SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE BORDEAUX

Classes de première S • 2012

académie
Bordeaux

MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

OLYMPIADES ACADÉMIQUES
DE
MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

2012

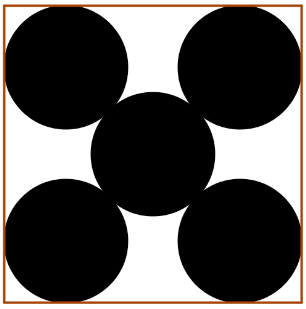
Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

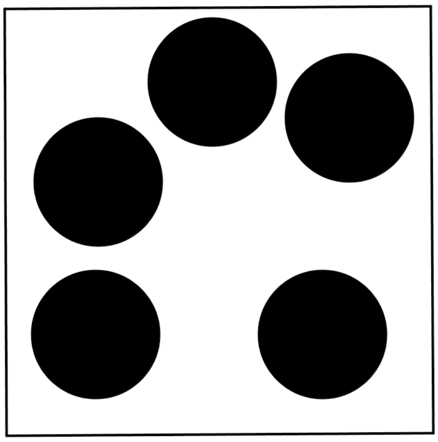
Les calculatrices de poche sont autorisées
conformément à la règlementation en vigueur

EXERCICE ACADÉMIQUE 1 : cinq cercles dans un carré / BORDEAUX 2012

1. Cinq cercles de rayon 1cm ont été placés dans un carré comme l'indique le dessin. Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré. Déterminer la longueur d'un côté du carré.



2. On se propose de déterminer la longueur du côté du plus petit carré contenant cinq cercles de rayon 1cm disjoints ou tangents extérieurement.



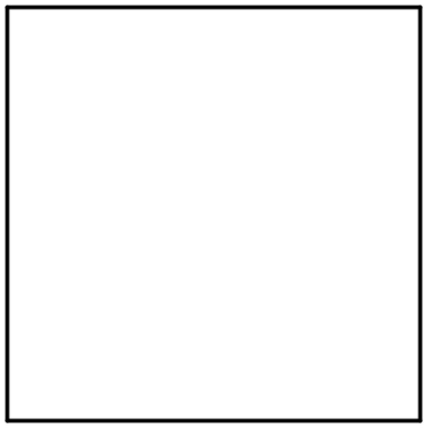


Figure 1

   a. Déterminer et représenter sur la figure 1 l'ensemble D des points qui peuvent être le centre d'un cercle de rayon 1cm, ce cercle étant intérieur au carré.
   b. Quel est le côté du plus petit carré contenant deux points distants de 2cm ? Justifier la réponse.
   c. Quel est le côté du plus petit carré contenant cinq points distants, deux à deux, d'au moins 2cm. Justifier la réponse. (On pourra s'aider de la figure 2)

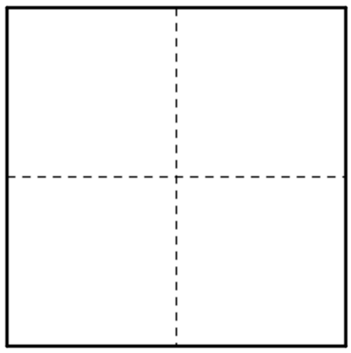
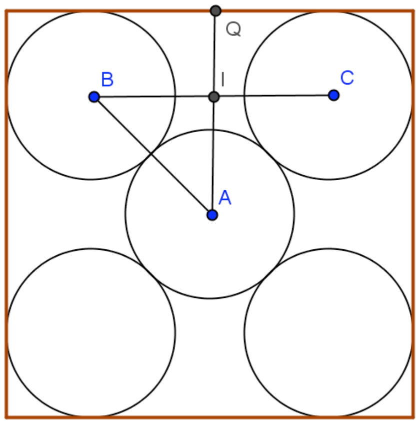


