SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE BORDEAUX

Classes de première S • 2016

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Bordeaux

Mercredi 16 mars 2016 de 8 h à 12 h 10

Pause de 10 h à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10 h.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Si le candidat souhaite quitter définitivement la salle avant la fin de l'épreuve (12h 10), il doit rendre les énoncés.

1re partie - 8 h à 10 h

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Échanges thermiques*) et 2 (*Liber abaci*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Échanges thermiques*) et 3 (*Demi-tour !*)

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Échanges thermiques

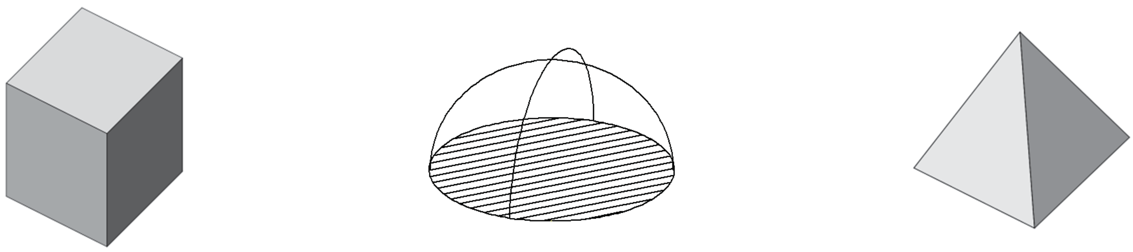
En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure – y compris la base en contact avec le sol – de ce bâtiment, mesurée en m^2, *à son volume, mesuré en* m^3. *Le facteur de compacité* $c = \frac{S}{V}$, exprimé en m^{-1}, *donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.*

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

a. Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté *a*.

b. Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.

c. Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté *a*, et de hauteur verticale *a*.



d. En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z .

a. Vérifier que pour tous nombres a, b et c :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

b. En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

c. En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 :

$$A + B + C \geq 3.$$

d. Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est : $c = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

e. Quel est le pavé droit de volume 1 qui rend minimal le facteur de compacité ?

3. Dans cette question, on désire déterminer tous les pavés droits dont le facteur de compacité est égal à 1 et dont les dimensions p, q et r, exprimées en mètres, sont des nombres entiers. On prendra $p \leq q \leq r$.

a. Établir que résoudre ce problème consiste à déterminer les triplets ordonnés d'entiers p, q et r tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

b. Démontrer que $3 \leq p \leq 6$.

c. Montrer que si $p = 3$ alors $7 \leq q \leq 12$.

d. Terminer la résolution.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Liber abaci

Il y a 4000 ans, les anciens égyptiens utilisaient en calcul une propriété arithmétique bien étonnante : tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ strictement positif s'écrit comme une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire d'inverses d'entiers positifs, tous différents les uns des autres. Depuis lors, une telle décomposition s'appelle une « écriture égyptienne ». Ainsi, la somme $\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{102}$ est-elle une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{4}{17}$, tandis que les sommes $\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}$ et $\frac{1}{17}+\frac{3}{17}$ n'en sont pas. Plusieurs questions sur ces écritures demeurent, aujourd'hui, encore ouvertes.

1. Pourquoi les deux dernières décompositions données en préambule ne sont-elles pas des « écritures égyptiennes » ? Proposer une écriture égyptienne de $\frac{2}{3}$ comportant deux fractions unitaires, puis une autre de $\frac{2}{3}$ en comportant trois.

2. Un algorithme. Soient p et q des entiers tels que $0 < p < q$. Le quotient $\frac{p}{q}$ est donc un élément de $]0;1[$

Poser $k = 1$, $p_1 = p$, $q_1 = q$.
Tant que $p_k \neq 0$

Déterminer le plus petit entier positif n_k tel que $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k}$. Ainsi : $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$.

Poser $p_{k+1} = p_k n_k - q_k$ et $q_{k+1} = q_k n_k$. Ainsi : $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k}$.

Incrémenter k, c'est-à-dire augmenter la valeur du compteur k d'une unité.

Fin du Tant que.

a. On fait ici tourner l'algorithme sur le quotient $\frac{p}{q} = \frac{4}{17}$. Au début du premier tour de boucle, $k = 1$, $p_1 = 4$, $q_1 = 17$. On détermine alors $n_1 = 5$. Puis $p_2 = 3$, $q_2 = 85$ et k vaut 2 avant d'entrer dans le deuxième tour de boucle. Poursuivre jusqu'à l'arrêt complet. Que vaut $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$? Les quatre fractions unitaires sont-elles distinctes ?

b. On suppose que l'algorithme prend fin à l'issue du *N*-ième tour de boucle. Justifier qu'il permet de donner une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{p}{q}$.

c. Justifier clairement que l'algorithme ne peut être illimité.

