

www.freemaths.fr

SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE BORDEAUX

Classes de première S • 2015



Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Bordeaux

Mercredi 18 mars 2015 de 8 heures à 12 heures

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte **quatre exercices**, tous à traiter dans le temps imparti.

- Les élèves des séries S, STI2D, STL traiteront les exercices 1, 2, 3S et 4
- Les élèves des autres séries traiteront les exercices 1, 2, 3L et 4

Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 2 heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Exercice numéro 1 (proposé par le jury national)

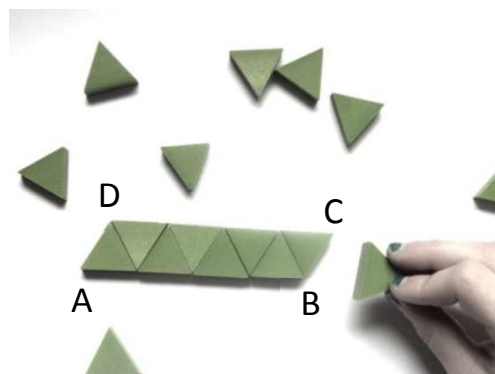
Défi entre sœurs

Patiquement, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.

Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.

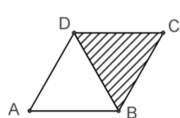
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- $L = AC$ la longueur de la diagonale [AC] ;
- $l = BD$ la longueur de la diagonale [BD].

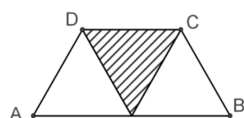


Partie A

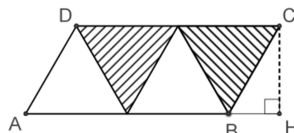
1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



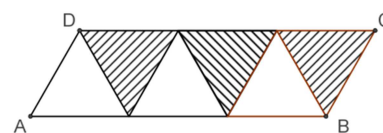
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair**, montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.
2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?
3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

1^{re} propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »

2^e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »

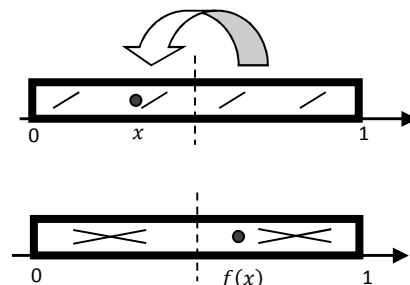
On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.
2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?
3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\ 015}$?
4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\ 015\ 057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.
5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.



Exercice numéro 2 (proposé par le jury national)

On est les rois !



Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.

Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1 - x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de $[0, 1]$ appartient à $[0, 1]$.
2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0, 1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x .

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? l'abscisse 0, 33 ? Commenter.
2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x , revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.
3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.
4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?
5. Déterminer tous les nombres de $[0, 1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe**, page 4, afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).
2. D'après les question **B.5.** ou même **B.2.**, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculatrice, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

Annexe.

Variables

x est un élément de $[0, 1]$

Début

Saisir le nombre x compris entre 0 et 1

Tant que $x \neq 0$ **faire**

Si $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**

x prend la valeur $2x$

Sinon

x prend la valeur $2(1 - x)$

Fin tant que

Fin



Exercice numéro 3S (à traiter par les élèves des séries S, STI2D, STL) (proposé par le jury académique)

Prendre la tangente

ABCD est un carré de côté 1, (Q) est un quart de cercle de centre C et passant par B et D.

M est un point variable du segment [AB] distinct de A et B. Par le point M on trace la tangente à (Q) qui coupe le côté [AD] en N. Le point de contact de la tangente avec (Q) est nommé T.

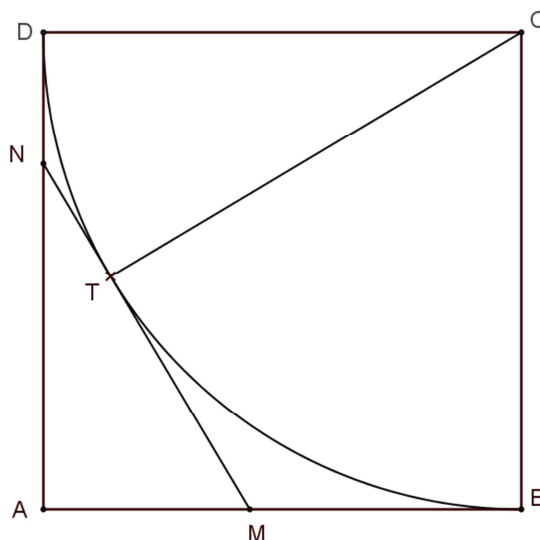
On pose $AM = x$ et $AN = y$ avec $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$.

