SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CLERMONT-FERRAND

Classes de première S • 2011

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES
CLASSE DE PREMIERE

Durée : 4 heures

SESSION 2011

Le candidat doit traiter 4 exercices qui sont indépendants : les deux premiers sont nationaux et les deux suivants sont académiques.

Le quatrième exercice est distinct suivant la série du candidat : lire attentivement la consigne.

Les calculatrices sont autorisées.

<u>Exercice National 1 :</u> Essuie-glaces

(les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

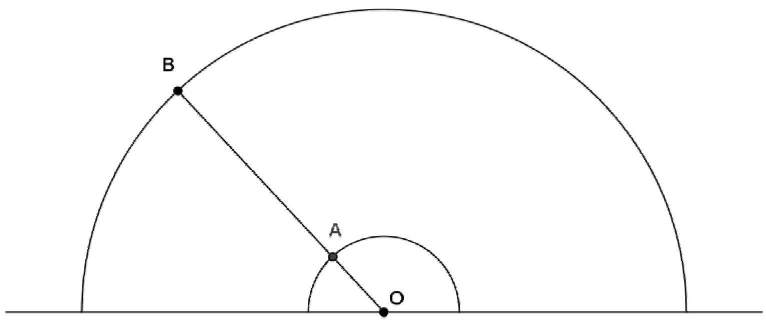


Fig.1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant l'un autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

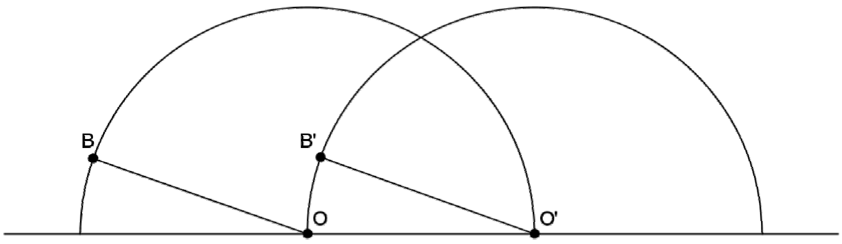


Fig.2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, $CB = 4\ CA$ et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = *a*.

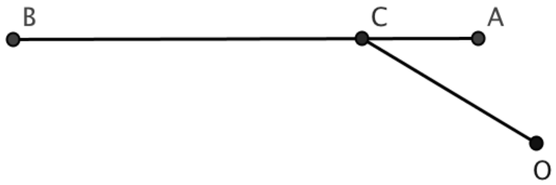


Fig.3

   a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.
   b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B et C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de *a* l'aire de la surface essuyée par le balai.

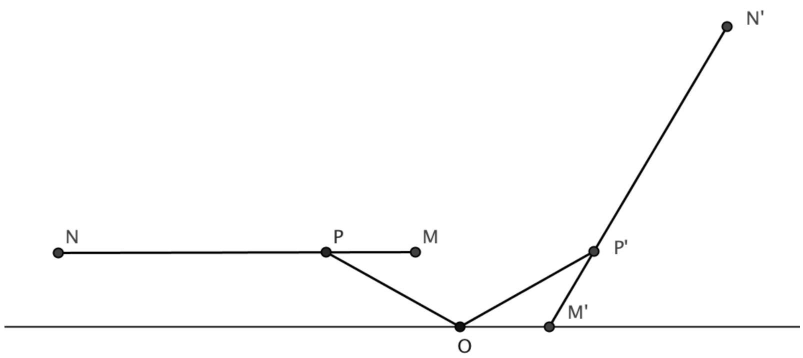


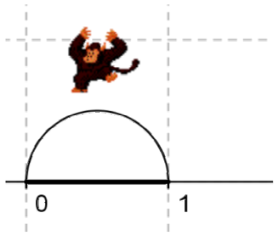
Fig.4

Exercice National 2 : Le singe sauteur

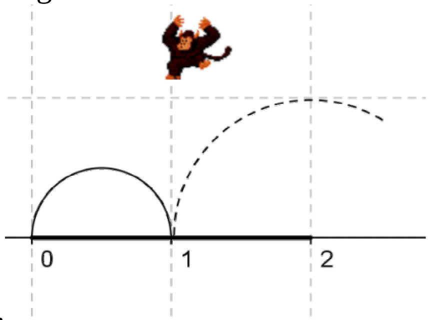
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0 ; n]$.

