SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CAEN

Classes de première S • 2012

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE, SÉRIE S

Durée : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.
Il est rappelé aux candidats qu'il sera tenu le plus grand compte, dans l'appréciation des copies, de la clarté et de la rigueur du raisonnement.

EXERCICE 1

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

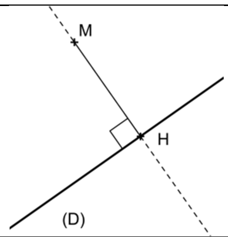
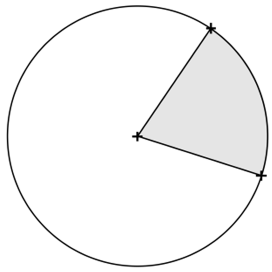
- ***a.*** Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
- ***b.*** Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
- ***c.*** Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
- ***d.*** Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. Soit n un entier *digisible* quelconque.

- ***a.*** Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
- ***b.*** Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
- ***c.*** Déterminer le plus grand entier *digisible*.

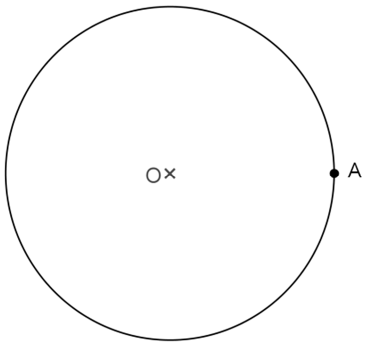
EXERCICE 2

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\frac{\pi \alpha R^2}{360}$. *Dans la partie II de l'exercice, on considèrera la distance d'un point M à* ***un segment*** *[BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



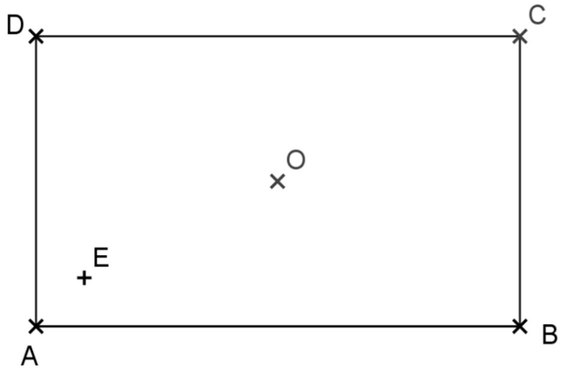
1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.
Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

2. ***a.*** Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].

b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

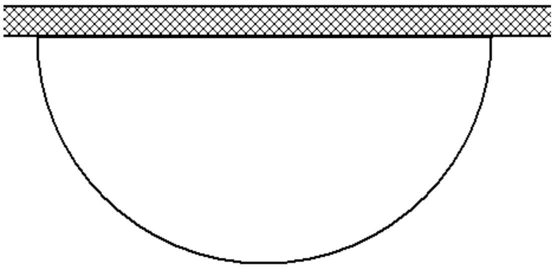
5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

EXERCICE 3

Un fermier dispose d'un grand terrain le long d'un mur et d'un grillage. Le long de ce même mur, il veut réaliser un poulailler sous forme semi-circulaire ou polygonale. Le grillage ne sera pas posé contre le mur.

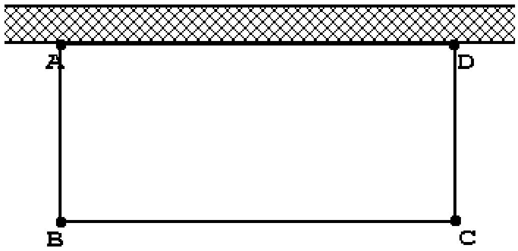
Partie A. Forme semi-circulaire.

Dans cette partie, le fermier veut réaliser un poulailler sous forme de demi-cercle.
Quelle est la longueur minimale du grillage si on veut clôturer une surface de 127 m^2 ?
Donner une valeur approchée à 0,1 m près.



Partie B. Forme rectangulaire.

Dans cette partie, le fermier veut réaliser un poulailler sous forme rectangulaire.

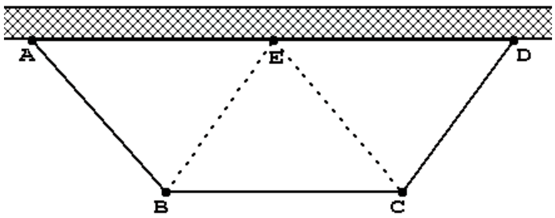


1. Le grillage est long de 108 m.
Comment disposer ce grillage pour que l'aire du poulailler soit la plus grande possible ?