1. a. Démontrer les deux expressions de MN :

$$\begin{cases} MN = \sqrt{x^2 + y^2} \\ MN = 2 - x - y \end{cases}$$

- b. En déduire que $y = 2 + \frac{2}{x-2}$.

2. En déduire la valeur de x pour laquelle la distance MN est minimale. Quelle est alors cette distance ?
3. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle AMN est maximale. Quelle est alors cette aire ?





Exercice numéro 3L (à traiter par les élèves des séries L, ES, STMG)
(proposé par le jury académique)

Décomposition en sommes

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dira qu'entier N est k -décomposable s'il peut s'écrire sous la forme d'une somme de k entiers naturels impairs consécutifs.

Par exemple : $3+5+7+9 = 24$ est la somme de 4 entiers impairs consécutifs donc 24 est 4-décomposable.

Partie A

1. Donner les cinq plus petits entiers naturels qui sont 2-décomposables.
Un entier 2-décomposable peut-il être impair ? Justifier.
Déterminer tous les nombres 2-décomposables.
2. On note S la somme de 3 entiers impairs consécutifs et on désigne par x le plus petit d'entre eux.
Exprimer S en fonction de x .
2015 est-il 3-décomposable ? 1803 est-il 3-décomposable ? Justifier.

Partie B

On rappelle que pour tout entier naturel non nul n ,

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) = \frac{(n - 1)n}{2}$$

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par N la somme de k entiers impairs consécutifs et par x le plus petit de ces entiers.

1. Démontrer que $N = k(x + k - 1)$.
2. En déduire que si k est pair alors tout entier k -décomposable est un multiple de 4.
3. Démontrer que 2015 est 13-décomposable ?
4. Existe-t-il un entier k strictement supérieur à 13 tel que 2015 soit k -décomposable ? Justifier.



Exercice numéro 4 (proposé par le jury académique)

Ensembles Pythagoriciens

Un sous ensemble \mathcal{E} de points du plan est dit pythagoricien s'il vérifie la propriété suivante :

Quelle que soit la façon dont on colorie les points de \mathcal{E} avec deux couleurs différentes, par exemple rouge et bleu, il existe au moins un triangle rectangle dont les sommets appartiennent à \mathcal{E} et qui soient de la même couleur.

On en déduit qu'un ensemble \mathcal{E} n'est pas pythagoricien s'il est possible de le colorier avec seulement deux couleurs sans qu'aucun triplet de points de \mathcal{E} formant les sommets d'un triangle rectangle ne soit de la même couleur. Un ensemble ne permettant de former aucun triangle rectangle n'est pas pythagoricien.

1. Montrer que les quatre sommets d'un carré ne forment pas un ensemble pythagoricien.
2. L'ensemble des points d'un cercle est-il pythagoricien ?
3. On se propose de montrer que l'ensemble \mathcal{F} formé par les points du contour d'un triangle équilatéral ABC est pythagoricien.

a. Soit K, L et M les points tels que

$$\vec{AL} = \frac{1}{3} \vec{AC}, \quad \vec{BM} = \frac{1}{3} \vec{BA} \quad \text{et} \quad \vec{CK} = \frac{1}{3} \vec{CB}$$

Montrer que les triangles BKM, AML et CLK sont rectangles respectivement en M, L et K.

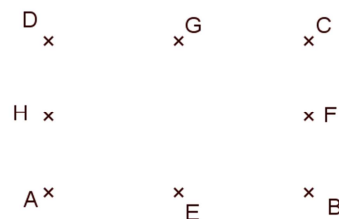
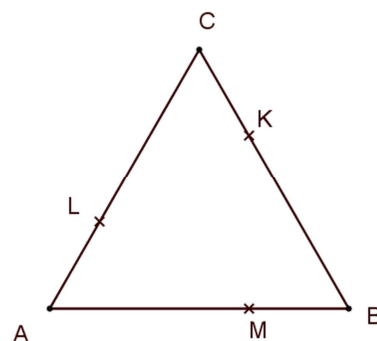
b. Justifier que deux au moins des points K, L, M sont de la même couleur. On supposera par la suite que cette couleur est rouge et que K et L sont rouges.

c. En supposant que \mathcal{F} n'est pas pythagoricien, montrer que l'on aboutit à une contradiction. Conclure.