Cet algorithme permet donc de donner une « écriture égyptienne » de n'importe quel nombre rationnel élément de $]0;1[$. Il appartient à une classe d'algorithmes dits « gloutons » et est attribué à Léonard de Pise, auteur du *Liber abaci* (1202).

L'adjectif « glouton » s'applique à des algorithmes faisant, à chaque étape, un choix optimal. L'optimalité globale n'est pas nécessairement atteinte comme en témoignent les deux décompositions de $\frac{4}{17}$ rencontrées dans ce problème.

3. Et pour $\frac{p}{q} \geq 1$?

a. L'algorithme précédent fonctionne-t-il pour $\frac{p}{q} > 1$?

b. Soit a un entier supérieur ou égal à 3.

Justifier que : $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}\ldots+\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2a} > \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}\ldots+\frac{1}{4a-1}+\frac{1}{4a} > 1$

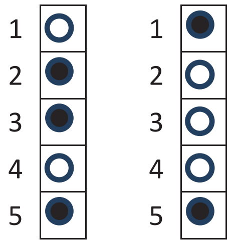
c. En déduire qu'il existe un entier naturel $b > a$ tel que :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b} \leq 1 < \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}\ldots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}.$$

d. Établir alors que tout rationnel $\frac{p}{q} \geq 1$ admet lui aussi une « écriture égyptienne », puis une infinité.

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Demi-tour !



Avant Après

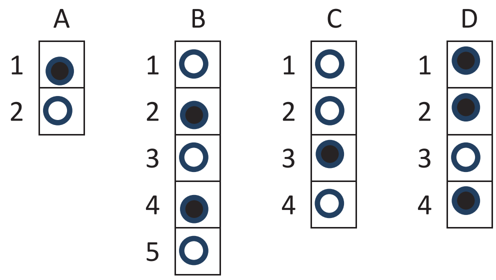
On dispose n pions verticalement. Ils sont noirs sur une face, blancs sur l'autre, et sont numérotés de 1 à n,. Au début du jeu, chaque pion présente aléatoirement sa face noire ou sa face blanche. **À chaque coup – qu'on appelle une *opération* dans toute la suite– on retourne un des pions *et* tous ses voisins du dessus.** Le dessin ci-contre donne l'exemple du changement qu'apporte à une configuration initiale une opération avec le troisième jeton.

L'objectif du jeu est de trouver une séquence d'opérations telle que tous les pions montrent leur face blanche.

1. L'ordre dans lequel se succèdent deux opérations a-t-il de l'importance ?

2. Quel est l'effet combiné de deux opérations identiques ?

3. Indiquer les numéros des pions à retourner pour ne voir que des faces blanches, dans les situations représentées ci-contre.



4. On donne l'algorithme suivant, pour une configuration de n cases :
Pour k allant de n à 1 par pas de -1
Si le jeton k est noir, effectuer une opération avec ce jeton
Fin Pour

a. Expliquer pourquoi cet algorithme blanchit la colonne en un minimum d'opérations. Combien d'opérations met-il au maximum en œuvre ?

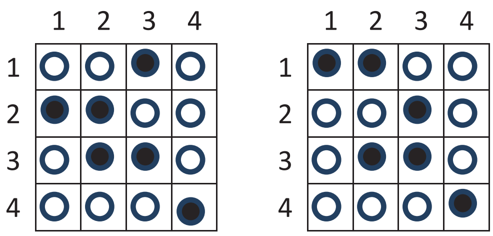
b. Donner un exemple de configuration de n cases nécessitant n opérations.

5. Dans cette question et les suivantes, on change légèrement les règles du jeu en en proposant des variantes :

a. À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus uniquement (quand il en a un). Prouver qu'il est toujours possible de blanchir la colonne.

b. À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus quand il en a un, le dernier sinon. Ainsi, agir sur le pion n°1 retourne et le n°1 et le n° n. Donner, en le justifiant, un exemple de configuration à 4 jetons qui soit impossible à blanchir.