2. Le fermier veut clôturer une surface de 288 m^2.
Quelle est la longueur minimale du grillage pour réaliser ce poulailler ?

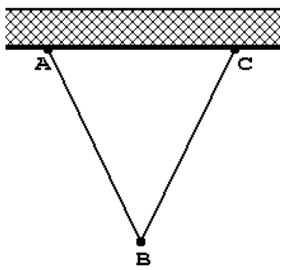
Partie C. Forme de trapèze.

Dans cette partie, le fermier veut réaliser un poulailler sous la forme d'un trapèze composé de trois triangles équilatéraux.
Quelle est l'aire du poulailler sachant que le grillage a une longueur de 120 m (arrondir le résultat final au m²) ?



Partie D. Forme de triangle isocèle.

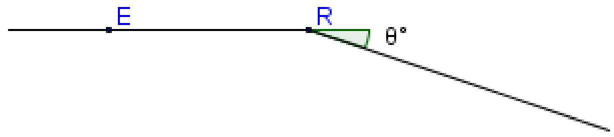
Dans cette partie, le fermier veut réaliser un poulailler sous la forme d'un triangle isocèle de sommet B.
Quelle est l'aire maximale du poulailler sachant que le grillage a une longueur de 88 m ?



(On pourra utiliser l'angle au sommet et le fait que $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{2}$.)

EXERCICE 4

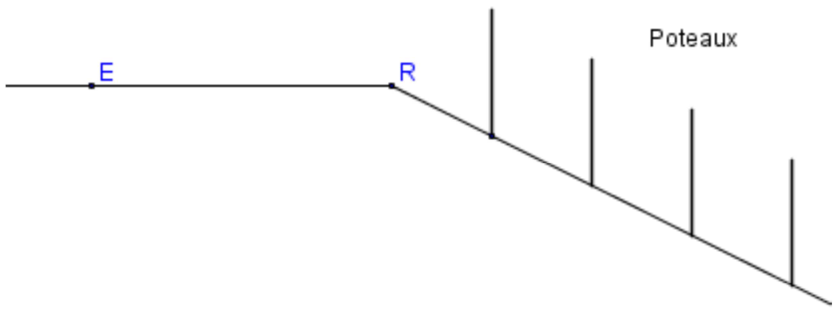
Pierre et sa fille Eloïse se promènent sur une route horizontale. En un point *R*, cette route descend faisant un angle θ de 5° avec l'horizontal (voir figure).



Eloïse, dont les yeux sont à 1,6 mètre du sol, s'arrête en un point *E*, à 24 mètres du point *R*. Son père continuant à marcher, passe devant le point *R* puis s'engage dans la partie en pente de la route.

1. Quand il se trouve à 86 mètres de *R*, il disparaît des yeux de sa fille.
Déterminer la hauteur de Pierre.

2. Dans la partie en pente de la route, des poteaux d'une hauteur de 6,5 mètres sont plantés verticalement tous les 28 mètres, comme sur le schéma ci-dessous.



Le 1^{er} poteau se situe à 28 mètres du point *R*.
On admet l'hypothèse que les poteaux ne peuvent se masquer les uns des autres.

Combien Eloïse peut-elle voir de poteaux de l'endroit où elle se trouve ?

3. Quelle est en réalité, la mesure de l'angle θ, sachant qu'Eloïse ne voit que 5 poteaux ?
On pourra utiliser la formule $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

On donnera une valeur approchée de θ à 10^{-2} près.

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CAEN

SESSION 2012

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Sujet Académique 3 : Poulailler
Eléments de correction

Partie A. Forme semi- circulaire.

On doit avoir $\frac{\pi R^2}{2} = 127$. Alors $R = \sqrt{\frac{254}{\pi}} \approx 9$ m. La longueur du grillage est donc

$L = \pi R \approx 28{,}3$ m.

Partie B. Forme rectangulaire.
On pose $AB = CD = x$ et $BC = y$. La longueur du grillage est $2x + y$. L'aire du poulailler est xy.

