SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CAEN

Classes de première S • 2011

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE CAEN

SESSION 2011

CLASSE DE PREMIÈRE

DURÉE : 4 heures

Ce sujet comporte quatre exercices qui s'adressent à tous les élèves de première, quelle que soit leur série.

Il comporte huit pages.

Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1 – sujet national

L'essuie-glace

(les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

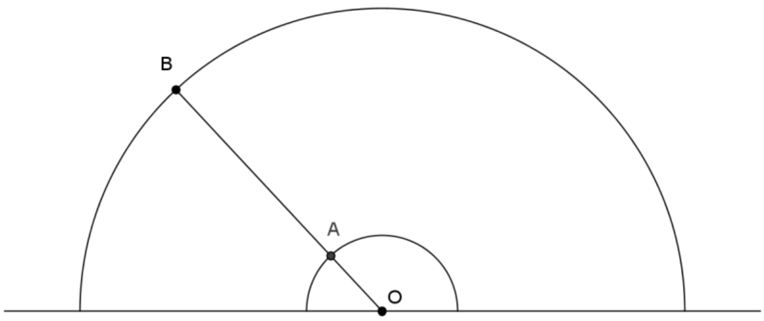


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glace modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

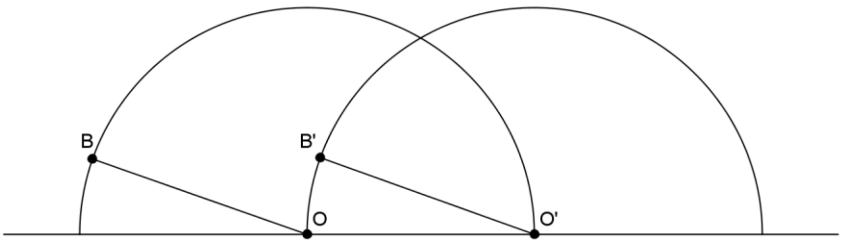


Fig. 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA}$ = 30°, CB = 4 CA et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = a.

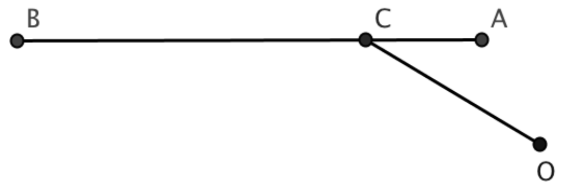


Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.
b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

