SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CAEN

Classes de première S • 2014

SESSION 2014

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE, SÉRIE S

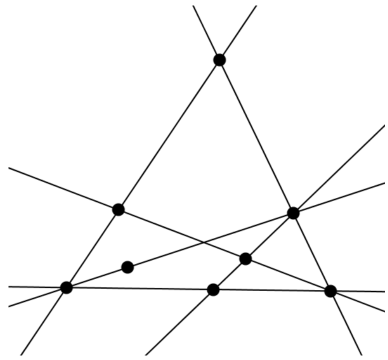
Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.
Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu le plus grand compte, dans l'appréciation des copies, de la clarté et de la rigueur du raisonnement.

EXERCICE 1 FIGURES ÉQUILIBRÉES

La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.

Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.



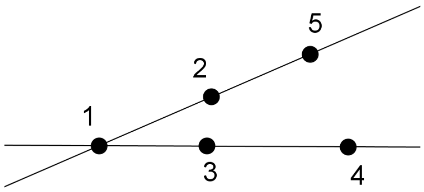
1. Construire une figure équilibrée constituée :

a) de 7 points marqués et 5 droites ;

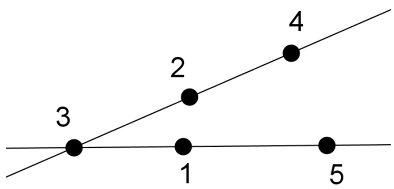
b) de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.
Cette numérotation est alors dite ***magique*** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



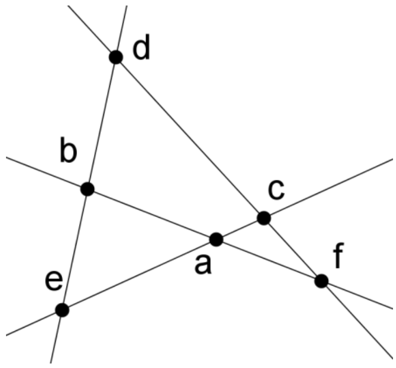
$K = 8$



$K = 9$

Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

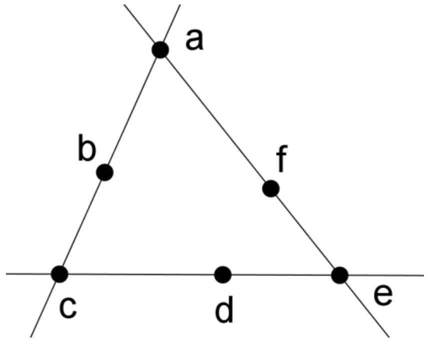
3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* sur la figure.



a) Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.

b) Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* sur la figure.

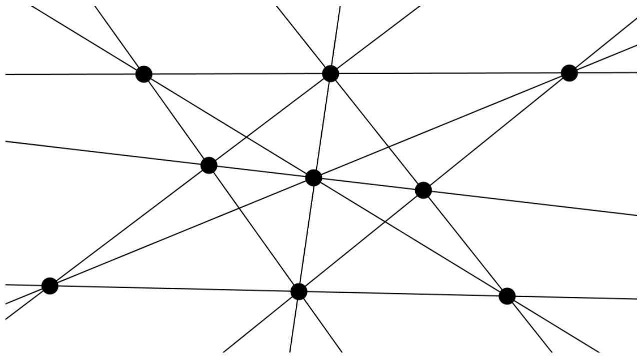


a) Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.

b) Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.

c) Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.

5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.
Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



EXERCICE 2 : LE PLUS COURT POSSIBLE

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d’un carré dont le côté mesure 100 km.
La Direction Départementale de l’Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A
« On pourrait construire des routes allant d’Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l’assistant n°1.
« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d’Alençon à Célançon et l’autre de Délançon à Bélançon » propose l’assistant n°2.
« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l’assistant n°3.