4. ABCD est un rectangle, E, F, G et H sont les milieux des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

a. Montrer que l'ensemble formé par ces 8 points est pythagoricien. On pourra supposer que A est rouge.

b. En déduire que l'ensemble formé par les points du contour d'un rectangle est pythagoricien.



Olympiades académiques de mathématiques 2015

Académie de Bordeaux

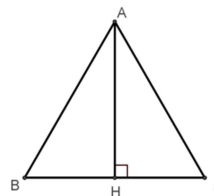
Éléments de solution

Exercice 1 : Défi entre sœurs

Partie A

1. La hauteur [AH] du triangle équilatéral ABC est un des côtés de l'angle droit du triangle AHB. D'après le théorème de Pythagore $AH^2 = AC^2 - CH^2$. $AC = 1$ et $CH = \frac{1}{2}$.

Donc $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



2. Calcul des longueurs des diagonales

<i>Deux triangles</i>	<i>Trois triangles</i>	<i>Quatre triangles</i>	<i>Six triangles</i>
La plus petite des diagonales a pour longueur 1, la plus grande deux fois la longueur de la hauteur du triangle, soit $\sqrt{3}$	Trapèze isocèle : les deux diagonales ont la même longueur, celle de la plus grande diagonale du cas précédent	Le triangle ACH rectangle en H fournit, grâce au théorème de Pythagore, la longueur de la diagonale [AC] : $AC^2 = AH^2 + CH^2$ $AC^2 = 6,25 + 0,75$. D'où $AC = \sqrt{7}$. La plus petite diagonale est la diagonale du cas précédent.	La plus petite diagonale est la plus grande du cas précédent. Pour la plus grande, on calcule la longueur de l'hypoténuse du triangle ACJ, rectangle en J, projeté orthogonal de C sur (AB). $AB^2 = 10,5 + 0,75$, d'où $AB = \sqrt{23}$

Partie B

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair**, on pose $n = 2p$, la plus grande des diagonales est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit a pour longueur $p + \frac{1}{2}$ et l'autre $\frac{\sqrt{3}}{2}$. $L^2 = p^2 + p + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ donne le résultat demandé.

2. Lorsqu'on ajoute un triangle, la figure obtenue est un trapèze isocèle dont les diagonales ont toutes les deux la longueur L .

3. Dans le cas d'un parallélogramme constitué de 56 triangles, selon la question 1. de cette partie, $L = \sqrt{813}$ et $l = \sqrt{757}$.

Partie C

1. Le nombre $p^2 + p$ (égal à $p(p + 1)$) est en effet un nombre pair. Son successeur est impair. En revanche, $7^2 + 7 + 1 = 57$, multiple de 3...

2. $\sqrt{2}$, racine d'un nombre premier pair, ne peut figurer dans la suite des longueurs possibles. Cette suite est par construction croissante et $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$ en sont deux termes consécutifs.

3. La question est : existe-t-il un entier naturel p solution de l'équation $p^2 + p + 1 = 2015$? Cette équation s'écrit $(p + \frac{1}{2})^2 = 2014,25$ et 2014,25 n'est le carré d'aucun décimal. La réponse est donc non.

4. 1 015 056, 25 est le carré de 1 007,5. L'équation $(p + \frac{1}{2})^2 = 1 015 056,25$ a donc deux solutions, 1 007 et $-1 008$. Une seule répond au problème, ce sont 2 014 triangles qu'il faut aligner pour l'obtenir.

5. Quelques essais semblent confirmer cette tendance : 0,9 est dépassé dès la première différence, 0,99 à la sixième.

p	$L(p + 1)$	$L(p)$	Différence
1	2,645751311	1,732050808	0,913700503
2	3,605551275	2,645751311	0,959799964
3	4,582575695	3,605551275	0,977024419
4	5,567764363	4,582575695	0,985188668
5	6,557438524	5,567764363	0,989674161
6	7,549834435	6,557438524	0,992395911

Seule une démonstration pourra le confirmer. Calculons donc : $L(p+1) - L(p) = \sqrt{p^2 + 3p + 3} - \sqrt{p^2 + p + 1}$

$$\text{Ou encore : } L(p+1) - L(p) = \frac{(\sqrt{p^2+3p+3})^2 - (\sqrt{p^2+p+1})^2}{\sqrt{p^2+3p+3} + \sqrt{p^2+p+1}}$$

$$\text{Et enfin : } L(p+1) - L(p) = \frac{2 + \frac{2}{p}}{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}}\right)}$$

Où l'on voit que, pour les « grandes » valeurs de p (elles n'ont pas besoin d'être si grandes que cela, d'ailleurs), le numérateur comme le dénominateur de ce quotient ne cessent de se rapprocher de 2 ; le quotient est donc proche de 1.