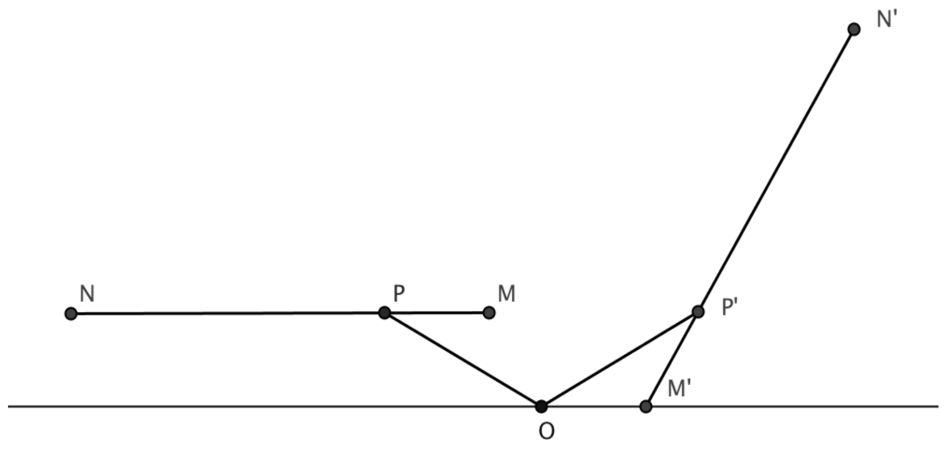


Fig. 4

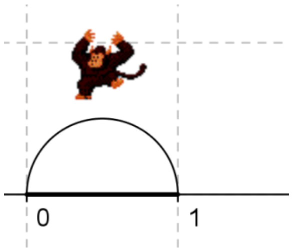
Exercice 2 – sujet national

Le singe sauteur

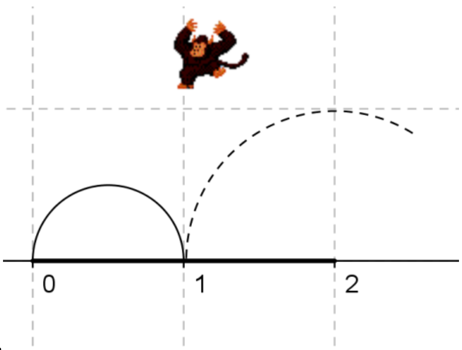
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0\ ;\ n]$.

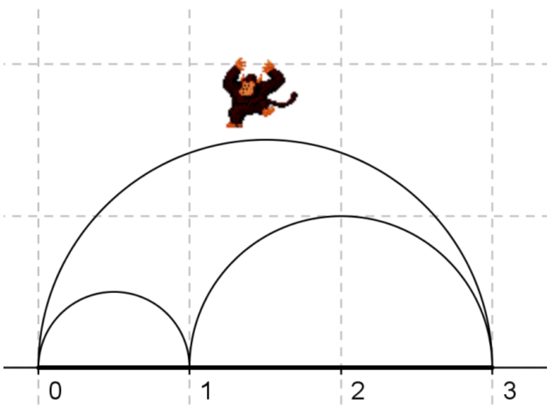
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0\ ;\ 3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.

2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier *m*, on a : $1+2+3+....+m=\frac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5.
   a. Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.
   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose N ≥ 6 et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 … Montrer que N+4 est aussi atteignable.

Exercice 3 – sujet académique

Calculs en base 8

Yohann , d'un naturel original, aime écrire les entiers sans utiliser les chiffres 8 et 9. Pour cela, il a l'habitude de décomposer un nombre en utilisant les puissances de 8.

Exemple : 1659 = **3**×8^3 + **1**×8^2 + **7**×8 + **3**.

On dit que le nombre 1659 a pour écriture $\overline{3173}$ en base 8.(1659 est son écriture en base 10).

De même : 508 = **7**×8^2 + **7**×8 + **4** donc le nombre 508 a pour écriture $\overline{774}$ en base 8.

Réciproquement : le nombre $\overline{131}$ écrit en base 8 devient **1**×8^2 + **3**×8 **+ 1** = 89 en base 10.

D'une manière générale, dire que l'entier *x* a pour écriture $\overline{a_n a_{n-1} .....a_2 a_1 a_0}$ en base 8 signifie que $x = a_n \times 8^n + a_{n-1} + ...a_2 \times 8^2 + a_n \times 8 + a_0$ où $a_n, a_{n-1}, ...a_2, a_1$ et a_0 sont des entiers naturels **strictement inférieurs** à 8.

1. a) Déterminer l'écriture en base 8 du nombre 1044.

   b) Déterminer l'écriture en base 10 du nombre $\overline{5432}$.

2. A la manière de Yohann, poser et effectuer les calculs suivants en base 8 :

$$\overline{131} + \overline{774} \; ; \; \overline{3123} - \overline{131} \; ; \; \overline{131} \times \overline{774}$$

3. a) *N* est un entier naturel dont l'écriture en base 8 est $\overline{12345676543210}$.
   N est-il divisible par 8 ?

   b) Soit *x* un entier naturel et $x = \overline{a_n a_{n-1} .....a_2 a_1 a_0}$ son écriture en base 8.
   Quelles sont les valeurs possibles de a_0 pour que *x* soit divisible par 4 ?

   c) Le nombre *N* défini à la question a) est-il divisible par 4 ?