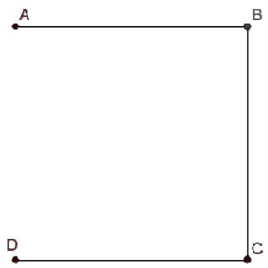


fig. 1
Assistant n°1

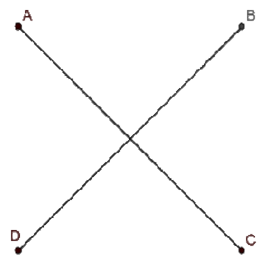


fig. 2
Assistant n°2

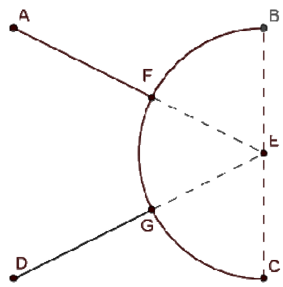


fig. 3
Assistant n°3

1. **1.** Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?
2. **2.** Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :
   « On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

   Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

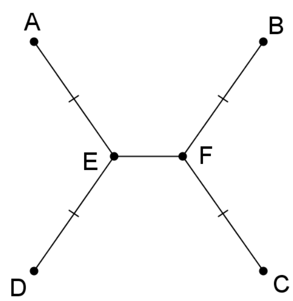


fig. 4

Partie B
Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :
Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :
on a toujours $AB + BC \geq AC$;
on a l’égalité $AB + BC = AC$ si, et seulement si, B appartient au segment [AC].

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.

On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100km de coté, comme dans le dessin suivant.

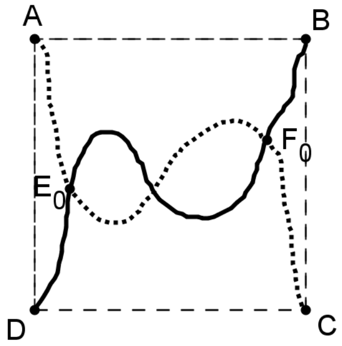


fig. 5

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).

Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

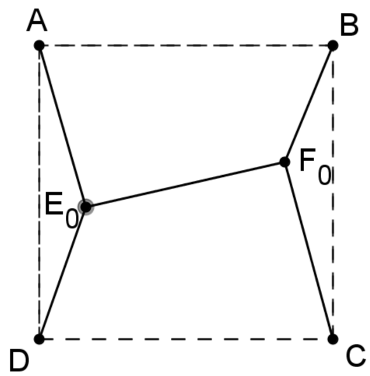


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

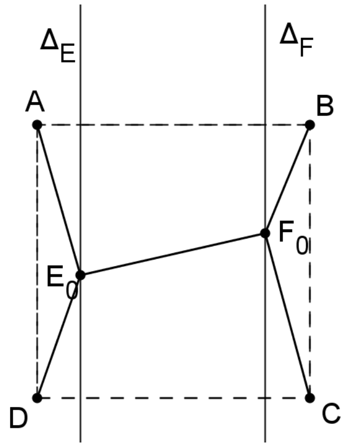


fig. 7

a. Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.
On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b. Montrer que $EF \leq E_0F_0$.

c. Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

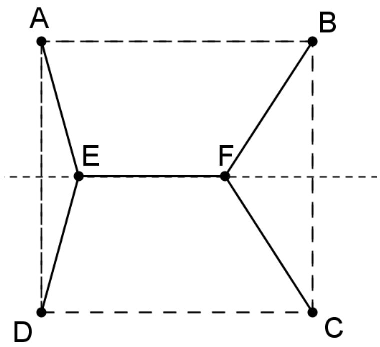


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

a. Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].

b. D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).
Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

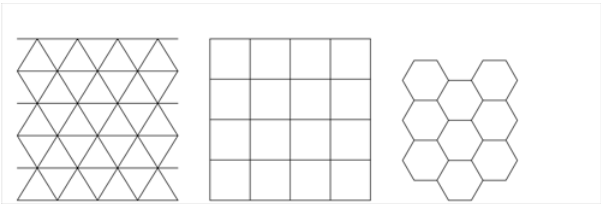
c. Quelle est alors la valeur de l'angle DEA ?

