'angle droit en A, la médiatrice du segment [BC] déterminent le quadrilatère ABKJ qui est l'ensemble des points plus proches du côté [AB] que des trois autres côtés du rectangle (exception faite des côtés [BK], [KJ], [JA]).

Son aire :
$\dfrac{AB+JK}{2}\times\dfrac{BC}{2}=\dfrac{20+20-2\times 6}{2}\times 6=84\,\text{cm}^2$.

La probabilité cherchée : $\boxed{\dfrac{84}{240}=\dfrac{7}{20}=35\%}$.

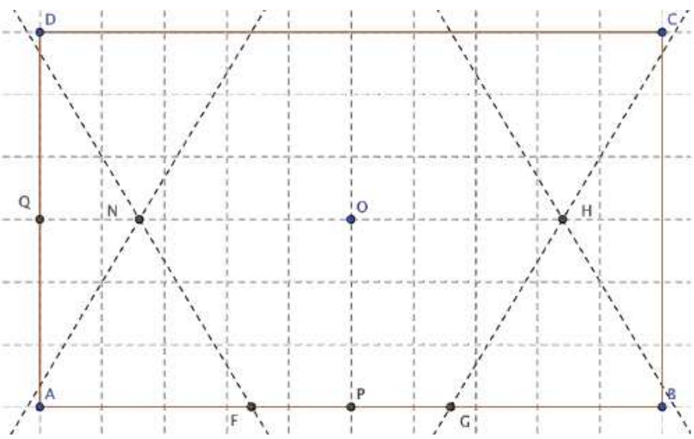
4)



La médiatrice du segment [OE] détermine les points I et L respectivement sur les côtés [AB] et [CD].
Il semble que la longueur AI vaille 8 ; un triangle rectangle (6 sur 2) extrait du quadrillage d'hypoténuse EI, ainsi que de même avec OI, confirme que le point de [AB] à la distance 8 de A est équidistant de O et de E.
De même DL = 2.
L'aire du trapèze AILD (ensemble des points plus proches de E que de O (exception faite du segment [IL]) vaut : $AD\times\dfrac{DL+AI}{2}=60\,\text{cm}^2$.

La probabilité cherchée : $\boxed{\dfrac{240-60}{240}=\dfrac{3}{4}=75\%}$.

5)



On considère les médiatrices des segments [OA], [OB], [OC] et [OD] qui déterminent un hexagone ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D.
La médiatrice du segment [AO] détermine le point F sur le segment [AB].
Les médiatrices des segments [AO] et [OD] déterminent le point N situé aussi sur l'axe médian du rectangle (par symétrie du rectangle appliquée aux segments générant les médiatrices).
Le quadrilatère AFON dont les diagonales ont pour milieu le pied de la médiatrice est un parallélogramme (c'est un losange car (OA) et (NF) sont perpendiculaires).

Ce losange a même centre de symétrie que le rectangle APOQ, (P et Q milieux respectifs de [AB] et [AD]). Dans cette symétrie centrale, PFNO et NQAF se correspondent.L'hexagone, portion du rectangle ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D, a pour aire la moitié de celle du rectangle ABCD, puisqu'il est constitué de quatre trapèzes de mêmes dimensions que PFNO.

La probabilité cherchée est $\boxed{\dfrac{1}{2}=50\%}$. Ce résultat est indépendant de la longueur des côtés du rectangle.

<u>Exercice Académique 3 :</u> De toutes les couleurs

1. a) à faire

   b) Le nombre de couleurs utilisées est $\dfrac{5\times 4}{2}$ ou $4+3+2+1$ soit **10**.

   c) Le nombre de couleurs utilisées est $\dfrac{8\times 7}{2}$ ou $7+6+5+4+3+2+1$ soit **28**.

2. *Proposition n°1 :* **Vraie**. Pour $n=5$, le nombre de couleurs utilisées est 10.
   Proposition n°2 : **Fausse**. Contre exemple : pour $n=4$, le nombre de couleurs utilisées est 6 qui n'est pas un multiple de 4.
   Proposition n°3 : **Vraie**. Pour $n=7$, le nombre de couleurs utilisées est $6+5+4+3+2+1=21$.

