SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CAEN

Classes de première S • 2013

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE, SÉRIE S

Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.
Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu le plus grand compte, dans l'appréciation des copies, de la clarté et de la rigueur du raisonnement.

EXERCICE 1
Les nombres Harshad

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.

Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a. Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a. Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a. Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. a. Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. a. En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. a. Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.

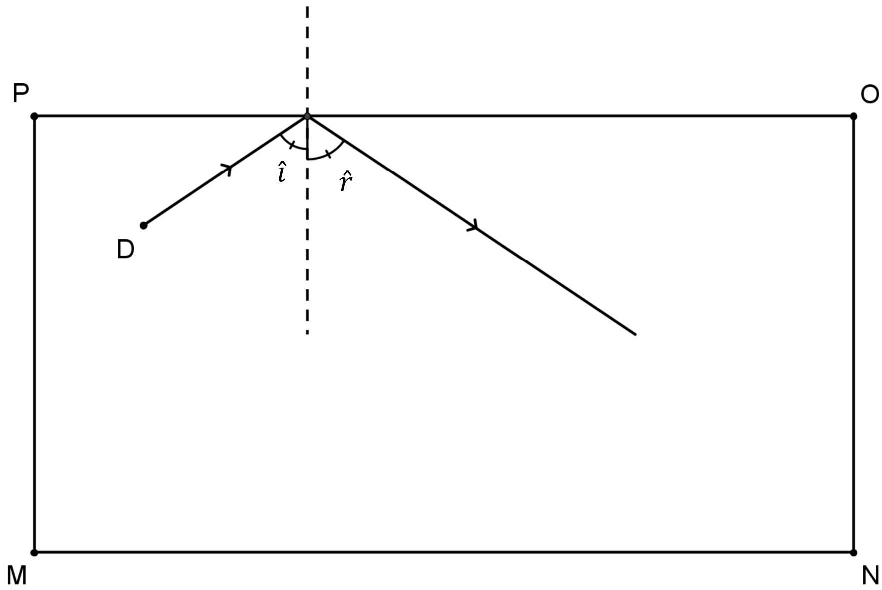
Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.

Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.
En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

EXERCICE 2
Le billard rectangulaire

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{\imath}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\hat{\imath} = \hat{r}$).



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

   a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

   b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

   c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

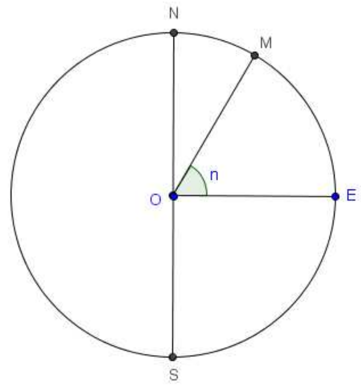
2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

   a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

   b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

EXERCICE 3
Les parallèles terrestres.

On suppose que la terre vérifie les propriétés suivantes :



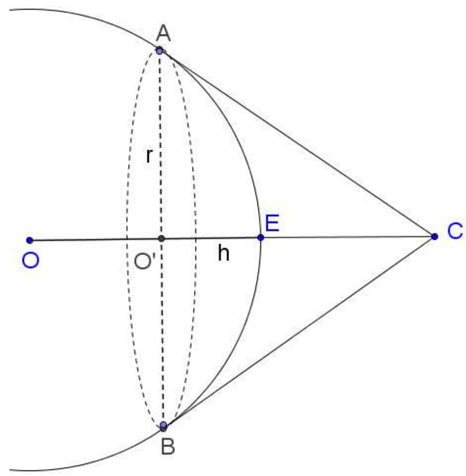
a) Elle tourne autour d'un axe (NS) en 24 h.
b) Son rayon est de 6400 km.
c) Elle est parfaitement sphérique.
d) Le nième parallèle est l'ensemble des points M telle que $E\hat{O}M = n$ (en degrés).

1- Quelle est en km/h la vitesse de rotation maximale d'un point situé à la surface de la terre ?

2- Calculer en km/h la vitesse de rotation de la ville de Paris, située sur le 48-ème parallèle.

3- Quels sont les parallèles dont les points tournent à la vitesse du son, soit 330 m/s ?

4- La station spatiale internationale tourne autour de la terre à une altitude moyenne de 400 km. A son passage à la verticale de l'équateur, elle forme le sommet d'un cône tronqué, dont la base est une calotte sphérique de la surface de la terre.
Quelle portion de la surface de la terre est visible depuis la station spatiale ?