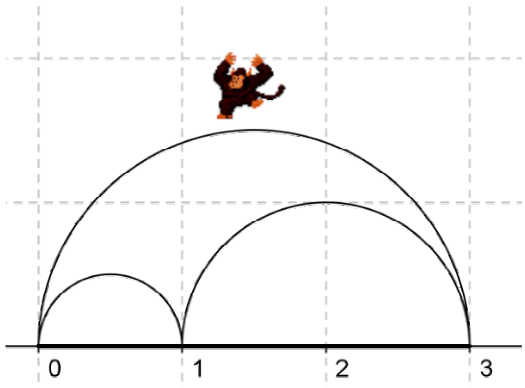
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0 ; 2]$.



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0 ; 3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier m, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5. a. Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.
   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose $\mathrm{N} \geq 6$ et atteignable par une séquence qui commence par $1+2+3$ …
   Montrer que $\mathrm{N}+4$ est aussi atteignable.

Exercice Académique 3 : Code confidentiel

On appelle code un nombre à quatre chiffres choisis dans la liste {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, chaque chiffre pouvant être répété à l'intérieur d'un même code.
Par exemple 1903 et 8855 sont des codes possibles, l'écriture générale étant $\overline{abcd}$ (on met un trait au dessus pour ne pas confondre l'écriture du nombre avec le produit $a \times b \times c \times d$)
À ce code est associée une clé C calculée à l'aide de l'algorithme suivant :

```
Entrée          :   N est le code à quatre chiffres
Initialisation  :   Affecter à P la valeur de N
                    Affecter à S la valeur 0
Traitement      :   Pour K de 1 à 4, faire :
                        Affecter à U le chiffre des unités de P
                        Si K est pair
                            alors affecter à S la valeur S + (K + 3) × U
                            sinon affecter à S la valeur S + (K + 1) × U
                        Fin si
                        Affecter à P la valeur (P − U)/10
                        Fin faire
                    Affecter à R le reste de la division euclidienne de S par 9
                    Affecter à C la valeur 9 – R
Sortie          :   Afficher C
```

Le code et sa clé constituent un identifiant permettant l'ouverture d'une salle confidentielle.

1. Faire fonctionner l'algorithme avec N = 2 282 et vérifier que la clé qui lui correspond est 6.

2. Une personne s'identifie en entrant le code 4 732 suivi de la clé 4.
   L'accès à la salle lui est refusé.
   La personne est sûre des trois derniers chiffres du code et de la clé, l'erreur porte sur le premier chiffre du code (qui n'est donc pas égal à 4). Quel est ce premier chiffre ?

3. Est-il vrai que toutes les personnes ayant un code de la forme $\overline{abba}$ ont pour clé 9 ?
   (a et b sont des entiers tels que $0 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$)

4. Déterminer les couples (c ; d) d'entiers tels que les codes de la forme $\overline{ccdd}$ soient associés à la clé 4. (c et d sont des entiers tels que $0 \leq c \leq 9$ et $0 \leq d \leq 9$)

<u>Exercice Académique 4 :</u> L'élection du consul de l'Empereur

Cet exercice est réservé aux candidats de la série S

Sur la planète Xycha, le Grand Conseil se réunit pour élire, en son sein, le consul de l'Empereur : plusieurs prétendants, d'âges deux à deux distincts, sont en présence. Chaque conseiller vote pour un prétendant et un seul : il n'y a ni abstention, ni bulletin blanc.

Un prétendant est élu au premier tour lorsqu'il obtient au moins 50% des voix. En cas d'égalité le plus jeune est élu. Sinon un second tour sera nécessaire.

1. <u>Vrai ou faux :</u> dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
   a. Si un seul prétendant se présente alors un second tour n'est pas nécessaire.
   b. Si deux prétendants se présentent alors un second tour n'est pas nécessaire.
   c. Si trois prétendants se présentent alors un second tour n'est pas nécessaire.

On suppose désormais que le nombre de prétendants en présence est supérieur ou égal à **trois**.

2. Chaque prétendant en présence au premier tour réunit exactement deux fois moins de voix que celui qui lui est immédiatement supérieur. Un deuxième tour sera-t-il nécessaire ?
3. Chaque prétendant en présence réunit exactement les trois quarts des voix de celui qui lui est immédiatement supérieur. Un deuxième tour sera-t-il nécessaire ?

On pourra utiliser la formule :

pour tout entier naturel non nul *n* et tout réel $q \neq 1$, $1+q+q^2+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

<u>Exercice Académique 4 :</u> Tous divisibles par 222 … ou plus.