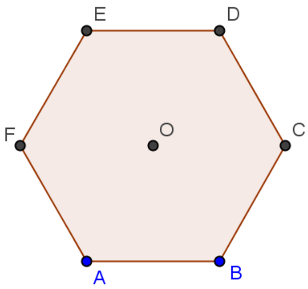
EXERCICE 3 : ETUDE DE L'ALVEOLE D'ABEILLE

Présentation du problème, quelques généralités sur l'alvéole d'abeille

Les alvéoles, construits en cire par les abeilles ouvrières afin de stocker le miel et le pollen ou les œufs et les larves, sont des prismes juxtaposés qui constituent le gâteau de cire. La section droite de chacun des prismes est un hexagone régulier dont chaque côté mesure environ 3 mm.

I Pourquoi avoir des alvéoles hexagonaux ?



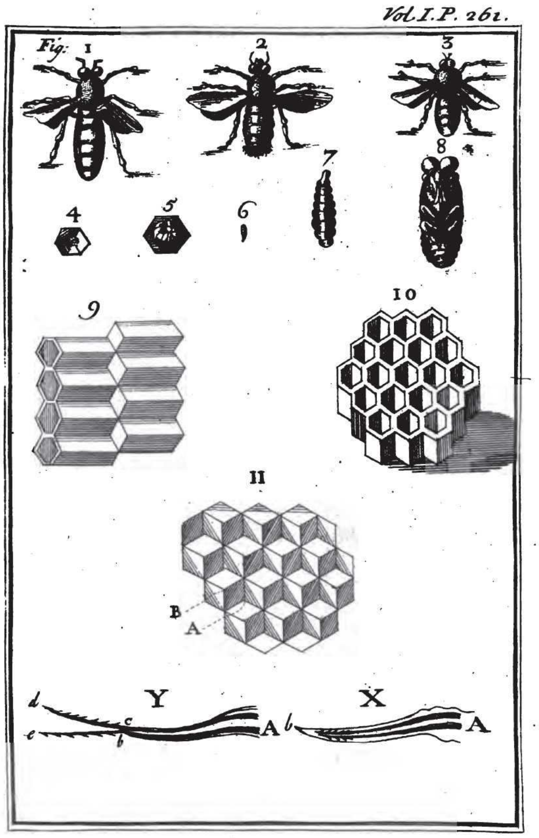


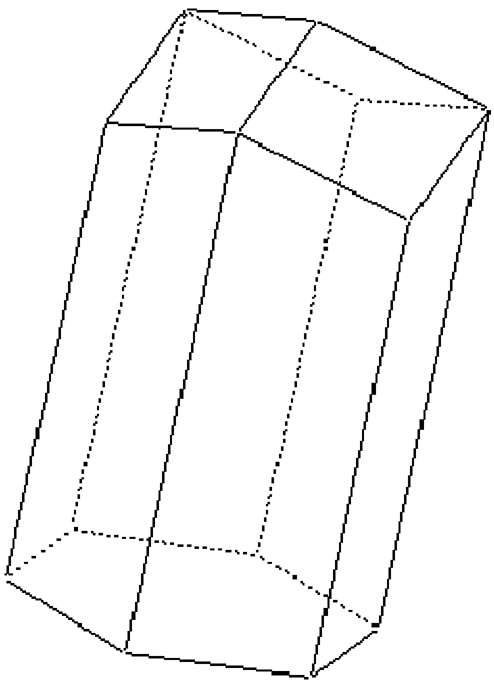
Le plan peut être pavé de polygones réguliers avec des triangles équilatéraux ou des carrés ou des hexagones.
On constate que la partie visible du gâteau de cire est constituée d'hexagones.
On souhaite comparer l'intérêt d'utiliser une cellule hexagonale par rapport à une cellule carrée.

