SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE BORDEAUX

Classes de première S • 2014

académie
Bordeaux

MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

OLYMPIADES ACADÉMIQUES
DE
MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

19 mars 2014

Durée de l'épreuve : 4 heures

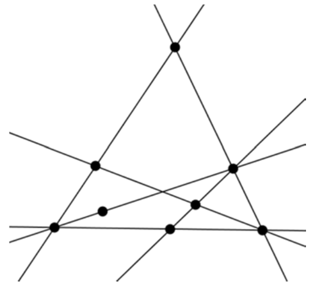
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Les calculatrices de poche sont autorisées conformément à la règlementation en vigueur

Les candidats de la série S doivent traiter les exercices : 1, 2, 3S et 4S.

EXERCICE 1 : FIGURES ÉQUILIBRÉES

<u>Exercice national commun à tous les candidats</u>



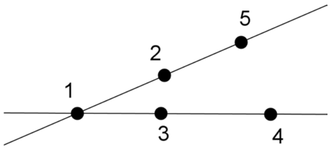
La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.

Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.

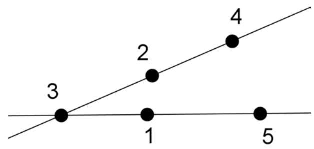
1. Construire une figure équilibrée constituée :
- **a.** de 7 points marqués et 5 droites ;
- **b.** de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p. Cette numérotation est alors dite ***magique*** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



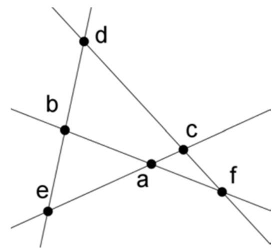
$K = 8$



$K = 9$

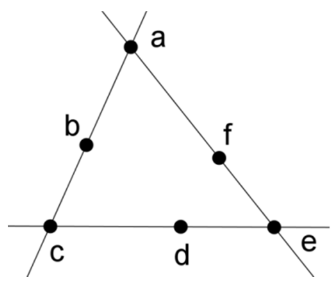
Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites.
Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.



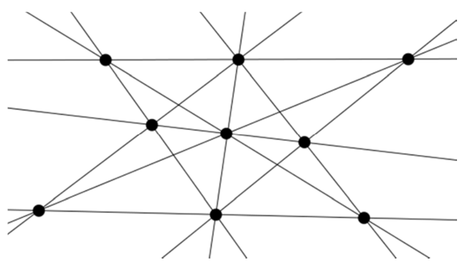
- **a.** Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
- **b.** Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
  Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites.
Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.



- **a.** Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.
- **b.** Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.
- **c.** Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.

5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.



Cette figure admet-elle une numérotation magique ?

EXERCICE 2 : LE PLUS COURT POSSIBLE

<u>Exercice national commun à tous les candidats</u>

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.
La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A
« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.
« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.
« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

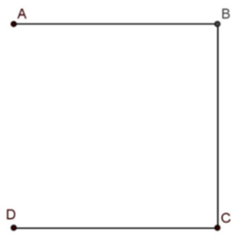


fig. 1 - Assistant n°1

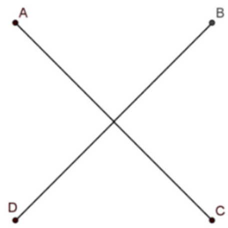


fig. 2 - Assistant n°2

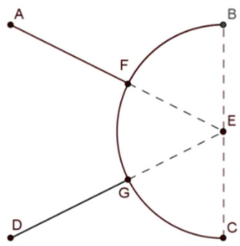


fig. 3 - Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :
« On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

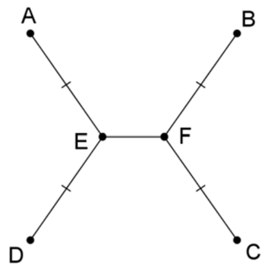


fig. 4

Partie B
Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.
Rappels de géométrie :
Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :
on a toujours $AB + BC \geq AC$ *;*
on a l'égalité $AB + BC = AC$ *si, et seulement si, B appartient au segment [AC].*

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.