Cet exercice est réservé aux candidats des séries L, ES, STI, STL, STG et ST2S

1) En utilisant une seule fois chacun des trois chiffres 1, 2 et 3, écrire tous les nombres entiers naturels possibles de trois chiffres : 123 ; 132 ;…etc.
   - Faire la somme S de tous les nombres obtenus.
   - Vérifier que cette somme S est un multiple de 222.

2) Reprendre la question avec trois chiffres non nuls et distincts deux à deux de votre choix.

3) La propriété découverte à la question 1) reste-t-elle vraie quels que soient les trois chiffres non nuls distincts deux à deux choisis ? Justifier votre réponse.

4) On considère maintenant quatre chiffres non nuls et distincts deux à deux.
   Énoncer et démontrer une propriété analogue.

CORRECTION DES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIERE

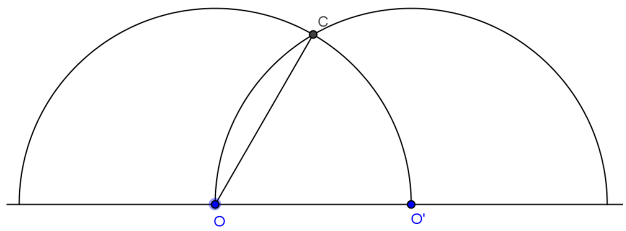
SESSION 2011

<u>Exercice National 1 :</u> Essuie-glaces

1) L'aire demandée en cm^2 est $A=\frac{1}{2}(\pi.60^2-\pi.15^2)=\frac{\pi}{2}15^2(4^2-1)=1687{,}5\pi$ soit en valeur approchée **5301 cm^2**.

2) Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons L'aire du triangle équilatéral OO'C de côté de longueur R, et donc de hauteur

$R\frac{\sqrt{3}}{2}$: $A_1=\frac{1}{2}\left(R\times\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.



Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle

$\widehat{\text{O'OC}}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle

$\widehat{\text{CO'O}}$: $A_2=\frac{\pi R^2}{6}$.

Ainsi l'aire de la portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\overset{\frown}{\text{OC}}$ sera : A_2-A_1.

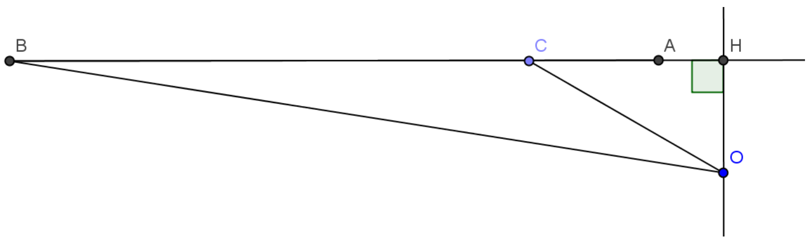
L'aire de la portion de plan commune aux deux demi disques sera donc :

$A_3=A_2+A_2-A_1=2A_2-A_1$. Donc $A_3=\frac{\pi}{3}R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un disque de rayon R privée de A_3 soit

$A=\pi R^2-(\frac{\pi}{3}R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2)$ donc $\boxed{A=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2}$

3) a. $\sin\widehat{\text{OCH}}=\sin 30°=\frac{1}{2}$



donc $\frac{\text{OH}}{\text{OC}}=\frac{1}{2}$ soit

$\text{OH}=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

De même $\frac{\text{HC}}{\text{OC}}=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\text{HC}=\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3}=\frac{3}{2}a$. Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H :

$$\text{OA}^2=\text{HA}^2+\text{HO}^2=(\text{HC}-\text{CA})^2+\text{HO}^2=\left(\frac{3}{2}a-a\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=a^2.$$

Ainsi OA = OC et donc $\boxed{\text{le triangle AOC est isocèle.}}$
Remarque : on pouvait également utiliser le théorème d'Al Kashi dans le triangle AOC.

b. L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{\text{MOM'}}$. En degré elle vaut $180-\widehat{\text{XOM}}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{\text{XOM}}$ et $\widehat{\text{OPM}}$ sont alternes internes, et le triangle MOP est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{\text{MOX}}=2\times30=60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{\text{MOM'}}$ a pour mesure $180-60=\boxed{120°.}$