1) Si une cellule carrée ABCD a pour aire 1, déterminer son périmètre.
2) Si une cellule hexagonale ABCDEF a pour aire 1, déterminer son périmètre exact.
3) La quantité de cire utilisée est proportionnelle au périmètre de la cellule. Calculer le pourcentage d'économie si on utilise une cellule hexagonale de même aire à la place d'une cellule carrée. On arrondira le résultat au % près.

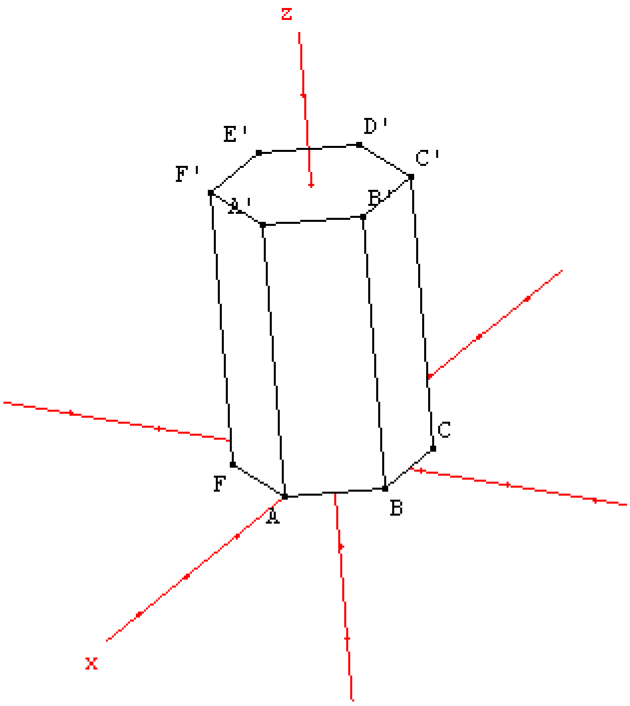
II Etude du fond de l'alvéole

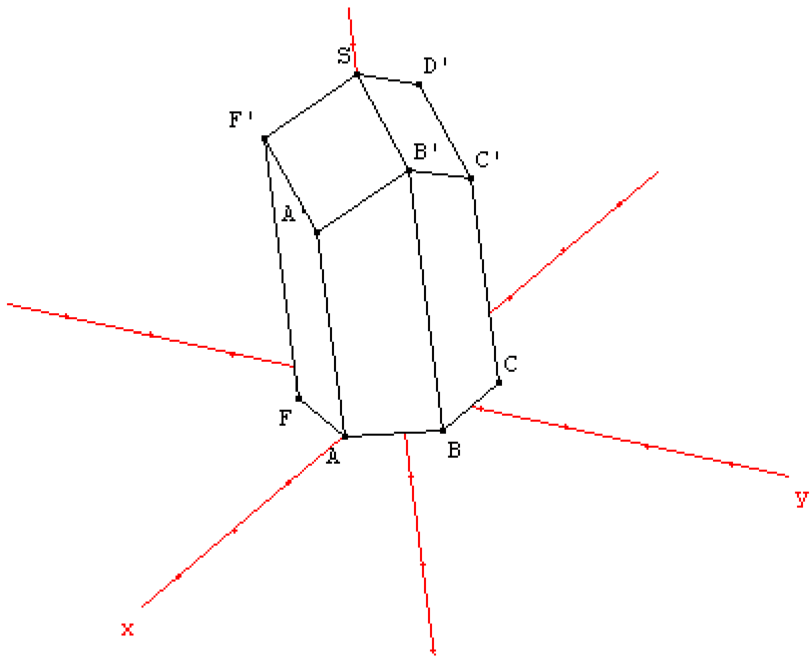
La profondeur de chaque cellule est de 11,5 mm environ. Contrairement à ce qu'on pourrait supposer, le fond de l'alvéole n'est pas plat. Chaque cellule est adossée par le fond à trois autres cellules au moyen d'une surface formée de trois losanges identiques. Cette description est illustrée sur la planche ci-dessous datant de 1726 et une représentation en perspective d'un alvéole.