1) On doit avoir $2x + y = 108$. L'aire est alors $xy = x(108 - 2x) = 108x - 2x^2$. On considère la fonction $f(x) = 108x - 2x^2$. On a $f'(x) = 108 - 4x$ et le tableau de variation de f montre que f atteint son maximum pour $x = 27$. Alors $y = 54$.

La longueur est le double de la largeur.

2) On doit avoir $xy = 288$, donc $y = \frac{288}{x}$. La longueur du grillage est alors

$g(x) = 2x + y = 2x + \frac{288}{x}$. On a $g'(x) = 2 - \frac{288}{x^2} = \frac{2x^2 - 288}{x^2}$. Le tableau de variation montre que la fonction g atteint son minimum pour $x = 12$. Alors $y = \frac{288}{x} = 24$. La longueur minimale du grillage est alors $2x + y = 48$ m.

Partie C. Forme de trapèze.

Soit h la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a. On sait que $h = a \sin 60° = a\frac{\sqrt{3}}{2}$. La surface du trapèze est alors $A = 3\frac{ah}{2} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$. Avec $a = \frac{120}{3} = 40$, on obtient $A \approx 2771$ m^2.

Partie D. Forme de triangle isocèle.

Soit a la longueur d'un côté du sommet et θ le demi-angle au sommet. La hauteur du triangle est alors $h = a\cos\theta$. Sa base est donc $b = 2a\sin\theta$. L'aire du triangle est $A = 2\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{2} = a^2\cos\theta\sin\theta = \frac{a^2\sin(2\theta)}{2}$. L'aire est maximale pour $\sin(2\theta) = 1$, donc pour $2\theta = 90°$ et $\theta = 45°$. On obtient alors $A = \frac{a^2}{2}$. Avec , $a = \frac{88}{2} = 44$, on obtient A 968 m^2.

Sujet Académique 4 : Pierre et sa fille
Eléments de correction

1)

On a $EX = 1{,}6$; $ER = 24$ et $RP = 86$ et $\theta = 5°$
(T représente le sommet du crâne de Pierre).

$\cos\left(\theta\right) = \frac{RH}{RP}$ donc $RH = RP \times \cos\left(\theta\right) = 85{,}67$ mètres.

$\frac{XE}{ER} = \frac{HT}{RH}$ donc $\frac{1{,}6}{24} = \frac{HT}{85{,}67}$ d'où $HT \cong 5{,}71$ mètres.

$\sin(\theta) = \frac{HP}{RP}$ d'où $HP = RP\sin(\theta)$

$HP \approx 7{,}5$ m.

Donc $PT = HP - HT \approx 1{,}79$ m.

2) $EX = 1{,}6$; $ER = 24$ et $BT = 6{,}5$ et $\theta = 5°$.
(T représente le sommet du dernier poteau)

$\frac{XE}{ER} = \frac{HT}{RH}$

$\frac{1{,}6}{24} = \frac{HT}{RH}$ d'où $HT = \frac{0{,}2}{3} RH$

$\tan(\theta) = \frac{HB}{RH}$ donc $HP = RH \times \tan(\theta) = RH\tan(5°)$

Or $HP = HT + TP$

$RH\tan\left(\theta\right) = \frac{0{,}2}{3} RH + 6{,}5$

$RH = \frac{6{,}5}{\left(\tan(5°) - \frac{0{,}2}{3}\right)} \approx 312{,}17$ m.

$RP = \frac{RH}{\cos(5°)} \approx 313{,}36$ m.

Le quotient entier de 313,36 par 28 est 11. Elle peut donc voir 11 poteaux.

3) Avec les notations du 2)

$\tan\theta = \frac{6{,}5}{x} + \frac{0{,}2}{3}$ avec $RH = x$

$\cos\theta = \frac{x}{140}$

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$1 + \left(\frac{6{,}5}{x} + \frac{0{,}2}{3}\right)^2 = \frac{140^2}{x^2}$

$1 + \frac{(19.5 + 0.2x)^2}{9x^2} = \frac{19600}{x^2}$

$9x^2 + 380{,}25 + 7{,}8x + 0{,}04x^2 = 176400$

$9{,}04x^2 + 7{,}8x - 176019{,}75 = 0$

$\Delta = 6364935$

$x_1 = \dfrac{-7{,}8 + \sqrt{\Delta}}{2 \times 9{,}04} \approx 139{,}11$ mètres car $x \phi 0$

$\cos\theta = \dfrac{139{,}11}{140}$

$\theta = 6{,}46°$