On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et C d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100km de côté, comme sur la figure 5 suivante.

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.
En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).

Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

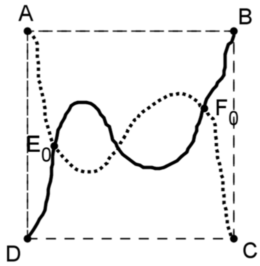


fig. 5

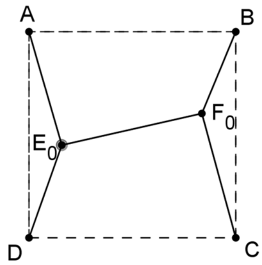


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

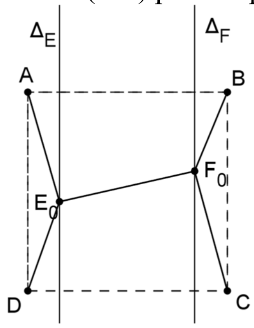


fig. 7

a. Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.
On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.
b. Montrer que $EF \leq E_0F_0$.
c. Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme ci-dessous où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

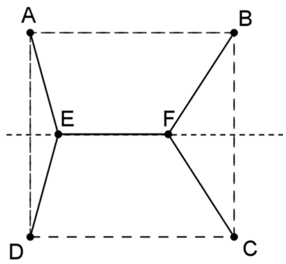
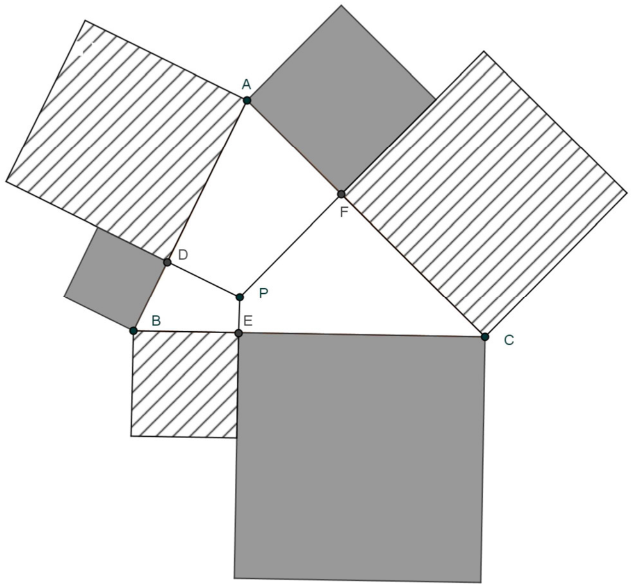


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].
a. Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].
b. D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).
Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?
c. Quelle est alors la valeur de l'angle DEA ?

EXERCICE 3S : PLEIN DE CARRÉS

<u>Exercice réservé aux candidats inscrits en série S</u>



ABC est un triangle ayant trois angles aigus.
P est un point intérieur à ce triangle qui se projette orthogonalement sur les côtés [*AB*], [*BC*] et [*CA*] respectivement en *D*, *E* et *F*.
À l'extérieur du triangle, on construit alors six carrés comme sur la figure.

1. Montrer que la somme des aires des carrés « grisés » est égale à celle des carrés hachurés.

2. Démontrer que :

$$AF^2 + FC^2 = \frac{1}{2}[AC^2 + (AF - FC)^2]$$

3. Où doit se trouver le point *P* pour que la somme des aires des carrés hachurés soit minimale ?

4. L'objet de cette question est de déterminer les mesures a, b et c des côtés du triangle *ABC* sachant que ce sont des entiers naturels vérifiant $0 < a \leq b \leq c$ et que le minimum évoqué à la question 3 est égal à 2014.

a. Démontrer que $a^2 + b^2 + c^2 = 8056$.
b. En déduire que $1 \leq a \leq 51$ et $52 \leq b \leq 89$.
c. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche les triplets (x, y, z) d'entiers naturels tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 8056$ et $0 < x \leq y \leq z$.

```
Variables :     X, Y, Z sont des entiers naturels

Traitement :    Pour X allant de 1 à 51
                        Pour Z allant de 52 à 89
                                …
                                …
                                …
                        Fin de boucle Pour
                Fin de boucle Pour

Fin d'algorithme
```

d. On utilisant le fait que les angles du triangle *ABC* sont aigus, démontrer que $a^2 + b^2 > c^2$.
En déduire les mesures des côtés du triangle *ABC*.