6. Jeu à deux dimensions.



Avant Après

On considère maintenant un plateau carré de $n \times n$ cases. Les jetons ont une face noire et une blanche. Le but du jeu est de rendre visible les seules faces blanches. Les cases sont numérotées de haut en bas et de gauche à droite, et le jeton situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est appelé jeton (i, j). Une *opération* est définie ainsi : **lorsque l'on retourne le jeton (i, j), on forme un rectangle dont le coin supérieur gauche est le jeton $(1, 1)$ et le coin inférieur droit est le jeton (i, j) : tous les jetons situés dans ce rectangle sont retournés.** L'exemple ci-dessus montre ce qu'il se passe quand on retourne le jeton (2, 3) d'un plateau 4 x 4.

Proposer un algorithme qui fasse apparaître toutes les faces blanches d'un plateau $n \times n$ en moins de n^2 opérations.

7. Proposer un jeu analogue à trois dimensions**.**

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Bordeaux

Mercredi 16 mars 2016 de 8 h à 12 h 10

Pause de 10 h à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10 h.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Si le candidat souhaite quitter définitivement la salle avant la fin de l'épreuve (12 h 10), il doit rendre les énoncés.

2e partie - 10 h 10 à 12 h 10

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Coloriage*) et 2 (*La Tombola*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Coloriage*) et 3 (*Grande famille*).

Exercice académique numéro 1

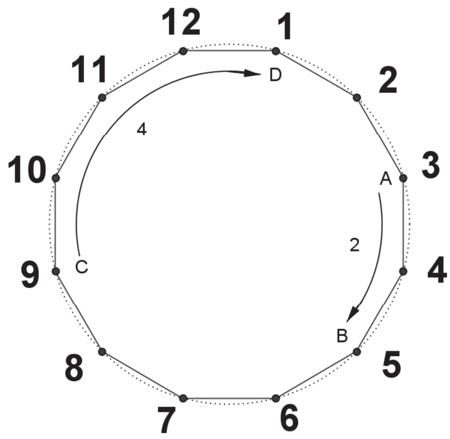
(à traiter par tous les candidats)

Coloriage

On a placé dans l'ordre les nombres 1,2, …, N aux sommets d'un polygone régulier.

La notion de distance est prise dans le sens suivant :
Soient A et B deux sommets du polygone. La distance entre A et B est la longueur du plus petit arc de cercle qui joint A et B, l'unité étant la longueur de l'arc séparant deux sommets consécutifs.

Par exemple, pour $N = 12$, si A et B correspondent aux points marqués 3 et 5, la distance entre A et B est 2. Si C et D correspondent aux points marqués 9 et 1, la distance entre C et D est 4.



1. Dans cette question, on suppose que le polygone a 12 sommets.
   - **a.** Montrer qu'il est possible de colorier quatre de ces points en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points verts soient toutes différentes ?
   - **b.** Expliquer pourquoi cela n'est pas possible avec cinq points. On pourra comparer le nombre de paires avec le nombre de distances possibles.

On désigne désormais par N le nombre de sommets du polygone régulier, $N > 12$.

2. Quelle est la valeur minimale de N pour laquelle les points marqués 1, 2, 4, 8, 16 peuvent être coloriés en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points verts soient toutes différentes ?

3. On suppose que 5 points sont coloriés en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points verts soient toutes différentes.
   - **a.** Justifier que $N \geq 20$.
   - **b.** Démontrer que si N est pair, la distance entre deux points marqués a et b est un entier de même parité que $a - b$. En déduire que N est différent de 20.
   - **c.** Quelle est la valeur minimale de N qui permet de colorier cinq points en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points verts soient toutes différentes ?

4. Montrer que pour $N = 2016$, on peut colorier en vert au moins 11 points ayant la propriété habituelle.

Exercice académique numéro 2

(à traiter par les candidats de la série S)

La tombola

Pour une tombola, on a vendu tous les billets numérotés 1, 2, 3, …, n où n est un entier supérieur ou égal à 2016.

On détermine les numéros des billets gagnants de la façon suivante : on écrit de gauche à droite la liste des entiers de 1 à n sur un tableau puis on passe en revue cette liste dans l'ordre croissant en effaçant les entiers qui sont les triples des nombres non effacés. On obtient donc la liste dont les premiers termes sont :

1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18 …

On décide que les numéros effacés sont les gagnants. Les autres sont perdants.