3. a) Chacun des n points est relié aux $n-1$ autres par une ligne de couleur. Mais comme 2 points ne sont reliés que par une seule ligne, le nombre de couleurs utilisées est finalement $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

   b) a. Avec $k=3$.
   Complétons le tableau :

n	2	3	4	5	6	7
c	1	3	6	10	15	21

   Le nombre de couleurs utilisées est le triple du nombre de points initial lorsque $n=7$.

   b. Posons $c_n=\dfrac{n(n-1)}{2}-k\times n$

   $c_n\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1-2k)}{2}\geq 0 \Leftrightarrow n\geq 1+2k$ puisque $n\geq 2$.

   Au bout de $2k-1$ boucles l'algorithme s'arrête et $c_{1+2k}=0$.

   c) Soit k un entier naturel non nul et n un entier naturel supérieur à 2.
   $\dfrac{n(n-1)}{2}=k\times n \Leftrightarrow n-1=2k \Leftrightarrow n=2k+1$
   Le nombre de couleurs utilisées est un multiple du nombre de points initial si et seulement si ce dernier est un **nombre impair** (différent de 1).

4. Examinons le chiffre des unités de l'expression $\dfrac{n(n-1)}{2}$ où n est un entier naturel.

Chiffre des unités de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $n-1$	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre des unités de $n(n-1)$	0	0	2	6	2	0	0	2	6	2
Chiffre des unités de $\dfrac{n(n-1)}{2}$	0 ou 5	0 ou 5	1 ou 6	3 ou 8	1 ou 6	0 ou 5	0 ou 5	1 ou 6	3 ou 8	1 ou 6

   En effet, par exemple, un entier naturel se terminant par 2 s'écrit sous la forme $10p+2$ où p est un entier naturel.
   Alors $\dfrac{10p+2}{2}=5p+1$ se termine par 1 ou 6.
   Donc le chiffre des unités du nombre de couleurs utilisées ne peut être que 0, 1, 3, 5, 6 ou 8.

5. Listons les premières valeurs de $\dfrac{n(n-1)}{2}$, en remarquant que la suite définie par $u_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$ pour $n\geq 2$ est strictement croissante. En effet, pour tout entier $n\geq 2$, $u_{n+1}-u_n=n>0$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\frac{n(n-1)}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190

Notons *a*, *b* et *c* les nombres de points utilisés pour chacun des tableaux en supposant que $a \geq b \geq c \geq 2$ et *a'*, *b'* et *c'* les nombres respectifs de couleurs utilisées.
Comme *a'* + *b'* + *c'*= 184, on $a' \geq 184/3$ soit $a' \geq 62$. Voici les différents cas possibles :

a'	*b'*	*c'*	somme	*a*	*b*	*c*
171	10	3	184	**19**	**5**	**3**
153	28	3	184	**18**	**8**	**3**
153	21	10	184	**18**	**7**	**5**
136	45	3	184	**17**	**10**	**3**
120	36	28	184	**16**	**9**	**8**
105	78	1	184	**15**	**13**	**2**
91	78	15	184	**14**	**13**	**6**
78	78	28	184	**13**	**13**	**8**
66	impossible	impossible	impossible	impossible	impossible	impossible

En effet si *a'* = 66, soit *b'* = 66 et *c'* = 52 ce qui est impossible, soit $b' \leq 55$ et $c' \leq 55$ mais $a' + b' + c' \leq 176$ ce qui est aussi impossible.
L'artiste utilise, pour son triptyque, **une palette de 184 couleurs dans huit cas possibles** figurant dans le tableau ci-dessus.

<u>Exercice Académique 4 :</u> Naissance de triplets (arithmétiques)

Remarque préalable : si (a, b, c) est un triplet arithmétique, alors b − a = c − b. On note r cette quantité.
L'entier r est strictement positif, puisque b > a. Ainsi, un triplet arithmétique est de la forme

(a, b, c) = (a, a + r, a + 2r) avec $a \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

Réciproquement, dès que l'on se donne des entiers $a \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}^*$, on peut définir un triplet arithmétique par (a, a + r, a + 2r).