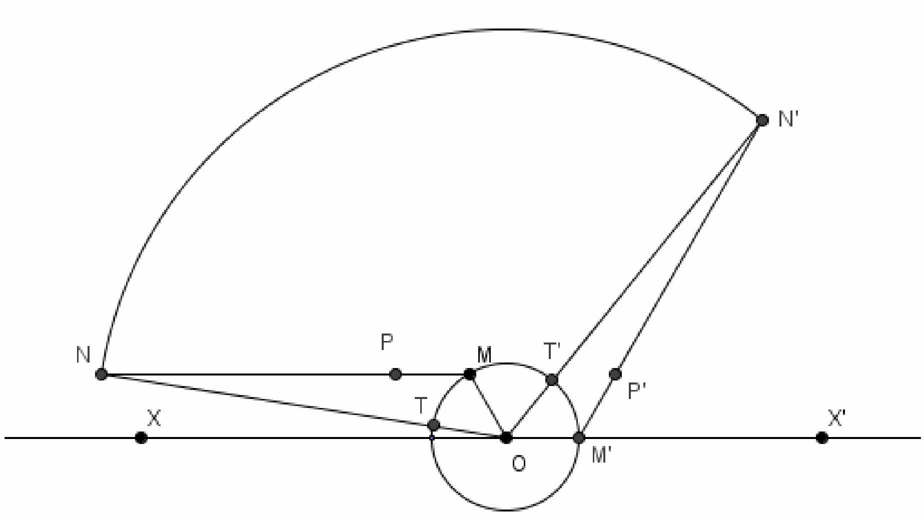
La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MN] et [M'N'] et les arcs $\overset{\frown}{\text{MM'}}$ et $\overset{\frown}{\text{NN'}}$. Soient T et T' les intersections du cercle de centre O passant par M et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points M, T et N ont respectivement pour images M', T' et N', et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par [MN], [NT] et l'arc $\overset{\frown}{\text{MT}}$ a la même aire que celle limitée par [M'N'], [N'T'] et l'arc $\overset{\frown}{\text{M'T'}}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMN et OM'N' sont isométriques.
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [NT] et [N'T'] et les arc de cercle $\overset{\frown}{\text{NN'}}$ et $\overset{\frown}{\text{TT'}}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $A=\frac{1}{3}(\pi.\text{ON}^2-\pi.\text{OT}^2)=\frac{\pi}{3}(\text{OB}^2-\text{OA}^2)$.

Or, $\text{OA}^2=a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH ,

$$\text{OB}^2=\text{OH}^2+\text{HB}^2=(\text{HC}+\text{CB})^2+\text{OH}^2=\left(\frac{3}{2}a+4a\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{121a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=31a^2$$

L'aire cherchée est donc $A=\frac{\pi}{3}(31a^2-a^2)=\frac{\pi}{3}\times30a^2$. Donc $\boxed{A=10\pi a^2}$



<u>Exercice National 2 :</u> Le singe sauteur

1. Le nombre 4 est atteignable car $1+2-3+4=4$.
2. Le singe n'a le choix : $1+2-3+4$ et … il est bloqué !!

3. Le nombre 9 est atteignable car on a $1+2+3-4+5-6+7-8+9=9$, sans jamais sortir de l'intervalle [0 ; 9].
4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner $1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16=16$, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0 ; 16].

   L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

   $$1+2+3+.....+n-(n+1)+(n+2)-(n+3)+(n+4)..........-(n^2-1)+n^2 =$$

   $$\frac{n(n+1)}{2}+1+1+1+.................+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2-n}{2}=n^2$$

   d'où n^2 est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle [0 ; n^2].

5. a. Si le nombre n est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou -1 tels que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_-. On a alors : $S_+=S_-$.

   On calcule ensuite :

   $1+2+3+.......+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$

   On en déduit que : $\frac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit $n(n-1)$.

   Donc n est de la forme $4k$ ou $4k+1$. Par exemple 18 n'est pas atteignable.
   b. La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes + – en – + : cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite – (N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4) et l'on trouve N+4.

   On note S(i) la somme partielle des i premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par – (N–1) + N. La séquence commence par 1+2+3 et si le premier signe – apparaît en position i+1 alors S(i) ≥ i+1, car S(3) ≥ 4. On change alors la sous-séquence i – (i+1) en –i+(i+1), ce qui est possible.

   On ajoute la séquence – (N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4), ce qui assure que N+4 est atteignable.

   Question subsidiaire : est-il vrai que les nombres de la forme N = $4k$ ou $4k+1$, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

Exercice Académique 3 : Code confidentiel

1.