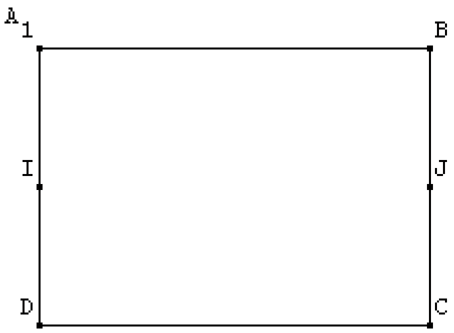


Rappels :

- La surface d'une calotte sphérique de rayon $r = AO'$ et de hauteur $h = EO'$ est $S(calotte) = \pi(r^2 + h^2)$.
- La surface d'une sphère de rayon *R* est $S(sphère) = 4\pi R^2$.

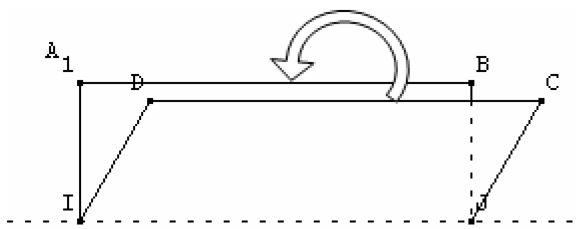
EXERCICE 4
L'avion

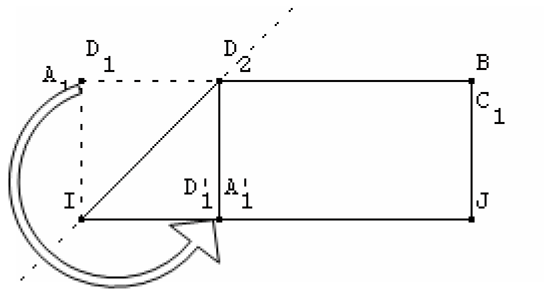
Eléonore s'ennuie !
Elle se met à construire des avions en papier. Voici sa méthode :



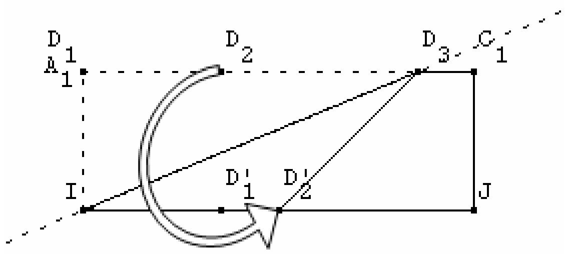
1 – Elle dispose une feuille de papier rectangulaire de format A4 (21 *cm* x 29,7 *cm*) dans la position paysage.
Soit A_1BCD ce rectangle. Soient I et J les milieux respectifs de $[A_1D]$ et de $[BC]$.

2 – Elle plie la feuille de papier dans le sens de la longueur, le long de (IJ).
Soit D_1 la nouvelle position de *D*. D_1 et A_1 sont confondus.
Soit C_1 la nouvelle position de *C*. C_1 et B sont confondus.

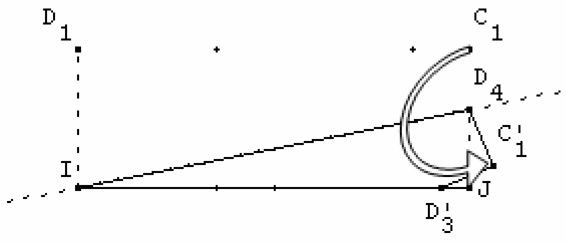




3 – Elle replie le coin supérieur gauche, D_1 sur (IJ) en D'_1. L'axe de pliage passant par I coupe (A_1B) en D_2.
Elle fait de même avec A_1, de l'autre côté de la feuille : elle replie A_1 sur (IJ) en A'_1. L'axe de pliage coupe (A_1B) en A_2.
D'_1 et A'_1 sont confondus et D_2 et A_2 sont confondus.



4 – Elle replie D_2 sur (IJ) en D'_2. L'axe de pliage passant par I coupe (A_1B) en D_3.
Elle fait de même avec A_2, de l'autre côté de la feuille : elle replie A_2 sur (IJ) en A'_2. L'axe de pliage coupe (A_1B) en A_3.
D'_2 et A'_2 sont confondus et D_3 et A_3 sont confondus.



5 – Elle replie D_3 sur (IJ) en D'_3. L'axe de pliage passant par I coupe (BJ) en D_4.

Elle fait de même avec A_3, de l'autre côté de la feuille : elle replie A_3 sur (IJ) en A'_3. L'axe de pliage coupe (BJ) en A_4.

D'_3 et A'_3 sont confondus et D_4 et A_4 sont confondus.

Soit C'_1 la nouvelle position de C_1 .