1. Justifier que le numéro 100 est perdant. En déduire que 300 est gagnant.
Le numéro 2016 est-il gagnant ou perdant ?

2. Démontrer que si le numéro a est perdant alors le numéro $9a$ l'est également.
Le numéro 729 est-il gagnant ou perdant ?
Parmi les numéros qui sont des puissances de 3, lesquels sont perdants ?

3. On admet que l'algorithme suivant permet de répondre à la question « le nombre saisi correspond-il à un numéro gagnant ? ».

```
Saisir un entier N
Tant que N est divisible par 9
        Remplacer N par N/9
Fin de boucle Tant que
Si N est divisible par 3
        Afficher « Le numéro N est gagnant »
Sinon
        Afficher « Le numéro N est perdant »
```

a. Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 100$, $N = 300$, $N = 2016$.

b. Soit a un entier supérieur ou égal à 1 et b un entier non divisible par 3.
Qu'affiche l'algorithme lorsque l'on saisit le nombre $N = 3^a b$.
On pourra distinguer deux cas selon la parité de a.

4. Démontrer qu'un numéro qui peut s'écrire comme produit de deux numéros perdants est perdant.

5. Dans cette question, on suppose que $n = 2016$.
Quel est le pourcentage de numéros gagnants ?

6. En réalité, on a dénombré 2016 numéros perdants.
Quelle est la plus petite valeur possible du nombre n de billets vendus ?

Exercice académique numéro 3

(à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Grande famille

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des nombres entiers qui s'écrivent avec quatre chiffres, chacun de ces chiffres étant différent de 0.

On rappelle que l'entier écrit $\overline{abcd}$ dans le système décimal est égal à $1000a + 100b + 10c + d$ où a, b, c, d désignent respectivement le chiffre des milliers, des centaines, des dizaines et des unités.

1. Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$?

Si N est un élément de $\mathcal{E}$, on appelle cousin de N tout nombre de $\mathcal{E}$, distinct de N, écrit avec les mêmes quatre chiffres que lui. Par exemple 4363 et 6343 sont cousins. Un nombre N et l'ensemble de ses cousins constituent la famille de N.

2. Quel est le nombre de cousins de 2537 ? de 2532 ?

N étant un élément de $\mathcal{E}$, on appelle $Max(N)$ le plus grand élément de sa famille et $Min(N)$ le plus petit.

3. Combien y a-t-il d'entiers N de $\mathcal{E}$ tels que $Max(N) = Min(N)$?

Si N est un élément de $\mathcal{E}$, on définit ses mensurations, à savoir sa taille notée $T(N)$ égale à la somme de ses chiffres et son poids noté $P(N)$ égal au produit de ses chiffres.

4. Quel est le plus petit entier N_0 de $\mathcal{E}$ dont le poids dépasse 1000 ?

5. Quelles sont les mensurations de 2449 ? Déterminer un entier N_1 de $\mathcal{E}$ qui n'est pas dans la famille de 2449 et a les mêmes mensurations.

6. Trouver un entier N_2 de $\mathcal{E}$ tel que $Min(N_2)$ est divisible par 5, $Max(N_2)$ est pair, $T(N_2) = 13$ et $P(N_2)$ est divisible par 3.

7. On s'intéresse aux entiers N de $\mathcal{E}$ tels que $Min(N) + Max(N) = 11\,330$.

   On désigne par a, b, c, d les chiffres de $Min(N)$ tels que $Min(N) = \overline{abcd}$ avec $a \leq b \leq c \leq d$.

   a) Montrer que $Min(N) + Max(N) = 11[91(a + d) + 10(b + c)]$
   b) Quelle est la valeur de $a + d$?
   c) Déterminer la taille de N.
   d) Combien d'entiers N de $\mathcal{E}$ sont solutions de l'équation $Min(N) + Max(N) = 11\,330$?

Olympiades académiques de mathématiques – Session 2016

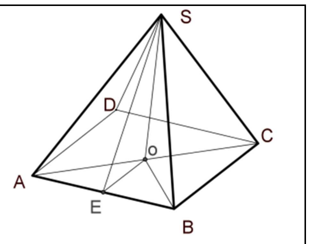
Académie de Bordeaux

Solution des exercices nationaux

Échanges thermiques

1. *a. b. c.* Calculs de compacité

	Cube de côté a	Demi-sphère de rayon r	Pyramide à base carrée de côté a, de hauteur a
Surface extérieure	$6a^2$	$3\pi r^2$	$a^2(\sqrt{5}+1)$
Volume	a^3	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{3}a^3$
Facteur de compacité	$\frac{6}{a}$	$\frac{9}{2r}$	$\frac{3(\sqrt{5}+1)}{a}$