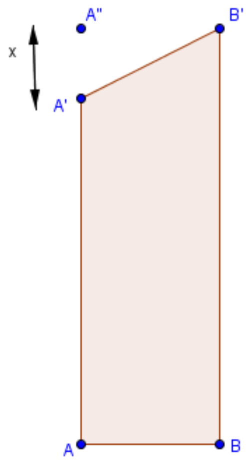


On suppose d'abord qu'on a un prisme hexagonal de hauteur 3 dont chaque arête de l'hexagone mesure 1.





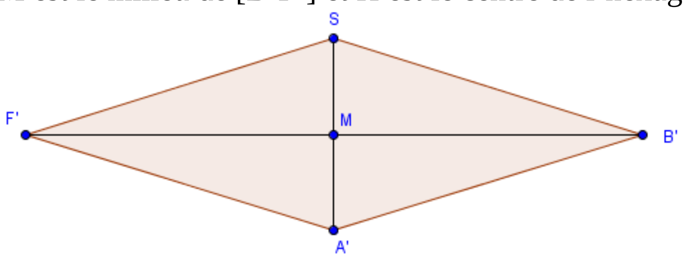
On admettra qu'il est possible de modifier la forme du solide de gauche <u>en conservant le même volume</u>.
On peut imaginer qu'on « tire » le centre d'un hexagone A'B'C'D'E'F' vers le haut dans l'axe (Oz) du prisme, c'est-à-dire que S « monte » de x et par ailleurs A', C', E' « descendent » de x.
On obtient trois losanges accolés : SF'A'B', SB'C'D', SD'E'F' dont on souhaite déterminer finalement les mesures des angles pour minimiser l'aire latérale.



Les points A'', C'', E'' correspondent aux positions initiales de A', C', E'
On désigne par x = A'A'' le paramètre permettant de déplacer A', C', E' et S.

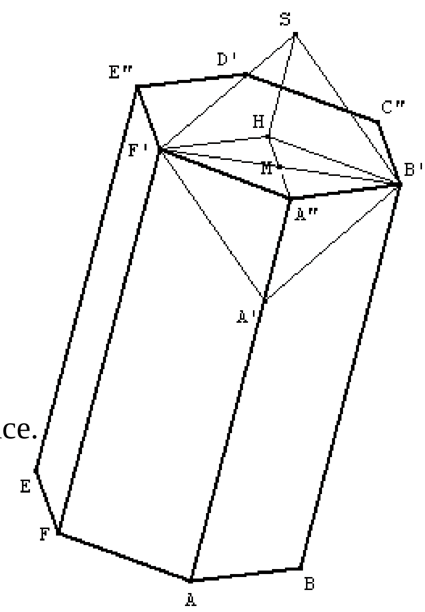
1) On suppose que BB' = 3 et AB = 1
   Calculer l'aire d'une face trapézoïdale en fonction de x = A'A''.

2) M est le milieu de [B'F'] et H est le centre de l'hexagone A'B'C'D'E'F'.



a) Déterminer la longueur MS en fonction de x ainsi que MB'

b) Déduire de ce qui précède l'aire du losange F'A'B'S en fonction de x



3) Montrer que l'aire totale des neuf faces de l'alvéole en fonction de x

est donnée par $S(x) = 18 - 3x + 3\sqrt{0{,}75 + 3x^2}$

4) Déterminer avec la calculatrice une valeur approchée de x minimisant la surface.

On arrondira à 0,001 près.

5) Déterminer une valeur approchée au degré près des angles $\widehat{F'SB'}$ et $\widehat{SF'A'}$.