1. a. Avec les notations précédentes, a = 57, b = 101 et il faut trouver c. Or r = 101−57 = 44 donc c = b + r = 101 + 44 = **145**.
   b. Ici, il faut trouver b. Mais 2r = c − a = 101 − 57 = 44 donc r = 22 et b = a + r = 57 + 22 = **79**.
   c. Ici, il faut trouver a. Mais r = c − b = 101 − 57 = 44 donc a = b − r = 57 − 44 = **13**.

2. a. Toujours avec les mêmes notations (r = b − a = c − b), la somme a + b + c = 3(a + r) est divisible par 3. Le nombre 2012 n'étant pas divisible par 3, **on ne peut pas trouver de triplet arithmétique de somme 2012.**
   b. Pour 2013, il suffit de résoudre 3(a + r) = 2013, donc a + r = 671. On veut $a \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}^*$, donc a peut prendre toutes les valeurs de 0 à 670 (mais pas 671 car sinon r = 0). Cela fait 671 choix pour a, auquel cas r est égal à 671 − a > 0 et le triplet est alors entièrement déterminé : c'est (a, a + r, a + 2r) = (a, 671, 1342 − a).
   Il y a donc 671 triplets arithmétiques dont la somme vaut 2013.

3. Il s'agit de compter le nombre N_1 de triplets arithmétiques (a, b, c) avec $1 \leq a < b < c \leq 10$ et de diviser ce nombre par le nombre N_2 de triplets (a, b, c) avec $1 \leq a < b < c \leq 10$.

- Le calcul de N_2 est le plus facile : on choisit 3 nombres x, y, z dans [[1, 10]], deux à deux distincts, puis on les range par ordre croissant. On a à priori 10 choix pour x, 9 pour y, 8 pour z. Mais les six triplets (x, y, z), (x, z, y), (y, x, z), (y, z, x), (z, x, y) et (z, y, x) donnent ensuite le même triplet (a, b, c) rangé par ordre croissant. On a donc compté six fois chaque triplet. Ainsi,
$$N_2 = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$$
- Le calcul de N_1 est plus délicat.
Première méthode — Pour trouver un triplet arithmétique (a, b, c) avec $1 \le a < b < c \le 10$, on choisit $a \in [[1, 10]]$ puis $r \in \mathrm{IN}^*$ tels que $a + 2r \le 10$, donc, en notant E la partie entière,
$$1 \le r \le E\left(\frac{10-a}{2}\right)$$
Ceci suppose $a \in [[1, 8]]$, sinon r n'existe pas. Pour un tel a, il y a $E\left(\frac{10-a}{2}\right)$ choix pour r.
Ainsi, $N_2 = \sum_{a=1}^{8} E\left(\frac{10-a}{2}\right) = \sum_{a=1}^{8} E\left(5 - \frac{a}{2}\right) = 4+4+3+3+2+2+1+1 = 20$.
Seconde méthode — On liste tous les triplets arithmétiques (a, b, c) avec $1 \le a < b < c \le 10$.
Pour a = 1, les possibilités sont : b = 2, c = 3,
b = 3, c = 5,
b = 4, c = 7,
b = 5, c = 9,
et c'est tout, sinon $b \ge 6$ et alors $c \ge 11$.
Pour a = 2, les possibilités sont : b = 3, c = 4,
b = 4, c = 6,
b = 5, c = 8,
b = 6, c = 10.
Pour a = 3, les possibilités sont : b = 4, c = 5,
b = 5, c = 7,
b = 6, c = 9.
Pour a = 4, les possibilités sont : b = 5, c = 6,
b = 6, c = 8,
b = 7, c = 10.
Pour a = 5, les possibilités sont : b = 6, c = 7,
b = 7, c = 9.
Pour a = 6, les possibilités sont : b = 7, c = 8,
b = 8, c = 10.
Pour a = 7, la seule possibilité est b = 8, c = 9.
Enfin, pour a = 8, la seule possibilité est b = 9, c = 10.
On trouve bien 20 possibilités.

