SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE BORDEAUX

Classes de première S • 2011

académie
Bordeaux

MINISTÈRE DE
L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE

OLYMPIADES ACADÉMIQUES
DE
MATHÉMATIQUES

CLASSE DE PREMIÈRE

2011

Durée de l'épreuve : 4 heures

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Les calculatrices de poche sont autorisées
conformément à la règlementation en vigueur

OLYMPBORD11

EXERCICE ACADÉMIQUE 1 : La fourmi / BORDEAUX 2011

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Une fourmi se promène sur ce plan de la façon suivante : lorsqu'elle repart d'un point de coordonnées (x ;y) où elle était arrêtée, elle marche en ligne droite jusqu'au point de coordonnées (-3x-y ; 7x+ky) où k est un nombre entier fixé pour toute la promenade.

1°) On prend k=1

a- La fourmi part du point A(1 ;1) et fait trois déplacements. Dessiner son trajet. Sur quel point arrive-t-elle ?

b- De quel point doit partir la fourmi pour arriver en trois déplacements sur le point B(16 ;0) ?

2°) Sur quel point doit se placer la fourmi pour ne pas bouger quelle que soit la valeur de k ?

3°) On prend k=2.

a- La fourmi part du point A(1 ;1) et fait trois déplacements. Dessiner son trajet. Sur quel point arrive-t-elle ?

b- Est-ce que la fourmi revient toujours à son point de départ au bout de trois déplacements ?

4°) Pour quelle(s) valeur(s) de k la fourmi se retrouve t-elle à son point de départ en trois déplacements quel que soit son point de départ ?

Correction :

1.a. A(1 ;1) ⟶ B(-4 ;8) ⟶ C(4 ;-20) ⟶ D(8 ;8)

b. D(16 ;0) ⟵ C(4 ;-28) ⟵ B(-6 ;14) ⟵ A(2 ;0)

2. $\begin{cases} -3x - y = x \\ 7x + ky = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x(2k+9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

3. a. A(1 ;1) ⟶ B(-4 ;9) ⟶ C(3 ;-10) ⟶ D(1 ;1)

b. A(x ;y) ⟶ B(-3x-y ;7x+2y) ⟶ C(2x+y ;-7x-3y) ⟶ D(x ;y)

4.A(x ;y) ⟶ B(-3x-y ;7x+ky) ⟶ C(2x+(3-k)y ;7x(k-3)+y(k²-7)) ⟶ D(x(-7k+15)+y(-k²+3k-2) ;7x(k²-3k+2)+y(k³-14k+21))

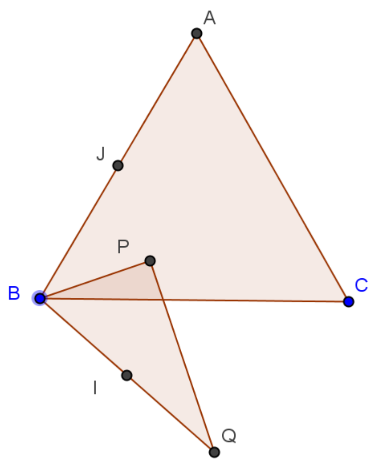
A=D pour toute valeur de k nécessite -7k+15=1, donc k=2 et on sait que cette condition suffit pour que A=D. 2 est donc la seule valeur répondant à la question.

EXERCICE ACADÉMIQUE 2 : Triangles et cercles / BORDEAUX 2011

ABC est un triangle équilatéral. On se propose de construire P intérieur au triangle tel que $PB=\frac{1}{2}PA$ et $PC=\frac{\sqrt{3}}{2}PA$.

Première partie

On suppose que le point P placé sur la figure satisfait à ces deux conditions.



On désigne par r la rotation de centre C et d'angle 60°. Q est l'image de P par r.

1. Démontrer que le triangle BPQ est rectangle en P. En déduire que le triangle BQC est rectangle en Q, puis que le point P est sur le cercle de diamètre [AC].

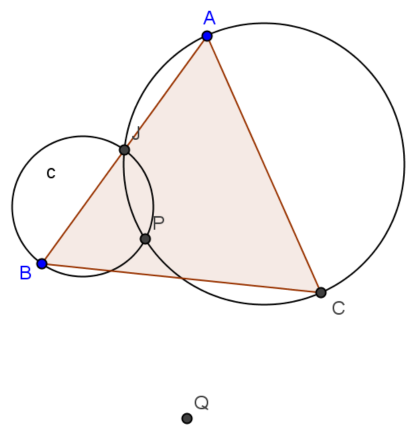
2. I est le milieu de [BQ], J celui de [AB].

a. Démontrer que le triangle PIC est rectangle en P. En déduire l'alignement des points A, P et I.

b. Justifier que P est le centre de gravité du triangle ABQ. En déduire l'alignement des points Q, P et J.
c. Justifier que le point P est sur le cercle de diamètre [BJ].

Deuxième partie

ACB triangle équilatéral. J milieu de [AB]. P le point d'intersection, autre que J, des cercles de diamètre [AC] et [BJ].
Q est l'image de P par la rotation r de centre C et d'angle 60°.
On se propose de prouver que P vérifie bien les deux conditions
$PB=\frac{1}{2}PA$ et $PC=\frac{\sqrt{3}}{2}PA$.



1. Montrer que $\widehat{JPA}=30°$; en déduire $\widehat{BPA}$ et $\widehat{BPC}$. En déduire la nature du triangle BPQ.
2. Justifier que le triangle BQC est rectangle en Q. En déduire $\widehat{BQP}$.
3. En déduire que le point P vérifie les deux conditions requises.

Correction :

Première partie

1. r conservant les distances, AP=BQ. Or $BP^2+PQ^2=BP^2+PC^2=\frac{1}{4}PA^2+\frac{3}{4}PA^2=PA^2=BQ^2$. Le triangle BPQ est donc rectangle en P. Q est donc sur le cercle de diamètre [BC]. Par la rotation inverse de r, P est donc sur le cercle de diamètre [AC].
2. a. $PC^2+PI^2=PC^2+PB^2=PA^2$. Or par la rotation de centre B et d'angle 60°, PA=CI. On a donc $PC^2+PI^2=CI^2$. Donc PCI est rectangle en P.
Les triangles APC et CPI étant rectangles en P, les points A, P et I sont alignés.
b. $AI=AP+PI=AP+PB=\frac{3}{2}PA$. Donc P est le centre de gravité de ABQ. P est donc sur la médiane [QJ].
c. On en déduit que BPJ est rectangle en P, donc que P est sur le cercle de diamètre [BJ].

Deuxième partie

1. $\widehat{JPA}=\widehat{ACJ}=30°$. $\widehat{BPA}=\widehat{BPJ}+\widehat{JPA}=90°+30°=120°$. $\widehat{BPC}=360°-\widehat{BPA}-\widehat{CPA}=360°-120°-90°=150°$
$\widehat{BPQ}=\widehat{BPC}-\widehat{CPQ}=150°-60°=90°$.
2. P étant sur le cercle de diamètre [AC], par la rotation r, Q se trouve sur le cercle de diamètre [BC] et on a donc BQC rectangle en Q. $\widehat{BQP}=\widehat{BQC}-\widehat{CPQ}=90°-60°=30°$.
3. Dans le triangle rectangle BQP, $\dfrac{BP}{BQ}=\sin(30°)=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{QP}{BQ}=\cos(30°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .Or BQ=PA et PQ=PC, donc
$PB=\dfrac{1}{2}PA$ et $PC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}PA$.