Le calcul de la surface extérieure demande celui de la hauteur SE, qui est l'hypoténuse de SOE, rectangle en O

d. Les échanges thermiques avec l'extérieur sont d'autant plus grands que le facteur de compacité est élevé. Note : Le facteur de compacité est également pris en compte pour analyser les coûts de packaging, de stockage ou de transport d'une marchandise.
2. *a.* On développe le second membre…
b. Le second membre est un nombre positif, donc le premier aussi.
c. L'inégalité précédente, valable pour tout triplet (a, b, c), s'applique à tout triplet de produit 1, et aux racines cubiques…
d.*et *e. Le volume d'un tel pavé est xyz et sa surface extérieure $2(xy + yz + zx)$, d'où le résultat. Comme $xyz = 1$, l'inégalité précédente s'applique au triplet $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ dont le produit vaut aussi 1, d'où il résulte que $c \geq 6$. Et comme ce minorant est atteint en (1, 1, 1), c'est un minimum. Le cube de côté 1 réalise le minimum du facteur de compacité des pavés de volume 1. Aucun autre pavé droit de volume 1 de le réalise : l'inégalité **2. *b.*** serait stricte.

3. *a.* Faire $c = 1$ pour obtenir l'équation proposée.
b. Comme $p \leq q \leq r$, la somme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ est majorée par $\frac{3}{p}$, qui est donc supérieur à $\frac{1}{2}$. Par ailleurs, si $p \leq 2$, la somme des trois fractions unitaires est supérieure strictement à $\frac{1}{2}$.
c. et ***d.*** Comme précédemment, si $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{6}, \frac{2}{q} \geq \frac{1}{6}$. D'autres majorations s'imposent dans les cas qui suivent.
Tableau final. On lit les triplets solutions en colonne.

p	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	6
$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$
q	7	8	9	10	11	12	5	6	7	8	6	6
r	42	24	18	15		12	20	12		8		6

Liber abaci

1. La première décomposition proposée comporte des dénominateurs identiques, la seconde n'est pas une somme d'inverses d'entiers. On peut écrire $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ou $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$

2. *a.*

k	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{pn-q}$	$\boldsymbol{qn}$
1	4	17	5	3	85
2	3	85	29	2	2 465
3	2	2 465	1 233	1	3 039 345
4	1	3 039 345	3 039 345	0	

b. À l'issue du *N*-ième tour de boucle, le quotient $\frac{p_N}{q_N}$, qui est nul, apparaît comme la différence entre $\frac{p_1}{q_1}$ et une somme de fractions unitaires. Donc $\frac{p}{q}$ est bien somme de fractions unitaires. Par ailleurs

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k} < \frac{1}{n_k - 1} - \frac{1}{n_k} = \frac{1}{(n_k - 1)n_k} \leq \frac{1}{n_k}$$

prouve que la suite (n_k) est strictement décroissante.

c. On a $p_k n_k - q_k = p_{k+1}$ et $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$, et donc $p_{k+1} - p_k = p_k(n_k - 1) - q_k$. Le membre de droite est strictement négatif, donc la suite des p_k est strictement décroissante. Il s'ensuit qu'il existe un certain *N* pour lequel $p_N = 0$. L'algorithme s'arrête.

3. *a.* Le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{p}{q}$ est 1. On pourrait accepter 1 comme « fraction unitaire », mais dès que $\frac{p}{q} \geq 2$, 1 sera répété, ce qui est dans tous les cas interdit.

b. Le premier membre de la première inégalité à montrer comporte a termes tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2a}$, dont au moins un est strictement supérieur à $\frac{1}{2a}$, car $a + 1 < 2a$ dès que $a > 1$. Le premier membre de la seconde inégalité comporte $3a$ termes, les a premiers sont les mêmes que ceux de la sommes précédente. Pour les autres, on reconnaît : $\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a+2} + \frac{1}{2a+3} + \cdots + \frac{1}{2a+2a}$ que l'on minore en faisant jouer à $2a$ le rôle antérieur de a.

c. $\frac{1}{a+1} < \frac{1}{4}$. En ajoutant à ce premier terme, inférieur à 1, les fractions unitaires « consécutives », on finit par dépasser 1, question précédente (inégalité de droite). Notons b le dernier entier supérieur à a pour lequel la somme est encore inférieure à 1. Bien sûr $b > 2a$, question précédente (inégalité de gauche).