Exercice 2 : On est les rois !

Partie A

- Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, alors $0 \leq 2x \leq 1$. Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, alors $0 \leq 1 - x \leq \frac{1}{2}$ et on est ramené au cas précédent.
- L'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est « étiré » sur l'intervalle $[0, 1]$, l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est « replié » sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis lui aussi « étiré ».

Partie B

- Les neuf images successives de ces deux nombres sont données dans le tableau :

x	x_1	x_1	x_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
0,33	0,66	0,68	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08	0,16

Les images successives de $\frac{1}{3}$ se stabilisent rapidement, celles de 0,33 ne se stabilisent pas (le 0,16 prédit cependant le retour de 0,64 et donc un cycle). À droite, les premières images engendrées par 0,666666 confirment cette dispersion, plus lente.

2. - La fève ne change pas de position : l'équation $f(x) = x$ a pour solutions 0 (dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$) et $\frac{2}{3}$ (dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$).
 - La fève revient à sa position initiale après deux opérations : on est amené à discuter en découpant l'intervalle $[0, 1]$ en quatre. L'équation $f(f(x)) = x$ a pour solutions $\frac{2}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ et $\frac{4}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. On élimine 0 et $\frac{2}{3}$, qui sont naturellement réapparues.

- La fève revient à sa position initiale après trois opérations. Le tableau ci-dessous permet de suivre la discussion (on n'a pas dressé le tableau correspondant à la situation précédente...)

Intervalle	$\left[0, \frac{1}{8}\right]$	$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$	$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$	$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$	$\left[\frac{7}{8}, 1\right]$	0,66666666
Écriture de $f(x)$	$2x$	$2x$	$2x$	$2x$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	0,66666668
Intervalle contenant $f(x)$	$\left[0, \frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[0, \frac{1}{4}\right]$	0,66666672
Écriture de $f(f(x))$	$4x$	$4x$	$2-4x$	$2-4x$	$4x-2$	$4x-2$	$4-4x$	$4-4x$	0,66666656
Intervalle contenant $f(f(x))$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	0,66666688
Écriture de $f(f(f(x)))$	$8x$	$2-8x$	$8x-2$	$4-8x$	$8x-4$	$6-8x$	$8x-6$	$8-8x$	0,66666624
Égalité à traiter	$7x=0$	$9x=2$	$7x=2$	$9x=4$	$7x=4$	$9x=6$	$7x=6$	$9x=8$	0,66666752
Solutions	exclu	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{7}$	exclu	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{9}$	0,66666496

On remarque que les six nombres solutions sont éléments de deux cycles : $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}$ d'une part, $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$ d'autre part. ...

3. Atteindre sa cible, pour un nombre non nul, c'est d'abord atteindre 1, puisque 1 est l'autre nombre de l'intervalle $[0, 1]$ dont l'image par f est 0. Tous les inverses des puissances entières de 2 atteignent leur cible (par doublement successif, puisqu'à chaque étape on obtient un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$).

Le nombre $\frac{2}{3}$, égal à toutes ses images successives, n'atteint pas sa cible.

4. Les images successives de $\frac{2^{015}}{2^{2015}}$ sont inférieures à $\frac{1}{2}$ (elles sont obtenues par doublement successif) jusqu'à $\frac{2^{015}}{2^{048}}$, qui est supérieur. L'image de ce nombre est $\frac{33}{1024}$, dont les images sont encore inférieures à $\frac{1}{2}$ jusqu'à $\frac{33}{64}$, auquel succèdent $\frac{31}{32}, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}$, etc. jusqu'à $\frac{1}{2}$ et 1 puis 0.

5. En raisonnant sur les antécédents : 0 a comme antécédents lui-même et 1, 1 n'a comme antécédent que $\frac{1}{2}$, celui-ci ayant comme antécédents $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. On se donne un entier n et un entier p non nul inférieur à 2^n , et on cherche les antécédents de $\frac{p}{2^n}$. Ce sont les solutions des équations $\frac{p}{2^n} = 2x$ ou $\frac{p}{2^n} = 2(1-x)$. Il y en a deux, $\frac{p}{2^{n+1}}$, qui est inférieur à $\frac{1}{2}$, et $\frac{2^{n+1}-p}{2^{n+1}}$, qui lui est supérieur. Les prédécesseurs de 0 sont donc bien les quotients par une puissance de 2 des entiers inférieurs à cette puissance... et 0.