	U	*S*	*P*
		0	2282
K = 1	2	0 + 2 × 2 = 4	228
K = 2	8	4 +5 × 8 = 44	22
K = 3	2	44 + 4 × 2 = 52	2
K = 4	2	52 + 7 × 2 = 66	0

Or $66 = 9 \times 7 + 3$: le reste dans la division euclidienne de S par 9 est donc $R = 3$ d'où $C = 9 - 3 = 6$.
La clé est 6.

2. Appelons a le premier chiffre, le code est alors a732.

	U	S	P
		0	$a732$
$K = 1$	2	$0 + 2 \times 2 = 4$	a 73
$K = 2$	3	$4 + 5 \times 3 = 19$	a 7
$K = 3$	7	$19 + 4 \times 7 = 47$	a
$K = 4$	a	$47 + 7 \times a$	0

La clé est $C = 4$ donc le reste dans la division euclidienne de S par 9 est $R = 5$.

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$47 + 7 \times a$	47	54	61	68	75	82	89	96	103	110
Reste dans la division par 9 de $47 + 7 \times a$	2	0	7	5	3	1	8	6	4	2

La seule valeur de a qui donne un reste égal à 5 est $a = 3$. **Le code est donc 3732.**

3.

	U	S	P
		0	$\overline{abba}$
$K = 1$	a	$0 + 2 \times a = 2a$	$\overline{abb}$
$K = 2$	b	$2a + 5 \times b = 2a + 5b$	$\overline{ab}$
$K = 3$	b	$2a + 5b + 4 \times b = 2a + 9b$	a
$K = 4$	a	$2a + 9b + 7 \times a = 9a + 9b$	0

Or $9a + 9b = 9(a + b)$ où a et b sont des entiers donc $a + b$ aussi. Ainsi $9a + 9b$ est divisible par 9, donc le reste dans la division euclidienne de $9a + 9b$ par 9 est $R = 0$ et la clé est donc $C = 9$.
Donc toutes les personnes ayant un code de la forme $\overline{abba}$ ont pour clé 9.

4.

	U	S	P
		0	$\overline{ccdd}$
$K = 1$	d	$0 + 2 \times d = 2d$	$\overline{ccd}$
$K = 2$	d	$2d + 5 \times d = 7d$	$\overline{cc}$
$K = 3$	c	$7d + 4 \times c = 7d + 4c$	c
$K = 4$	c	$7d + 4c + 7 \times c = 7d + 11c$	0

La clé est $C = 4$ donc le reste dans la division euclidienne de $7d + 11c$ par 9 est $R = 5$.
On cherche tout d'abord les différentes valeurs de $7d + 11c$ puis le reste dans la division par 9.

c \ d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	11	22	33	44	55	66	77	88	99
reste	0	2	4	6	8	1	3	**5**	7	0
1	7	18	29	40	51	62	73	84	95	106
reste	7	0	2	4	6	8	1	3	**5**	7
2	14	25	36	47	58	69	80	91	102	113
reste	**5**	7	0	2	4	6	8	1	3	**5**
3	21	32	43	54	65	76	87	98	109	120
reste	3	**5**	7	0	2	4	6	8	1	3
4	28	39	50	61	72	83	94	105	116	127
reste	1	3	**5**	7	0	2	4	6	8	1
5	35	46	57	68	79	90	101	112	123	134
reste	8	1	3	**5**	7	0	2	4	6	8
6	42	53	64	75	86	97	108	119	130	141
reste	6	8	1	3	**5**	7	0	2	4	6
7	49	60	71	82	93	104	115	126	137	148
reste	4	6	8	1	3	**5**	7	0	2	4
8	56	67	78	89	100	111	122	133	144	155
reste	2	4	6	8	1	3	**5**	7	0	2
9	63	74	85	96	107	118	129	140	151	162
reste	0	2	4	6	8	1	3	**5**	7	0

Les codes : 7700 ; 8811 ; 9922 ; 0022 ; 1133 ; 2244 ; 3355 ; 4466 ; 5577 ; 6688 ; 7799 ont pour clé 4.

On peut aussi remarquer que : $7d + 11c = 7d + 2c + 9c$. Donc le reste dans la division par 9 de $7d + 11c$ est le même que le reste dans la division par 9 de $7d + 2c$ (les calculs sont alors un peu plus simples).