d. Considérons un rationnel $\frac{p}{q}$ supérieur à 1 et écrivons $\frac{p}{q} = n + \frac{p'}{q'}$, expression dans laquelle n est la partie entière de $\frac{p}{q}$. Une écriture égyptienne de $\frac{p'}{q'}$ demande des fractions unitaires de dénominateurs inférieurs strictement à un certain N_0. Si on écrit $n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$, on va décomposer chacun des 1 en somme de fractions unitaires (en prenant garde que les dénominateurs soient tous différents).

Pour le premier 1, Utiliser le résultat de la question ***c.*** en prenant pour premier dénominateur $a + 1$ un nombre supérieur à N_0. On peut approcher 1 à moins de $\frac{1}{b+1}$. Le rationnel restant est inférieur à $\frac{1}{b+1}$ et admet une écriture égyptienne dont tous les dénominateurs sont supérieurs à $b + 1$.

Pour l'éventuel second 1, on recommence, en prenant pour premier dénominateur un entier supérieur à tous ceux utilisés jusque-là.

Ainsi de suite.

Pour varier à l'infini les décompositions, on peut par exemple augmenter de 1 le premier dénominateur intervenant dans la décomposition du premier 1…

Demi-tour !

1. Supposons qu'une des deux opérations concerne le pion *M* et l'autre le pion *N.* Supposons *N* < *M.* On commence par retourner le pion *M*. Tous les pions de numéro inférieur ou égal à *M* changent de couleur. On retourne le pion *N* et tous les pions de numéro inférieur ou égal à *N* changent de couleur. Résultat : seuls les pions de numéros compris entre *N* +1 et *M* ont changé de couleur. Si on pratique ces opérations dans l'ordre inverse, les mêmes pions sont retournés une fois, les mêmes deux fois. L'ordre des opérations n'intervient donc pas.

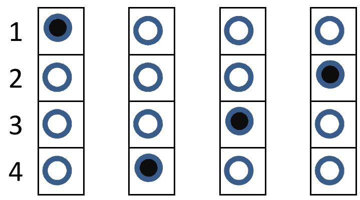
2. Deux opérations identiques s'annihilent.

3. A : 1, B : 4 puis 3 puis 2 puis 1, C : 3 puis 2, D : 4 puis 3 puis 2

4. ***a.*** et ***b.*** Comme on parcourt la colonne de n à 1, tous les jetons noirs rencontrés sont blanchi. Un jeton noir à partir duquel on réalise une opération n'est plus concerné par les suivantes, donc reste blanc. On réalise au maximum n opérations (cas d'une alternance de jetons noirs et blancs, le jeton n étant noir). Soit maintenant une méthode de blanchiment. L'ordre des opérations ne compte pas : on peut donc partir du dernier jeton, remonter jusqu'au premier, et neutraliser les doublons. Cela coïncide avec la méthode proposée, qui est minimale.

5. ***a.*** On utilise le mode opératoire précédent : chaque jeton noir rencontré, en partant du jeton n, est blanchi ou laissé blanc s'il l'était déjà, en laissant intacts ceux du dessous : c'est bien cela l'important. Cette méthode blanchit tout.

b. Dans le plateau ci-contre, le pion noir circule au fur et à mesure des opérations et rejoint sa place initiale. Le tableau de 4 cases ne peut pas être blanchi.



6. Jeu à deux dimensions

On peut appliquer la méthode de la question **4.** colonne par colonne, en commençant par la colonne $n.$ Cela garantit le blanchiment de la colonne $n.$ On passe ensuite au dernier jeton de la colonne $n-1$ et on remonte la colonne, etc. On passe ainsi par toutes les cases, qui peuvent donc être toutes blanchies.

7. Trois dimensions

Le jeu a la forme d'un cube. Les pions sont numérotés par des triplets (i, j, k) où i est le numéro de la *couche*, j le numéro de la *tranche* (compté de gauche à droite), k le numéro du *rang* (compté de l'arrière vers l'avant). En changeant de couleur le pion (i, j, k), on change la couleur de tous les pions dont la couche, la tranche et le rang ont des numéros inférieurs ou égaux respectivement à i, j, k.

Solutions des exercices académiques

Coloriage

1.