EXERCICE 4 : RECTANGLES INSCRITS

Le but de cet exercice est de déterminer la longueur maximale d'un rectangle *ABCD* qu'on peut inscrire dans un carré, un cercle, un losange ou un rectangle. La largeur du rectangle *ABCD* est fixe : *AB* = 2 cm.

1) On veut inscrire le rectangle *ABCD* dans un carré *IJKL* avec *IJ* = 20 cm. Quelle est la longueur maximale du rectangle *ABCD* ?
2) On veut inscrire le rectangle *ABCD* dans un cercle de rayon 10 cm. Quelle est la longueur maximale du rectangle *ABCD* ?
3) On veut inscrire le rectangle *ABCD* dans un losange *RSTV* dont les diagonales mesurent 28 cm et 16 cm. Quelle est la longueur maximale du rectangle *ABCD* ?
4) On veut inscrire le rectangle *ABCD* dans un rectangle *EFGH* de 30 cm de longueur et 24 cm de largeur. Quelle est la longueur maximale du rectangle *ABCD* ?

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CAEN

SESSION 2014

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Sujet Académique 3 : Étude de l'alvéole d'abeille
Eléments de correction

I

1) A(ABCD) = 1 donc AB = 1 donc P(ABCD) = $4 \times 1 = 4$

2) ABO est un triangle équilatéral de hauteur $AB\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $A(ABO) = \frac{1}{6} \times A(ABCDEF) = \frac{1}{6}$

donc $A(ABO) = AB \times AB\times\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ donc $AB^2 = \frac{4}{6\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ $\qquad AB = \frac{1}{3}(2\sqrt{3})^{0,5}$

d'où $P(ABCDEF) = 6 \times \frac{1}{3}(2\sqrt{3})^{0,5} = 2\,(2\sqrt{3})^{0,5} \approx 3{,}722$

3) $\quad (4 - 2\,(2\sqrt{3})^{0,5}) \times \frac{1}{4} \approx 0{,}07$ L'économie est d'environ 7 %

II

1) A(ABB''A') = $0{,}5 \times AB \times [AA'+B'B''] = 0{,}5 \times 1 \times [\,3 + (3-x)\,] = 3 - 0{,}5x$

2) A''B'C''D'E''F' est un losange de centre H donc HF' = HB' = F'A'' = A''B' = 1
donc HF'A''B' est un losange. M est le milieu de [B'F'], c'est donc le milieu de [SA'']

SH = 0 ,5

a)

- SHM est un triangle rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore,
  $SM^2 = SH^2 + HM^2$
  $SM = \sqrt{x^2 + 0{,}25}$
- [MB'] est une hauteur d'un triangle équilatéral A''B'H d'arête 1 donc $MB' = 0{,}5\sqrt{3}$

b) $A(F'A'B'S) = SM \times MB' \times 2 = \sqrt{x^2+0{,}25} \times 0{,}5\sqrt{3} \times 2 = \sqrt{3x^2 + 0{,}75}$

3) La surface est composée de 6 trapèzes et 3 losanges.
$S(x) = 6 \times (\,3 - 0{,}5x\,) + 3\times\sqrt{3x^2+0{,}75} = 18 - 3x + 3\sqrt{3x^2+0{,}75}$

4) A l'aide de la calculatrice, on obtient que le minimum de S est obtenu pour $x \approx 0{,}35355339$

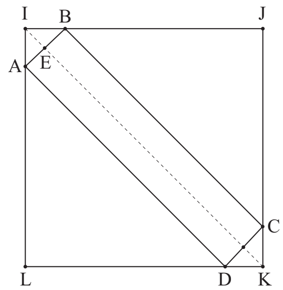
$x_0 \approx 0{,}354$ $\qquad$ *remarque* : $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$

5) MSB' est un triangle rectangle en M donc $\tan \widehat{B'SM} = \frac{MB'}{MS}$