4. a) En remarquant que pour tout entier $k \geq 1$, le reste dans la division par 7 de 8^k est toujours 1, déterminer un critère de divisibilité par 7 d'un entier naturel *x* écrit en base 8.

   b) Le nombre *N* défini à la question 3a) est-il divisible par 7 ?

Exercice 4 – sujet académique

Mélange de cartes

Le principe du « mélange parfait », en magie des cartes, consiste tout d'abord à couper le jeu en 2 paquets contenant le même nombre de cartes ; on procède ensuite au mélange en intercalant exactement les cartes de chacun des paquets *(c'est un geste extrêmement difficile qui nécessite, bien évidemment, beaucoup de pratique...).*

Exemple de « mélange parfait » avec un jeu de 6 cartes (la $1^{\text{ère}}$ est l'as de pique et la $6^{\text{ème}}$ est le 6 de pique) :

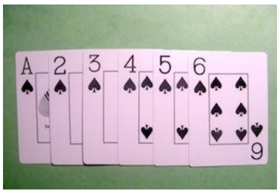


Fig 1 : Jeu de départ

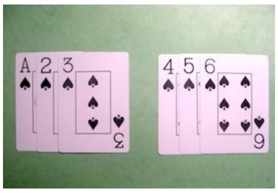


Fig 2 : Division en deux paquets de 3 Cartes

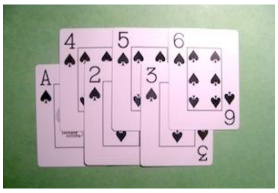


Fig 3 : Cartes intercalées

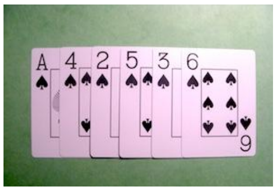


Fig4 : Fin du mélange

1. a- Quelle sera la position des 6 cartes de l'exemple précédent après un deuxième mélange parfait ?

   b- En combien de mélanges identiques les cartes reviendront-elles à leur position initiale ?

On utilisera pour la suite la notation suivante : $U_k(x)$ est l'entier indiquant la position, après k mélanges, de la carte située en $x^{\text{ième}}$ position du jeu de départ.
Ainsi, dans le mélange de 6 cartes de la question précédente $U_1(2)=3$ signifie que la carte en $2^{\text{ième}}$ position en comptant à partir de la gauche du jeu de départ (le 2 de pique, Fig1) est, après un mélange parfait, en $3^{\text{ième}}$ position (Fig 4).

2. Dans cette question, on considère que le magicien a un jeu de 16 cartes.

   a- Que vaut $U_1(2)$? $U_2(2)$?

   b- Quelle est la valeur minimum de l'entier k strictement positif pour que $U_k(2)=2$?

3. Dans cette question, on considère un jeu de *2n* cartes, où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

   a- Après un mélange, à quelles positions se retrouvent la première et la dernière carte du jeu ?

   b- Quelle sera la position $U_1(x)$, après un mélange parfait, d'une carte située à la position x au départ ? *Indication : on pourra raisonner sur 2 paquets (premier paquet avec* $1 \leq x \leq n$, *second paquet avec* $n+1 \leq x \leq 2n$)

   c- Vérifier les réponses obtenues à la question 3.a.

4. Dans cette question, on utilise un jeu de 8 cartes.

On étudie les positions successives de la carte située en 2^{e} position au départ.

a. En combien de mélanges revient-elle à sa position initiale ?

b. Vérifier que le même nombre de mélanges ramène également la carte située au départ en 3^{e} position, à sa position initiale.

5. *Nous admettrons que si la carte en position 2 revient après* M *mélanges à sa position initiale, alors toutes les cartes du jeu sont revenues dans leur position initiale après ces* M *mélanges parfaits.*

Ecrire un algorithme permettant de savoir combien le magicien utilisera de mélanges parfaits pour revenir à l'état initial d'un jeu de 52 cartes.