- **a.** En coloriant en vert les points correspondant à 1, 2, 4 et 8, toutes les distances sont différentes.
- **b.** $N = 12$ donc il ne peut y avoir que 6 distances possibles entre des points distincts : les entiers de 1 à 6. Lorsqu'on a 5 points, cela donne 10 paires possibles donc 10 distances. Nécessairement deux au moins d'entre elles sont égales. Il est donc impossible de colorier 5 points en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points soient différentes.

2. Il est nécessaire que $N \geq 16$. Les distances entre les paires de points sont alors 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12 si $N \geq 24$ ou $N - 12$ sinon, 7, 14 si $N \geq 28$ ou $N - 14$ sinon, 15 si $N \geq 30$ ou $N - 15$ sinon.

Pour $N = 24$, toutes les distances sont différentes donc $N \leq 24$.

Si $N < 24$, les distances sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, $N - 12$, $N - 14$ et $N - 15$. On doit donc avoir $N - 15 \geq 5$ donc $N \geq 20$.

Pour $N = 20$, $N - 12 = 8$ et il y a donc deux distances égales à 8.
Pour $N = 21$, $N - 14 = 7$ et il y a donc deux distances égales à 7.
Pour $N = 22$, $N - 15 = 7$ et il y a donc deux distances égales à 7.
Pour $N = 23$, $N - 15 = 8$ et il y a donc deux distances égales à 8.
Finalement la plus petite valeur possible de N est donc 24.

3.

- **a.** 5 points donnent 10 paires de points. Pour que les 10 distances soient différentes, il est donc nécessaire que $N \geq 2 \times 10$ soit $N \geq 20$.
- **b.** La distance entre a et b est égale à $|a - b|$ ou $N - |a - b|$. Si N est pair, ces deux entiers ont la même parité que $a - b$.

  Avec 5 points coloriés, on a trois possibilités :

  (1) Les 5 nombres ont la même parité. Les 10 distances sont alors paires.
  (2) Parmi les 5 nombres, il y en a 4 d'une certaine parité et 1 de l'autre. Dans ce cas, parmi les 10 distances, 4 exactement sont impaires.
  (3) Parmi les 5 nombres, il y en a 3 d'une certaine parité et 2 de l'autre. Dans ce cas, parmi les 10 distances, 6 exactement sont impaires.

  Pour $N = 20$, les 10 distances différentes ne pourraient être que 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et il y aurait donc exactement 5 distances impaires. C'est donc en contradiction avec les résultats précédents. Ainsi $N \neq 20$.
- **c.** La valeur minimale de N est 21. En coloriant les points 1, 4, 5, 10 et 12, les distances sont 3, 1, 5, 2, 4, 6, 7, 9, 8 et 10. Elles sont toutes différentes.

4. Pour $N = 2016$, en coloriant les points correspondant aux puissances de 2 (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024) on obtient 11 points ayant la propriété souhaitée.

La tombola

1. 100 est perdant car il n'est pas divisible par 3 et n'a donc pas été effacé.
300 est gagnant car il a été effacé puisque c'est le triple de 100 qui n'a pas été effacé.
$2016 = 3 \times 672$ et $672 = 3 \times 224$. Comme 224 n'est pas un multiple de 3, il n'a pas été effacé, donc 672 a été effacé et 2016 n'a pas été effacé. 2016 est donc perdant.

2. Si a est perdant, a n'a pas été effacé donc $3a$ est effacé et $9a$ ne l'est pas donc $9a$ est perdant.
$729 = 9 \times 81$ et $81 = 9 \times 9$. Comme 9 est perdant, 81 est perdant et 729 est perdant.
Plus généralement, les puissances de 3 qui correspondent à des numéros perdants sont les puissances de 9, c'est-à-dire de la forme 3^a avec a pair.

3.

a. Pour $N = 100$, pas d'entrée dans la boucle et N n'est pas divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est perdant ».
Pour $N = 300$, pas d'entrée dans la boucle et N est divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est gagnant ».
Pour $N = 2016$, en sortie de boucle N est égal à 224 et N n'est pas divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est perdant ».

b. Si a est pair, en sortie de boucle N est égal à b qui n'est pas divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est perdant ».
Si a est impair, en sortie de boucle N est égal à $3b$ qui est divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est gagnant ».