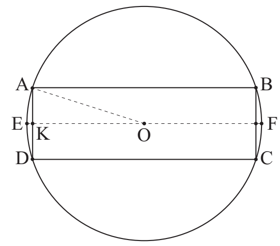
d'où $\widehat{F'SB'} = 2 \times \widehat{B'SM} = 2 \times \text{Arctan}\left(\frac{MB'}{MS}\right) = 2 \times \text{Arctan}\left(\frac{0{,}5\sqrt{3}}{\sqrt{{x_0}^2 + 0{,}25}}\right) \approx 109°$ $\qquad$ (≈ 109,47122)

$180 - 109 = 71$ donc $\widehat{SF'A'} \approx 71°$ $\qquad$ (≈ 70,52878)

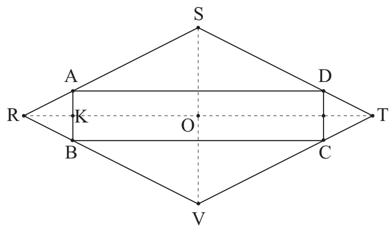
Sujet Académique 4 : Rectangles inscrits
Eléments de correction



1. Le triangle AIE est rectangle et isocèle de sommet E.
   Alors $IE = AE = 1$ cm.
   Ainsi
   $$BC = IK - 2IE = \sqrt{IJ^2 + JK^2} - 2IE = \sqrt{2 \times 20^2} - 2 = 20\sqrt{2} - 2 \text{ cm}.$$

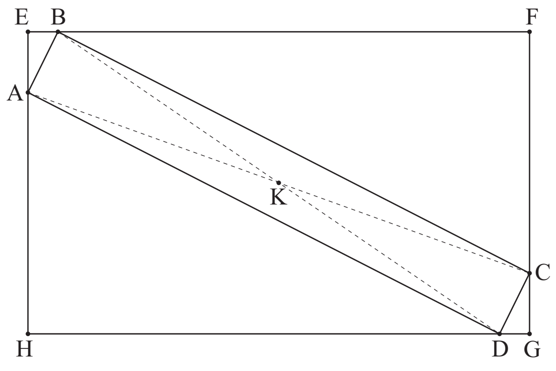


2. Le triangle OAK est rectangle en K, alors
   $$KO = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 1^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}.$$
   Alors $DC = 2KO = 6\sqrt{11}$ cm.



3. Les triangles RAK et RSO forment une configuration de Thalès, donc
   $$\frac{RK}{RO} = \frac{AK}{SO}, \text{ soit } \frac{RK}{14} = \frac{1}{8} \text{ ou } RK = 1,75 \text{ cm}.$$
   Ainsi $BC = RT - 2RK = 28 - 2 \times 1,75 = 24,5$ cm.

4. Pour des raisons de symétrie, le centre du rectangle ABCD est le même que celui du rectangle EFGH. On pose $AE = GC = x$ et $EB = DG = y$.



   Alors on a : $\tan\widehat{FBC} = \dfrac{24-x}{30-y}$, $\tan\widehat{EAB} = \dfrac{y}{x}$ et $x^2 + y^2 = 2^2 = 4$.
   Puisque $\widehat{FBC} = \widehat{EAB}$, alors $\dfrac{y}{x} = \dfrac{24-x}{30-y}$, ce qui donne $30y - y^2 = 24x - x^2$.
   Puisque $x^2 + y^2 = 4$ alors $y = \sqrt{4 - x^2}$.
   Ainsi $30\sqrt{4-x^2} - (4 - x^2) = 24x - x^2$ et $30\sqrt{4-x^2} - 4 - 24x + 2x^2 = 0$.
   En traçant la courbe de la fonction f définie par $f(x) \approx 30\sqrt{4-x^2} - 4 - 24x + 2x^2$, on obtient $f(x) = 0$ pour $x \approx 1,58$ cm. Alors $y = \sqrt{4-x^2} \approx 1,23$.
   Et $BC = \sqrt{(24-x)^2 + (30-y)^2} \approx 36,47$ cm.