NB : pour en savoir plus sur ce sujet, vous pourrez consulter le site internet du CNRS « Images des Mathématiques » http://images.maths.cnrs.fr/Melange-de-cartes-et.html

$\boxed{\text{OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES}}$

ACADÉMIE DE CAEN

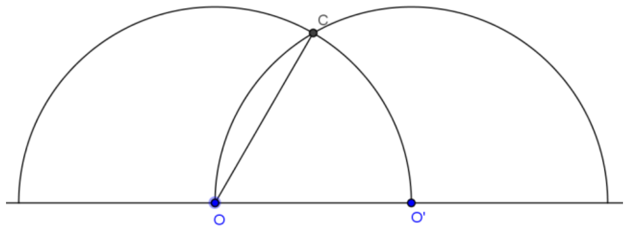
SESSION 2011

$\boxed{\text{ÉLÉMENTS DE CORRECTION}}$

Sujet national 1 : Essuie-glace
Eléments de correction

1) L'aire demandée en cm^2 est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(\pi.60^2 - \pi.15^2\right) = \frac{\pi}{2}15^2\left(4^2-1\right) = \frac{\pi}{2}.15^3 = 3375.\frac{\pi}{2}$ soit en valeur approchée 5301 cm^2 .

2) Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons L'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$:



$A_1 = \frac{1}{2}\left(R \times \frac{\sqrt{3}}{2}R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

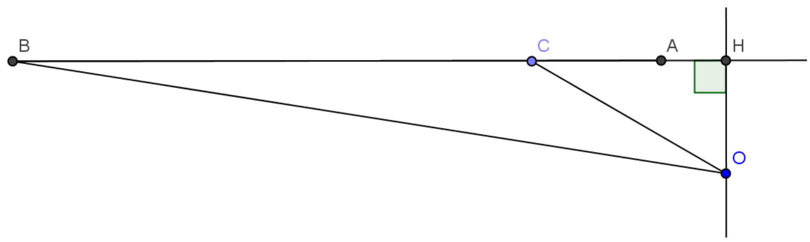
Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$: $A_2 = \frac{\pi R^2}{6}$.

Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\overset{\frown}{OC}$ sera : $A_2 - A_1$.
L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A = A_2 + A_2 - A_1 = 2A_2 - A_1$

Donc $A_3 = \frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.
L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon R privée de A_3 soit

$\mathcal{A} = \pi R^2 - \left(\frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 - \right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$ $\qquad \boxed{\mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2}$

3)



a) $\sin\widehat{OCH} = \sin 30° = \frac{1}{2}$ donc $\frac{OH}{OC} = \frac{1}{2}$ soit $OH = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

De même $\frac{HC}{OC} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $HC = \frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3} = \frac{3}{2}a$. Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H, $OA^2 = HA^2 + HO^2 = \left(HC - CA\right)^2 + HO^2 = \left(\frac{3}{2}a - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2$.

Ainsi $OA = OC$ et donc $\boxed{\text{le triangle } AOC \text{ est isocèle.}}$

b) L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180-\widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le triangle *MOP* est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX}=2\times 30=60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180-60= $\boxed{120°.}$

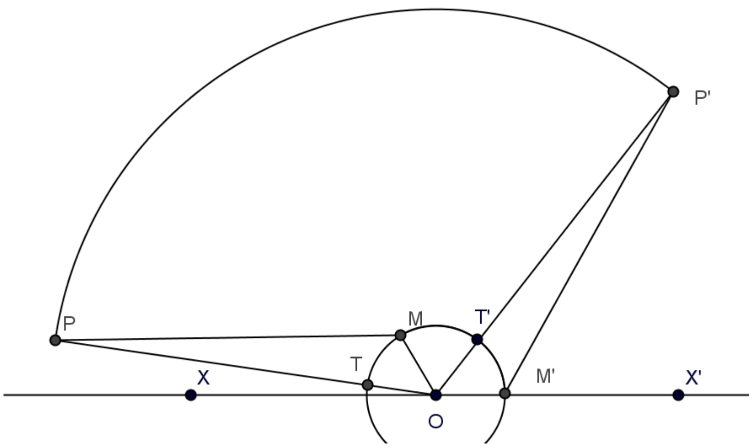
La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MP] et [M'P'] et les arcs $\overset{\frown}{MM'}$ et $\overset{\frown}{PP'}$. Soient *T* et *T'* les intersections du cercle de centre *O* passant par *M* et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points MTP ont respectivement pour images M' T' P', et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par [*MP*], [*PT*] et l'arc $\overset{\frown}{MT}$ a la même aire que celle limitée par [*M'P'*] [*P'T'*] et l'arc $\overset{\frown}{M'T'}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMP et OM'P' sont isométriques.
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [*PT*] et [*P'T'*] et les arc de cercle $\overset{\frown}{PP'}$ et $\overset{\frown}{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $\mathcal{A}=\dfrac{1}{3}\left(\pi.ON^2-\pi.OT^2\right)=\dfrac{\pi}{3}\left(OB^2-OA^2\right)$