En conclusion, en prenant au hasard trois nombres a, b, c dans [[1, 10]] avec a < b < c, la probabilité que (a, b, c) soit un triplet arithmétique vaut $p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$.

4. a. Les cinq plus petits nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11.
   b. Les nombres 3, 5 et 7 sont premiers et sont en progression arithmétique. Le triplet (3, 5, 7) est celui de somme minimale.
   En effet, si l'on note encore r = b − a = c − b, alors a + b + c = 3(a + r). Or a est premier, donc $a \ge 2$.
   Si a = 2 alors r ne peut valoir 1 (sinon c = 4 n'est pas premier), ni 2 (sinon b = 4), ni 3 (sinon c = 8 n'est pas premier) donc r > 3 et a + r > 5. Donc a + b + c > 15.
   Si a = 3 alors r ne peut valoir 1 (sinon b = 4 n'est pas premier) donc $r \ge 2$ et $a + r \ge 5$.
   De plus a + b + c = 15 seulement lorsque r = 2.
   Si a = 4 alors a n'est pas premier.
   Si a > 4 alors $r \ge 1$ donc a + r > 5 et a + b + c > 15.

Dans tous les cas, a + b + c = 3(a + r) $\geq$ 15 : c'est la somme trouvée pour 3, 5, 7 et l'étude ci-dessus montre que (3, 5, 7) est l'unique triplet arithmétique de nombres premiers convenant.

c. La réponse est « non ». En effet 3(a + r) = 366 donne a + r = 122 soit b = 122. Mais 122 n'est pas premier.

5. a. La liste proposée contient bien un triplet arithmétique, à savoir (15, 21, 27).
b. Voici un algorithme possible :

```
k ← 1
a ← 44          (valeur de a_1)
b ← 154         (valeur de a_2)
c ← 324         (valeur de a_3)
tant que b − a ≠ c − b faire
        a ← b
        b ← c
        c ← −(k+3)^3 + 36(k+3)^2 + 9(k+3)
        k ← k+1
fin tant que
afficher k
afficher a, b, c
```

c. On obtient k = 11 et (a, b, c) = (3124, 3564, 4004).

<u>Exercice Académique 4 :</u> **Sudomaths !**

1. $a = 8$

$b = 1$ car $2012 = 4 \times 503$ et 503 est un nombre premier : il n'est divisible que par 1 et lui-même.
et $201 = 3 \times 67$ et 67 est un nombre premier.
2012 et 201 sont donc premiers entre eux : leur pgcd vaut 1.

$c = 6$ car $2 < 5$ et A prend la valeur $3 \times 2 = 6$.

$d = 3$ car $5 \geq 5$ et A prend la valeur $3 \times 5 - 12 = 3$.

$e = 4$ car $3 \times N = 12 \Leftrightarrow N = 4$ et $4 < 5$
et $3 \times N - 12 = 12 \Leftrightarrow N = 8$ et $8 \geq 5$.
Mais on a déjà $a = 8$ et $e \neq a$. Donc $e = 4$.

$f = 9$ car $3 \times N = 15 \Leftrightarrow N = 5$ mais on n'a pas $5 < 5$!
tandis que $3 \times N - 12 = 15 \Leftrightarrow N = 9$ et $9 \geq 5$.

2. et 3. Une unique grille est possible.

Voir la page suivante.

3	8	5	2	9	7	6	**1**	**4**
7	2	4	5	6	1	**3**	9	8
9	3	6	8	3	4	7	5	2
1	5	3	6	4	2	**9**	**8**	7
4	7	8	9	1	5	2	**6**	3
6	9	2	7	8	3	5	4	1
8	3	7	1	5	9	4	2	6
2	6	9	4	7	8	1	3	5
5	4	1	3	2	6	8	7	9