Partie C

1. On introduit une variable entière N , de valeur initiale 0. Avant la fin du **Tant que**, l'instruction $N \leftarrow N+1$ (Ou toute autre forme d'incrément) permet de compter le nombre d'itérations. Après la fin du **Tant que**, on donne une instruction d'affichage de N . Si le nombre introduit dans l'algorithme n'atteint pas la cible, l'algorithme ne s'arrête pas.

2. Le nombre $1/9$ est à l'origine du cycle $2/9, 4/9, 8/9$. L'algorithme tourne indéfiniment. Les images successives du nombre $1/9$ subissent, de l'une à la suivante, des dégradations dues aux approximations inhérentes au calcul sur machine. Dans le tableau de droite, on voit que les images successives de $1/9$, qui devraient être écrites 0,22222222 ; 0,44444444 et 0,88888888, perdent de la précision jusqu'à être « confondues » avec des rationnels de $[0,1]$ dont le dénominateur est une puissance de 2, ensemble dense dans $[0,1]$. (*)

Par ailleurs, on prend toujours un risque en posant une condition du type $x > 0$ dans un programme d'ordinateur qui calcule sur des nombres en virgule flottante, mais ceci est une autre histoire.

(*) On pourra consulter les entretiens donnés par Sylvie Boldo sur https://interstices.info/jcms/c_36153/pourquoi-mon-ordinateur-calcule-t-il-faux ?

0,444444656
 0,888889313
 0,222221375
 0,444442749
 0,888885498
 0,222229004
 0,444458008
 0,888916016
 0,222167969
 0,444335938
 0,888671875
 0,22265625
 0,4453125
 0,890625
 0,21875
 0,4375
 0,875

Exercice 3S : Prendre la tangente

1. a. Le théorème de Pythagore dans le triangle AMN , rectangle en A , donne $MN^2 = x^2 + y^2$ d'où $MN = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Comme $CD = CT$, le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles CNT et CND donne :

$$TN^2 = CN^2 - CT^2 = CN^2 - CD^2 = DN^2. \text{ Donc } TN = DN = 1 - AN = 1 - y.$$

De même, $TM = 1 - x$, donc $MN = TN + TM = 1 - y + 1 - x = 2 - x - y$.

- b. $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x - y$ donne $x^2 + y^2 = (2 - x - y)^2$. Après développement, élimination de $x^2 + y^2$ et simplification par 2, on obtient : $2x - 2 = y(x - 2)$.

Comme $x \in [0,1]$, on a $x \neq 2$ et $y = \frac{2x-2}{x-2} = 2 + \frac{2}{x-2}$.

2. D'après 1, $MN = f(x)$ avec $f(x) = 2 - x - y = 2 - x - 2 - \frac{2}{x-2} = -x - \frac{2}{x-2}$.

f est dérivable sur $[0, 1]$ et $f'(x) = -1 + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{2-(x-2)^2}{(x-2)^2} = \frac{(\sqrt{2}-x+2)(\sqrt{2}+x-2)}{(x-2)^2}$.

On en déduit le tableau des variations de f sur $[0,1]$.

x	0	$2 - \sqrt{2}$	1
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	1	\searrow m	\nearrow 1

Le minimum de la fonction f est $m = f(2 - \sqrt{2}) = -2 + \sqrt{2} - \frac{2}{-\sqrt{2}} = -2 + 2\sqrt{2}$.

MN est minimale pour $x = 2 - \sqrt{2}$. Le minimum de MN est égal à $2\sqrt{2} - 2$.

3. $\text{aire}(AMN) = 1 - \text{aire}(CDNT) - \text{aire}(CBMT) = 1 - 2\text{aire}(CNT) - 2\text{aire}(CMT)$.

Donc $\text{aire}(AMN) = 1 - 2\text{aire}(CMN) = 1 - CT \times MN = 1 - MN$.

L'aire du triangle AMN est maximale si et seulement si la longueur MN est minimale. Elle est donc obtenue pour $x = 2 - \sqrt{2}$. Le maximum de cette aire est égal à $3 - 2\sqrt{2}$.