6 – Eléonore déplie partiellement le dernier pliage de telle façon que les plans ID_4B' et ID_4J soient orthogonaux.

L'avion est prêt.

On considère que :
- les ailes de l'avion sont les quadrilatères $ID_3C_1D_4$ et IA_3BA_4,
- le fuselage est le triangle IJD_4 .

Vous pouvez réaliser ce pliage en vous aidant des feuilles de papier A_4 à votre disposition.

1ère partie

1 – Quelle est la mesure des angles $J\hat{I}D_2$, $J\hat{I}D_3$ et $J\hat{I}D_4$?

2 – Montrer que $D'_3 \in [IJ]$.

3 – Quelle est l'aire du fuselage ? Des ailes ?

2nde partie

Eléonore dispose maintenant d'une feuille de papier rectangulaire de dimensions : $L \times \ell$.
Après avoir disposé la feuille de papier dans le format paysage et après l'avoir plié en deux le long de la plus grande médiane du rectangle, on commence à compter le nombre de pliages en utilisant le même protocole de pliage que précédemment. Elle s'arrête lorsque l'axe de pliage coupe la feuille de papier sur $[BJ]$.

1 – Est-il possible d'avoir un seul pliage ? Deux pliages ? Quand cela pourrait-il arriver ?

2 – Voici un algorithme :

Variables : - ℓ un réel - L un réel - n un entier Entrée : Demander la valeur de ℓ Demander la valeur de L Initialisation : Affecter à n la valeur 1 Traitement : Tant que $2\tan\frac{90°}{2^n} > \frac{\ell}{L}$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin Tant que Sortie : Afficher n

a) Qu'affiche-t-il pour $L = 29{,}7cm$ et $l = 21cm$?

b) Quel est l'intérêt de cet Algorithme pour Eléonore ?

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CAEN

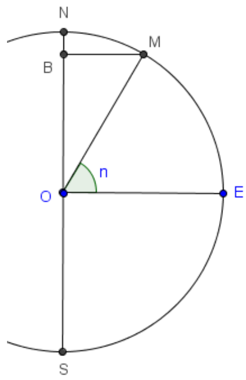
SESSION 2013

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Sujet Académique 3 : Les parallèles terrestres
Eléments de correction

1- Les points qui ont une vitesse de rotation maximale se trouvent sur l'équateur. La vitesse est
$V(équateur) = \frac{d}{t} = \frac{2\pi R}{24} \approx 1675,5$ km/h.

2- Soit B le point d'intersection de (ON) et la parallèle à (OE) passant par M. Le périmètre du n-ème parallèle est $P = 2\pi \times BM$. Or on a $\sin M\hat{O}B = \frac{BM}{OM}$, donc $\sin(90-n) = \frac{BM}{6400}$.



Alors $BM = 6400\sin(90-n)$. Le périmètre est donc

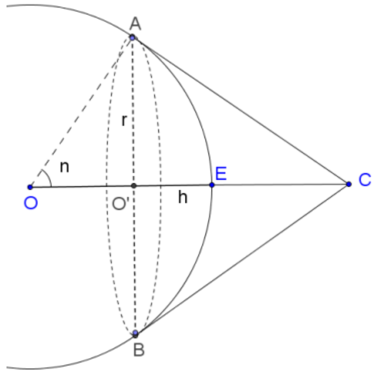
$$P = 2\pi \times 6400\sin(90-n) = 12800\pi\sin(90-48) \approx 26907,3 \text{ km.}$$

La vitesse de rotation de Paris est donc

$$v = \frac{d}{t} = \frac{26907,3}{24} = 1121,14 \text{ km/h.}$$

3- Si la vitesse de rotation est $v = 330 \times \frac{3600}{1000} = 1188$ km/h,
alors le périmètre du n-ème parallèle correspondant est
$P = d = vt = 1188 \times 24 = 28512$.
D'autre part, $P = 2\pi \times 6400\sin(90-n)$. Ainsi
$\sin(90-n) = \frac{28512}{2\pi \times 6400} \approx 0,709$, ce qui donne $90-n \approx \arcsin(0,709) \approx 45,16°$ et donc
$n \approx 90 - 45,16 \approx 44.84°$.

4-



Le pourtour du secteur visible par la station spatiale est un cercle de centre O' et de diamètre $[AB]$. Les points A et B sont sur deux parallèles symétriques, d'angles n°.

<u>Calcul de *n*.</u>
La droite (AC) est tangente au cercle en A. On a
$\cos(n) = \frac{OA}{OC} = \frac{6400}{6400+400} = \frac{6400}{6800}$. Alors $n \approx 19,75°$.