Figure 2

   d. Conclure

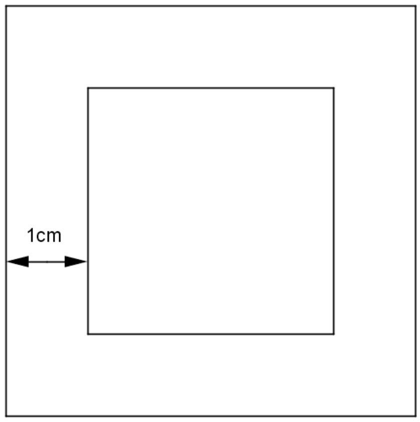
Solution :



1. AB=2, AI=$\sqrt{2}$, AQ=1+$\sqrt{2}$.

Le côté du carré est donc 2(1+$\sqrt{2}$).

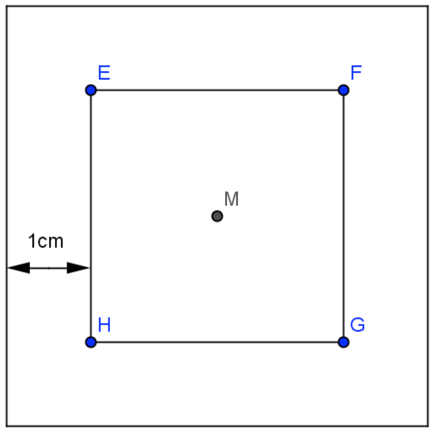
2. a.



b. La plus longue distance entre 2 points d'un carré est celle entre deux sommets diagonalement opposés. Le plus petit carré contenant deux points distants de 2cm a donc sa diagonale qui mesure 2 cm et a donc un côté de $\sqrt{2}$ cm.

c. Le carré ayant été partagé en quatre, l'un des « petits » carrés contient donc au moins deux des cinq points et par conséquent mesure au moins $\sqrt{2}$ cm. Le carré intérieur mesure donc au moins 2$\sqrt{2}$ cm de côtés.

La figure ci-contre montre que la position des cinq points est possible dans le carré de côté 2$\sqrt{2}$ cm.



d. On en conclut que la configuration étudiée au 1. est celle qui répond au problème.

EXERCICE ACADÉMIQUE 2 : Pavé droit / BORDEAUX 2012

1. L, S et V étant trois nombres réels positifs, montrer que les triplets (a,b,c) solutions du système $\begin{cases} a+b+c=L \\ ab+ac+bc=S \\ abc=V \end{cases}$ sont tels que a, b et c sont les solutions de l'équation $X^3-LX^2+SX-V=0$.
2. Déterminer les dimensions d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes ses arètes est de 20cm, la somme des aires des six faces est de 14cm^2 et dont le volume est de 3cm^3.
3. Quels sont les volumes minimum et maximum d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes les arètes est de 20cm, la somme des aires des six faces est de 14cm^2.

Solution :

1. $a^3-La^2+Sa-V=a^3-(a+b+c)a^2+S(ab+bc+ca)-abc=0$. De même pour *b* et *c*.
2. Les dimensions de ce pavé sont les solutions de l'équation $X^3-5X^2+7X-3=0$ équivalente à $(X-1)^2(X-3)=0$. Les dimensions sont donc 1, 1 et 3.
3. Il est évident que $0 \le x \le 5$. On définit la fonction f sur $[0;5]$ par $f(x)=x^3-5x^2+7x$.

   $f'(x)=3x^2-10x+7=(x-1)(3x-7)$

   La fonction f posséde un minimum en $\frac{7}{3}$ égal à $\frac{49}{27}$

   et un maximum en 1 égal à 3. En dehors de l'intervalle $\left[\frac{49}{27};3\right]$

   l'équation $f(x)=$ V ne possède pas les 3 solutions requises.

x	0		1		$\frac{7}{3}$		5
f(x)		$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{49}{27}$	$\nearrow$	

La valeur maximale de V est donc 3, obtenue avec x=1, y=1 et z=3.

La valeur minimale de V est égale à $\frac{49}{27}$ obtenue pour x=y=$\frac{7}{3}$ et z=$\frac{1}{3}$