Or, $OA^2=a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle *OBH*,

$$OB^2=OH^2+HB^2=OH^2+\left(HC+CB\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3a}{2}+4a\right)^2=\left(\frac{3}{4}+\frac{121}{4}\right)a^2=31a^2$$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A}=\dfrac{\pi}{3}\left(31a^2-a^2\right)=\dfrac{\pi}{3}\times 30a^2=10\pi a^2$ $\boxed{\mathcal{A}=10\pi a^2}$



Sujet National 2 : Le singe sauteur
Eléments de correction

1. Le nombre 4 est atteignable car 1+2-3+4=4.

2. Le singe n'a pas le choix : 1+2-3+4 et … il est bloqué !!

3. Le nombre 9 est atteignable car on a 1+2+3-4+5-6+7-8+9=9, sans jamais sortir de l'intervalle [0 ; 9].

4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner 1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0 ; 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$$1+2+3+.....+n-(n+1)+(n+2)-(n+3)+(n+4)..........-(n^2-1)+n^2=$$
$$\frac{n(n+1)}{2}+1+1+1+.................+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2-n}{2}=n^2$$

d'où n^2 est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle [0 ; n^2].

5. Si le nombre n est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou -1 telles que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_- . On a alors : $S_+=S_-$. On calcule ensuite :

$$1+2+3+.......+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$$

On en déduit que : $\frac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit *n(n-1).*

Donc n est de la forme 4k ou 4k+1. Par exemple 18 n'est pas atteignable.

La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes + - en - +, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4) et l'on trouve N+4. On note S(i) la somme partielle des *i*-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par -(N-1)+ N. La séquence commence par 1+2+3 et le premier signe – apparaît en position i+1. Alors S(i-1) ≥ i, car S(3) ≥ 4. On change alors la sous-séquence i-(i+1) en –i+(i+1), ce qui est possible. On ajoute la séquence -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4), ce qui assure que N+4 est atteignable.
Question subsidiaire : est-il vrai que les nombres de la forme N=4k ou 4k+1, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

Sujet Académique 3 : Calculs en base 8
Eléments de correction

1) a) $1044 = 2\times 8^3 + 0\times 8^2 + 2\times 8^1 + 4$ donc $1044=\overline{2024}$

b) $\overline{5432} = 5\times 8^3 + 4\times 8^2 + 3\times 8^1 + 2 = 2842$

2) $\overline{131}+\overline{774}=\overline{1125}$

$\overline{3123}-\overline{131}=\overline{2772}$

$\overline{131}\times\overline{774}=\overline{130234}$

3) a) Pour tout entier k , 8 divise 8^k donc un nombre est divisible par 8 lorsque son chiffre des unités en bases 8 est 0 donc N est divisible par 8.

b) 4 divise 8 donc , pour tout $k\geq 1$, 4 divise 8^k
donc 4 divise x si et seulement si $a_0 = 0$ ou $a_0 = 4$.
Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le chiffre des unités dans sa décomposition en base 8 est 0 ou 4.

c) 4 divise N car son chiffre des unités en base 8 est 0.