<u>Calcul du rayon r.</u>
D'autre part, on a $\sin(n) = \frac{AO'}{OA}$, soit $\sin(19,75) = \frac{AO'}{6400}$ et donc
$AO' = 6400\sin(19,75) \approx 2162,7$ km.
Le rayon de la calotte sphérique est donc $r = AO' \approx 2162,7$ km.

<u>Calcul de la hauteur *h*.</u>
On a aussi $\cos(n) = \frac{OO'}{OA}$, soit $\cos(19,75) = \frac{OO'}{6400}$ et donc
$OO' = 6400\cos(19,75) \approx 6023,5$ km.
La hauteur de la calotte sphérique est donc
$h = OE - OO' \approx 6400 - 6023,5 \approx 376,5$ km.

<u>Calcul de la surface de la calotte.</u>
La surface d'une calotte sphérique de rayon *r* et de hauteur *h* est
$S(calotte) = \pi(r^2 + h^2) \approx \pi(2162,7^2 + 376,5^2) \approx 1,5 \times 10^7$ km^2.

Calcul de la surface de la terre.

La surface de la terre est $S(terre) = 4\pi R^2 \approx 4\pi \times 6400^2 \approx 5{,}1 \times 10^8$ km^2.

Calcul du pourcentage.

Ainsi, le pourcentage de la calotte sphérique par rapport à la terre est $\frac{S(calotte)}{S(terre)} =\approx \frac{1{,}5\times 10^7}{5{,}1\times 10^8} \approx 0.03$, soit 3%.

Sujet Académique 4 : L'avion
Eléments de correction

1ère partie

1 – Les angles $J\hat{I}D_2$, $J\hat{I}D_3$ et $J\hat{I}D_4$ mesurent respectivement $\frac{90}{2} = 45°$, $\frac{90}{2^2} = 22{,}5°$ et $\frac{90}{2^3} = 11{,}25°$.

2 - $D'_3 \in [IJ] \Leftrightarrow ID_3 \leq 29{,}7cm$ car $ID'_3 = ID_3$. Or $ID_3 = \frac{ID_1}{\cos D_1\hat{I}D_3} = \frac{10{,}5}{\cos(90-22{,}5)} \approx 27{,}44cm$.

3 – Soit A_f l'aire du fuselage . Elle correspond à celle du triangle IJD_4 .

$$A_f = \frac{IJ \times JD_4}{2} = \frac{29{,}7 \times 29{,}7 \times \tan 11{,}25°}{2} \approx 87{,}73cm^2$$

Soit A_a l'aire des ailes . Elle correspond à deux fois celle du trapèze $ID_4B'D'_3$. Or celle-ci correspond à l'aire du rectangle $IJBD_1$ à laquelle on retranche l'aire du triangle ID_1D_3 et celle du triangle IJD_4 .

On a donc :

$$A_e = \left(IJ \times ID_1 - \frac{ID_1 \times D_1D_3}{2} - \frac{IJ \times JD_4}{2} \right) \times 2 = \left(IJ \times ID_1 - \frac{ID_1 \times ID_3 \times \cos D_1D_3I}{2} - A_f \right) \times 2$$

$$\approx \left(10{,}5 \times 29{,}7 - \frac{27{,}44 \times \cos 22{,}5° \times 10{,}5}{2} - 87{,}73 \right) \times 2 \approx 182{,}05cm^2$$

2nde partie

1 – On ne peut pas avoir l'axe de pliage coupant $[BJ]$ dès le premier pliage car on aurait :

$\tan 45° < \frac{l/2}{L}$ c'est-à-dire $2L < l$. Ce qui est impossible car $L > l$.

Cependant on peut avoir l'axe de pliage coupant $[BJ]$ au deuxième pliage car on aurait :

$\tan \frac{45°}{2} < \frac{l/2}{L}$ c'est-à-dire $2L \times \tan \frac{45°}{2} < l$. Soit $0{,}83 \times L < l < L$.

2 - Pour que l'axe de pliage coupe la feuille de papier sur $[BJ]$en exactement n pliages. Il faut que :

$\tan \frac{45°}{2^n} < \frac{l/2}{L} < \tan \frac{45°}{2^{n-1}}$. C'est-à-dire $2\tan \frac{45°}{2^n} < \frac{l}{L} < 2\tan \frac{45°}{2^{n-1}}$

3 –

Entrée : - l un réel
- L un réel
- n un entier

Initialisation : Demander la valeur de l
Demander la valeur de L
Affecter à n la valeur 0

Traitement : Tant que $2\tan \frac{45°}{2^n} > \frac{l}{L}$
Affecter à n la valeur $n + 1$

Sortie : Afficher n