EXERCICE 4S : NOMBRES SPHÉNIQUES ABONDANTS

<u>Exercice réservé aux candidats inscrits en série S</u>

Un nombre premier n'a que deux diviseurs distincts : 1 et lui-même. La liste des nombres premiers est :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, ...$$

On dit qu'un entier naturel *n* est abondant si la somme de tous ses diviseurs (y compris 1 et *n*) est strictement supérieure ou égale à $2n$. Lorsque cette somme est strictement inférieure à $2n$, on dit que *n* est déficient.
Par exemple, la somme des diviseurs de 12 est 1+2+3+4+6+12=28. Or $28 > 2 \times 12$, donc 12 est abondant.

On dit qu'un entier naturel *n* est sphénique s'il est le produit de trois nombres premiers différents.
Par exemple, $12 = 2 \times 2 \times 3$ n'est pas sphénique. $30 = 2 \times 3 \times 5$ est le plus petit entier sphénique.

1. a. 2014 est-il un entier sphénique ? Est-il abondant ?
   b. Vérifier que 230 et 231 sont deux entiers consécutifs sphéniques.
   c. Vérifier que 1309, 1310 et 1311 sont trois entiers consécutifs sphéniques.
   d. Est-il possible de trouver quatre entiers consécutifs sphéniques ?

2. Soit *n* un entier sphénique $n = p \times q \times r$ où p, q et *r* sont trois nombres premiers tels que $2 \leq p < q < r$.

   a. Donner 8 diviseurs de *n*. On admettra que ce sont les seuls diviseurs de *n*.
   Démontrer que leur somme est égale à $(p+1)(q+1)(r+1)$.
   b. En déduire que *n* est abondant si et seulement si $\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{r}\right) > 2$.
   c. En déduire que si $p \geq 3$, *n* est déficient.
   d. Etude du cas $p = 2$.
   Démontrer que si *n* est abondant si et seulement si $\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{r}\right) > \frac{4}{3}$.
   e. Déterminer tous les nombres sphéniques abondants.

CORRECTION, BORDEAUX 2014

Premier exercice Académique (exo 3S)

Olympiades mathématiques, S

1. $AD^2 = PA^2 - PD^2$; $CF^2 = PC^2 - PF^2$; $BE^2 = PB^2 - PE^2$; $EC^2 = PC^2 - PE^2$; $DB^2 = PB^2 - PD^2$; $FA^2 = PA^2 - PF^2$.
   Donc $AF^2 + CE^2 + BD^2 = FC^2 + BE^2 + DA^2$.
2. $AC^2 + (AF - FC)^2 = (AF + FC)^2 + (AF - FC)^2 = 2AF^2 + 2FC^2$
   Donc $AF^2 + FC^2 = \frac{1}{2}\left[AC^2 + (AF - FC)^2\right]$
3. De même $CE^2 + EB^2 = \frac{1}{2}\left[BC^2 + (BE - EC)^2\right]$ et $BD^2 + DA^2 = \frac{1}{2}\left[AB^2 + (AD - DB)^2\right]$
   Donc $AF^2 + FC^2 + CE^2 + EB^2 + BD^2 + DA^2 =$
   $$\frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right) + \frac{1}{2}\left[(AF - FC)^2 + (BE - EC)^2 + (AD - DB)^2\right].$$
   Cette somme est minimale lorsque $AF = FC$, $BE = EC$ et $AD = DB$, c'est-à-dire lorsque E, F et D sont les milieux des côtés, donc quand $(PE), (PF)$ et (PD) sont les médiatrices des côtés. P est alors le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Il en va de même pour la somme des aires des carrés hachurés qui est égale à la moitié de l'aire précédente.
4. a) La somme des aires des carrés hachurés, lorsqu'elle est minimale est égale à $\frac{1}{4}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$.
   Dans ce cas, $2014 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, donc $a^2 + b^2 + c^2 = 8056$. Si $a \geqslant 52$, alors $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3 \times 52^2 > 8056$, donc $a \leqslant 51$.
   De même si $c \leqslant 51$, alors $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 3 \times 51^2 < 8056$, donc $52 \leqslant c$. Enfin si $c \geqslant 90$, alors $a^2 + b^2 + c^2 > c \geqslant 90^2 > 8056$. Donc $c \leqslant 89$.