4) a) Pour tout entier $k\geq 1$ le reste dans la division par 7 de 8^k est 1.
Donc il existe n entiers $q_1, q_2, ...q_n$ tels que

$$x= a_n(7q_n+1)+a_{n-1}(7q_{n-1}+1)+..........+a_1(7q_1+1)+a_0$$

D où $x= 7(a_nq_n+a_{n-1}q_{n-1}+.......+a_1q_1)+a_n+a_{n-1}+.....+a_0$

Donc 7 divise x si et seulement si 7 divise $\sum_{i=0}^{n} a_i$.

Donc un nombre est divisible par 7 si et seulement si la somme de ces chiffres dans sa décomposition en base 8 est un multiple de 7.

b) 1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1+0=49 donc 7 divise N.

Sujet Académique 4 : Mélange de cartes
Eléments de correction

1/ a- La position des 6 cartes après un autre mouvement de mélange parfait : 1 5 4 3 2 6

b- On revient à la position initiale après 4 mélanges parfaits :

	1 2 3 4 5 6
1er mélange	1 4 2 5 3 6
2ème mélange	1 5 4 3 2 6
3ème mélange	1 3 5 2 4 6
4ème mélange	1 2 3 4 5 6

2/ Considérons que le magicien à un jeu de 16 cartes.

a- $U_1(2)=3$;
$U_2(2)=U_1(3)= 2 \times 3 - 1 = 5$ donc $U_2(2)=5$

b- Il faut 4 mélanges car :
$U_3(2)=U_2(3)=U_1(5)=9$
et $U_4(2)=U_3(3)=U_2(5)= U_1(9)=2$

3/ a- La première et la dernière carte du jeu restent à la même place.

b-
Si $x \leq n$ c'est à dire que la carte en position x est située dans le paquet de gauche alors il y a $x-1$ cartes qui vont s'intercaler avant la carte en position x , c'est-à dire que la nouvelle position de cette carte sera $x+x-1=2x-1$ c'est-à dire si $x \leq n$ $U_1(x) = 2x-1$

Si $x > n$ alors $x = x'+n$ c'est-à-dire à la x'-ème position après le milieu du paquet. Alors cette carte en position x se retrouvera en $2x'$ car les cartes du paquet de gauche se trouverons en position paire avec la carte n+1 en position 2 , n+2 en position 4 etc...
ainsi puisque $x' = x-n$ la nouvelle position de la carte sera $2(x-n) = 2x-2n$
c'est-à dire si $x > n$ $U_1(x) = 2x-2n$

c- La première et la dernière carte du jeu restent à la même place car :
pour la première carte si x=1 alors sa nouvelle position sera en $2 \times 1 - 1 = 1$
pour la dernière carte x=2n alors sa nouvelle position sera en $2 \times 2n - 2n = 4n - 2n = 2n$

4/ $U_3(2) = U_2(3) = U_1(5) = 2$ et $U_3(3) = U_2(5) = U_1(2) = 3$

5/ Algorithme de calcul des positions successives de la 2e carte et recherche du retour en position initiale :

<u>Variables</u>
X : entier // position de la carte 2
M : entier // nombre de mélanges effectués

<u>Initialisation</u>
2→X // position initiale de la carte 2
0→M // pas de mélange

Fonction U(X) // fonction « mélange »
si X ≤ 26
alors U(X) = 2X-1
sinon U(X) = 2X-52

<u>Traitement</u>
Répéter
U(X) → X // mélange effectué
Afficher X // nouvelle position de la carte 2
M+1→M // on compte 1 mélange de plus
Jusqu'à ce que X=2 // test retour en position initiale

<u>Sortie</u>
Afficher M

Conclusion : Le cycle des positions de la carte 2 est : 2-3-5-9-17-33-14-27-2. En 8 mélanges, la carte est revenue à sa position initiale (ainsi que toutes les cartes du paquet).