4. D'après 3, les numéros perdants sont les nombres de la forme $3^a b$ où a est un entier naturel pair et b un entier naturel non divisible par 3.
Soient $3^a b$ et $3^{a'} b'$ deux numéros perdants c'est-à-dire tels que a et a' sont des entiers naturels pairs et b et b' sont des entiers naturels non divisibles par 3.
Le produit $p = 3^a b \times 3^{a'} b'$ est égal à $3^A B$ avec $A = a + a'$ et $B = bb'$.
A est un entier naturel pair comme somme de deux entiers naturels pairs. B est un entier naturel qui n'est pas divisible par 3 puisque ni b ni n b' le sont. Ainsi p est un numéro perdant.

5. Il y a 25% de numéros gagnants.
Une démarche possible : on dénombre les entiers de la forme $3^a b$ (où a est un entier naturel impair et b un entier naturel non divisible par 3) qui sont inférieurs ou égaux à 2016.
Les valeurs possibles de a sont 1, 3, 5.
Pour $a = 1$, on doit avoir $b \leq 672$ et b non divisible par 3. Comme il y a 224 multiples de 3 inférieurs ou égaux à 672, b peut prendre $672 - 224 = 448$ valeurs.
Pour $a = 3$, on doit avoir $b \leq 74$ (car $2016/27 \approx 74{,}7$) et b non divisible par 3. On en déduit que b peut prendre $74 - 24 = 50$ valeurs.
Pour $a = 5$, on doit avoir $b \leq 8$ et b non divisible par 3. On en déduit que b peut prendre 6 valeurs.
Finalement il y a $448 + 50 + 6 = 504$ numéros gagnants soit 25% de numéros gagnants.

6. La valeur minimale de n est 2689.
Une démarche possible : compte tenu de la question 5, on peut penser qu'il y a environ 25% de gagnants donc les 2016 numéros perdants représentent environ les trois quarts des billets vendus. Ce qui donne environ 2688 billets vendus.
Pour $n = 2688$, le même raisonnement qu'en 5 donne 673 gagnants donc 2015 perdants.
Pour $n = 2689$, le numéro 2689 est perdant donc il y a 2016 perdants.

Grande famille

1. On a 9 possibilités pour chaque chiffre, ce qui donne $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$ nombres dans $\mathcal{E}$.
2. • 2537 a 23 cousins. Pour écrire un entier de la famille de 2537, les quatre chiffres doivent être 2, 5, 3 et 7, il y a donc 4 possibilités pour le 1^er^, 3 pour le second, 2 pour le 3^e^ et 1 pour le 4^e^. Ce qui donne $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ membres de la famille de 2537.

   • 2532 a 11 cousins. Les 12 membres de la famille de 2532 sont 2235, 2253, 2325, 2352, 2523, 2532, 3225, 3252, 3522, 5223, 5232, 5322.
3. Il y a 9 éléments N de $\mathcal{E}$ tels que $Max(N) = Min(N)$. Ce sont ceux dont les quatre chiffres sont identiques : 1111, 2222, …, 9999.
4. N_0 =2789.
5. $T(2449) = 19$ et $P(2449) = 288$.

   On peut prendre $N_1 = 2386$ ou l'un de ses cousins.
6. On peut prendre $N_2 = 2335$ ou l'un de ses cousins.
7.
   a. $Min(N) = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$
   et $Max(N) = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$
   donc $Min(N) + Max(N) = 1001a + 110b + 110c + 1001d$
   soit $Min(N) + Max(N) = 11[91(a + d) + 10(b + c)]$.

   b. L'équation s'écrit $11[91(a + d) + 10(b + c)] = 11330$.
   Elle est équivalente à $91(a + d) + 10(b + c) = 1030$.
   On en déduit que $(a + d)$ est divisible par 10 donc égal à 10 (car $a + d \leq 18$).

   c. $a + d = 10$ donne $10(b + c) = 120$ soit $b + c = 12$ donc $T(N) = 22$.

   d. Il y a 148 solutions.
   $Min(N)$ est l'un des nombres suivants : 1399, 1489, 2488, 1579, 2578, 3577, 1669, 2668, 3667, 4666. Les solutions sont les éléments des familles de ces 10 nombres.
   Les familles de 1579, 1489 et 2578 ont chacune 24 éléments.
   Les familles de 1399, 2488, 3577, 1669, 2668 et 3667 ont chacune 12 éléments.
   La famille de 4666 a 4 éléments : 4666, 6466, 6646, 6664.
   Finalement, il y a $3 \times 24 + 6 \times 12 + 4 = 148$ solutions.