<u>Exercice Académique 4 :</u> L'élection du consul de l'empereur

1. a. Vrai : l'unique prétendant obtient 100% des voix.
   b. Vrai : si chacun des deux prétendants obtenait strictement moins de 50% des voix, la somme des deux ne serait pas égale à 100%. Donc l'un des deux a recueilli au moins 50% des voix. En cas d'égalité le plus jeune est élu.
   c. Faux : les trois prétendants peuvent par exemple obtenir 14, 10 et 8 voix dans un conseil de 32 personnes.
2. Soit n le nombre de prétendants et p le nombre de voix obtenues par le meilleur des prétendants.
   Ainsi le prétendant classé 2e a recueilli $\frac{p}{2}$ voix, le prétendant classé 3e $\frac{p}{2^2}$ voix, le nième prétendant $\frac{p}{2^{n-1}}$ voix.
   Le nombre total de voix, qui est égal à l'effectif N du conseil, est donc :

$$N = p + \frac{p}{2} + \frac{p}{2^2} + ... + \frac{p}{2^{n-1}} = p\times(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}) = p\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = p\times(2 - \frac{1}{2^{n-1}}) < 2p \quad (n \geq 3)$$

Le pourcentage de voix obtenues par le meilleur prétendant est : $\frac{p}{N} > \frac{1}{2}$.

Le meilleur prétendant a obtenu plus de 50% des voix : **il est élu au premier tour.**

3. Soit n le nombre de prétendants et p le nombre de voix obtenues par le meilleur des prétendants. Ainsi le prétendant classé 2e a recueilli $\frac{3}{4}p$ voix, le prétendant classé 3e $(\frac{3}{4})^2 p$ voix, …, le nième prétendant $(\frac{3}{4})^{n-1}p$ voix.

   Le nombre total de voix, qui est égal à l'effectif du conseil, est donc :

$$p + \frac{3}{4}p + (\frac{3}{4})^2 p + ... + (\frac{3}{4})^{n-1}p = p\times(1 + \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 + ... + (\frac{3}{4})^{n-1}) = p\times\frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-\frac{3}{4}} = p\times 4\,(1-(\frac{3}{4})^n)$$

   Le pourcentage de voix obtenues par le meilleur prétendant est :

$$\frac{p}{p\times 4\,(1-(\frac{3}{4})^n)} = \frac{1}{4\,(1-(\frac{3}{4})^n)}$$

   La suite géométrique de terme général $(\frac{3}{4})^n$ est strictement décroissante car $0 < \frac{3}{4} < 1$.

   Donc pour tout $n \geq 3$, $(\frac{3}{4})^n \leq \frac{27}{64}$ d'où $4\,(1-(\frac{3}{4})^n) \geq \frac{37}{16}$ d'où $\frac{1}{4\,(1-(\frac{3}{4})^n)} \leq \frac{16}{37} < \frac{1}{2}$.

   Le meilleur prétendant n'a pas obtenu 50% des voix : **un second tour est nécessaire.**

<u>Exercice Académique 4 :</u> **Tous divisibles par 222…et plus**

1) On peut écrire 6 nombres à l'aide des chiffres 1, 2 et 3 :
   123-132-213-231-312 et 321.

La somme S obtenue est égale à 1332. Or 1332 = 6×222. (6 représentant 1 + 2 + 3)

2) En recommençant avec les chiffres 4, 7 et 9 par exemple, on a :

S = 479 + 497 + 749 + 794 + 974 + 947
S = 4 440 = 20×222 (20 représentant 4 + 7 + 9) La propriété est encore vérifiée.

3) Justification :
On considère a, b et c trois chiffres non nuls et distincts deux à deux.
La somme S obtenue à l'aide des six nombres que l'on peut former est :
S = 200a + 200b + 200c + 20a + 20b + 20c + 2a + 2b + 2c
Donc S = 2 (a +b +c) (100 + 10 + 1).

Par suite $\boxed{S = 222 \times (a + b + c)}$ et **S est toujours divisible par 222.**

4) On considère maintenant a, b, c et d quatre chiffres non nuls et distincts deux à deux.

On peut écrire 24 nombres à l'aide de ces 4 chiffres distincts.
La somme S obtenue à l'aide des 24 nombres sera égale à :
S = 6 (a +b +c + d) (1000 + 100 + 10 + 1).

D'où $\boxed{S = 6\,666 \times (a + b + c + d)}$

La somme S des nombres que l'on peut former avec quatre chiffres non nuls et distincts deux à deux est toujours un multiple de 6666. S est le produit de 6666 par la somme des 4 chiffres utilisés.