Exercice 3L : Décomposition en sommes

Partie A

1. Les 5 premiers entiers 2-décomposables sont : 4, 8, 12, 16, 20.
Un entier 2-décomposable ne peut pas être impair. Il est pair comme somme de deux entiers impairs.
Les entiers deux décomposables sont de la forme $(2n - 1) + (2n + 1) = 4n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. Ce sont donc les multiples de 4 qui sont strictement positifs.
2. $S = x + (x + 2) + (x + 4) = 3x + 6 = 3(x + 2)$ est un multiple de 3.
L'équation $3(x + 2) = 2015$ n'a pas de solution entière car 2015 n'est pas un multiple de 3 donc 2015 n'est pas 3-décomposable.
L'équation $3(x + 2) = 1803$ a pour solution 599 donc $1803 = 599 + 601 + 603$ est 3-décomposable.

Partie B

1. $N = x + (x + 2) + (x + 4) + \dots + (x + 2(k - 1))$
 $N = kx + 2(1 + 2 + \dots + (k - 1)) = kx + (k - 1)k = k(x + k - 1)$.
2. Si k est pair, comme x est impair, $x + k - 1$ est pair et donc $N = k(x + k - 1)$ est un multiple de 4 comme produit de deux entiers pairs.
3. Pour $k = 13$, on a $N = 13(x + 12)$.
L'équation $13(x + 12) = 2015$ équivaut à $x + 12 = 155$ soit $x = 143$.
On a donc $2015 = 143 + 145 + 147 + 149 + 151 + 153 + 155 + 157 + 159 + 161 + 163 + 165 + 167$ est donc 13-décomposable.
4. k est un diviseur de N et $x + k - 1 \geq k$ donc k est un diviseur de N inférieur à \sqrt{N} .
On en déduit que la seule valeur possible de k supérieur à 13 est 31.
Pour $k = 31$, on a $N = 31(x + 30)$.
L'équation $31(x + 30) = 2015$ équivaut à $x + 30 = 65$ soit $x = 35$.
Ainsi 2015 est 31-décomposable.

Exercice 4 : Ensembles pythagoriciens

1. Si on colorie alternativement les sommets en rouge et en bleu, on ne peut former aucun triangle rectangle dont les sommets ont la même couleur.
2. En coloriant un demi-cercle d'extrémités A et B en rouge et le demi-cercle restant en bleu, le point A étant rouge et le point B bleu, deux points diamétralement opposés sont toujours de couleurs différentes et on ne peut donc pas tracer un triangle rectangle dont les sommets sont sur le cercle et coloriés de la même couleur car deux des sommets sont nécessairement diamétralement opposés.
3. **a.** Soit H le milieu de [AB] qui est aussi le pied de la hauteur issue de C puisque le triangle ABC est équilatéral. On a $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CH}$. On en déduit que $(CH) \parallel (KM)$.
Or $(CH) \perp (MB)$ donc $(KM) \perp (BM)$. Le triangle BKM est rectangle en M.
De même, les triangles AML et CLK sont rectangles en L et K respectivement.
b. Les trois points K, L, M ne peuvent pas être de couleurs toutes différentes puisqu'on n'utilise que 2 couleurs. Deux au moins des points K, L, M sont donc de la même couleur.
c. On suppose que \mathcal{F} n'est pas pythagorien.
K et L étant rouges, tous les points du segment [BC] sont bleus sauf K.
Le milieu I de [BC] est donc bleu ainsi que B donc A est rouge.
A et L sont rouges donc M est bleu.
Soit J le projeté orthogonal de M sur [BC]. Les sommets du triangle rectangle BMJ sont bleus, ce qui contredit le fait que \mathcal{F} n'est pas pythagorien.
 \mathcal{F} est donc pythagorien
4. **a.** Supposons que l'ensemble des 8 points A, B, C, D, E, F, G, H ne soit pas pythagorien.
Il est impossible que A et E soient de la même couleur sinon D, H, G serait de la même couleur (différente de celle de A), ce qui est contraire à l'hypothèse.
De même, il est impossible que B et E soient de la même couleur.
Donc A et B sont de la même couleur.
De même, A et D sont de la même couleur.
Ainsi A, B, D sont de la même couleur, ce qui est contraire à l'hypothèse.
L'ensemble des 8 points A, B, C, D, E, F, G, H est donc pythagorien.
b. L'ensemble des points du contour d'un rectangle est pythagorien puisqu'il contient un ensemble pythagorien.