   b) On complète avec :
   Pour Y allant de X à Z
   Si $X^2 + Y^2 + Z^2 = 8056$ Afficher X, Y, Z
   Fin de boucle Pour.

   c) D'après le théorème d'Al Kashi, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$. Or l'angle en C étant aigu, $\cos\widehat{C} > 0$ donc $c^2 < a^2 + b^2$.
   Le programme précédent donne 9 triplets solutions, mais un seul vérifie la dernière égalité : (36, 54, 62).
   Les autres triplets sont : (6,44,78), (6,36,82), (10,60,66), (10,30,84), (18,26,84), (26,36,78), (28,54,66) et (42,44,66).

source : apmep

CORRECTION, BORDEAUX 2014

Second exercice Académique (exo 4S)

Olympiades mathématiques, S

1. a) $2014 = 2 \times 19 \times 53$ est bien sphénique. La somme de ses diviseurs est égale à 3240. Donc il n'est pas abondant.

   b) $230 = 2 \times 5 \times 23$ et $231 = 3 \times 7 \times 11$.

   c) $1309 = 7 \times 11 \times 17, 1310 = 2 \times 5 \times 131, 1311 = 3 \times 19 \times 23$.

   d) Étant donnés quatre entiers consécutifs, l'un est forcément multiple de 4 et ne peut donc être sphénique.

2. a) Les diviseurs sont $1, p, q, r, pq, pr, qr$ et pqr et leur somme est $1+p+q+r+pq+pr+qr+pqr$. On vérifie alors que $(p+1)(q+1)(r+1) = 1+p+q+r+pq+pr+qr+pqr$

   b) n est abondant si $(p+1)(q+1)(r+1) \geqslant 2pqr$, donc si $\dfrac{p+1}{p} \times \dfrac{q+1}{q} \times \dfrac{r+1}{r} \geqslant 2$ donc si $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{q}\right)\left(1+\dfrac{1}{q}\right) \geqslant 2$.

   c) Si $p \geqslant 3$ alors $q \geqslant 5$ et $r \geqslant 7$ donc $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{q}\right)\left(1+\dfrac{1}{r}\right) \leqslant \dfrac{4}{3} \times \dfrac{6}{5} \times \dfrac{8}{7} = \dfrac{64}{35} < 2$ $1+\dfrac{1}{r} > 1$.

3. On en déduit que pour que n soit abondant, il faut $p = 2$.
   n est donc abondant si $\left(1+\dfrac{1}{q}\right)\left(1+\dfrac{1}{r}\right) \geqslant \dfrac{4}{3}$.
   Si $q \geqslant 7$ alors $\left(1+\dfrac{1}{q}\right)\left(1+\dfrac{1}{r}\right) \leqslant \dfrac{8}{7} \times \dfrac{12}{11} < \dfrac{4}{3}$, donc n ne peut être abondant que si $q = 3$ ou $q = 5$.
   Si $q = 3$, n est abondant si et seulement si $1+\dfrac{1}{r} > 1$, ce qui est toujours le cas.
   Si $q = 5$, n est abondant si et seulement si $1+\dfrac{1}{r} > \dfrac{10}{9}$, donc si $q < 9$, donc si $q = 7$.
   Les nombres sphéniques abondants sont donc les nombres de la forme $n = 6r$ où r est un nombre premier quelconque supérieur ou égal à 5 ainsi que l'entier 70.