OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE BESANÇON
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Olympiades académiques de Mathématiques

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Mercredi 11 mars 2020

académie
Besançon

RÉGION ACADÉMIQUE
BOURGOGNE
FRANCHE-COMTÉ

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Exercices proposés par l'académie de Besançon

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique. Cependant, le mode examen devra être activé devant les surveillants.

Tous les candidats traiteront **deux** exercices parmi les trois que contient ce sujet :

- Les candidats de 1ère Générale traiteront les **exercices 1 et 2**.
- Les candidats de 1ère technologique traiteront les **exercices 2 et 3**.

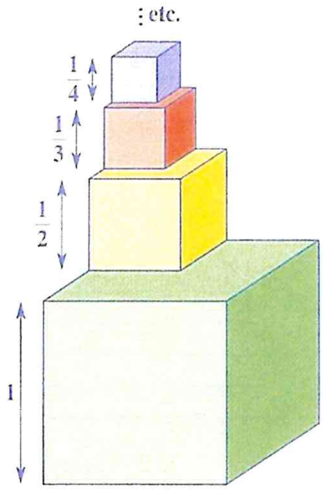
Les candidats indiqueront dans l'en-tête de leurs copies leurs noms, prénoms, filière et établissement dans lequel ils sont inscrits (dans le cas où les élèves composent en groupe, il conviendra de noter tous les noms des élèves du groupe).

Sauf cas de force majeure, aucun élève n'est autorisé à quitter définitivement la salle moins d'une heure après le début de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats de bien argumenter leurs affirmations. Dans le cas où ils ne pourraient rendre une réponse complète, il est important d'exposer les recherches effectuées.
Le sujet comprend quatre pages.

EXERCICE 1 : EMPILEMENT DE CUBES *(1Générale)*

Un artiste contemporain désire matérialiser sa vision originale de l'infini par une œuvre spatiale ainsi conçue :



- le moulage de cubes pleins, en matière plastique, d'arêtes successives (en mètres) : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
- le revêtement de toute la surface de tous les cubes construits par une couche de laque ;
- l'empilement de tous ces cubes par taille décroissante, dans une salle de musée.

L'artiste dispose d'une quantité de laque permettant de peindre une surface de $12\ m^2$; d'autre part, la salle de musée a une hauteur sous plafond de 8 mètres. Il s'agit de déterminer si, avec ces contraintes, l'artiste pourra :

- peindre autant de cubes qu'il veut ;
- en empiler autant qu'il veut.

1- On considère ci-dessous le programme saisi en langage Python :

```
a=1
b=1
n=int(input("Entrer la valeur de n désirée:"))

for i in range (2,n+1):
    a=a+1/(i*i)
    b=b+1/i

a=6*a
print ("n=",n,"    a=",a,"     b=",b)
```

a) Pour $n = 3$, quelles sont les valeurs prises par a et b après exécution de l'algorithme ?

Que représentent ces variables a et b ?

b) On fait fonctionner ce programme pour plusieurs valeurs de n ; les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

```
Entrer la valeur de n désirée: 10
n= 10     a= 9.298606386999245       b= 2.9289682539682538

Entrer la valeur de n désirée: 100
n= 100     a= 9.809903401109354       b= 5.187377517639621

Entrer la valeur de n désirée: 500
n= 500     a= 9.857616393089364       b= 6.79282342999052

Entrer la valeur de n désirée: 1000
n= 1000     a= 9.863607400089368       b= 7.485470860550343

Entrer la valeur de n désirée: 50000
n= 50000     a= 9.86948440228945       b= 11.397003949278504
```

Quelles conjectures peut-on faire sur ce que l'artiste pourra ou ne pourra pas faire au vu de ses contraintes ?

2- Pour $n \geq 1$, on note s_n la somme des aires (en m^2) des n premiers cubes construits. On a donc :

$$s_n = 6 + \frac{6}{2^2} + \frac{6}{3^2} + \cdots + \frac{6}{n^2}$$

a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) En déduire que :

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leq 1-\frac{1}{n}\leq 1$$

c) L'artiste pourra-t-il peindre autant de cubes qu'il veut ?

3- Pour $n \geq 1$, on note h_n la hauteur de l'empilement des n premiers cubes construits.

a) Exprimer h_n en fonction de n.
b) Vérifier les inégalités :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\geq\frac{1}{2}$$

c) Plus généralement, montrer que pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\geq\frac{1}{2}$$

Aide : on pourra utiliser le fait que : $2^k + 2^k = 2^{k+1}$

d) En déduire que, si $n = 2^{k+1}$ avec $k \geq 0$, alors :

$$h_n \geq \frac{3+k}{2}$$

e) En déduire une valeur de n pour laquelle on est sûr que $h_n > 8$.
f) L'artiste peut-il espérer trouver un musée avec une hauteur de plafond qui lui permette d'empiler autant de cubes qu'il veut ?

EXERCICE 2 : PARTAGES DE TRAPEZES *(Commun à tous les candidats)*

Partie A :
Déterminer tous les nombres entiers naturels m et n qui sont tels que $m^2 - n^2 = 8$

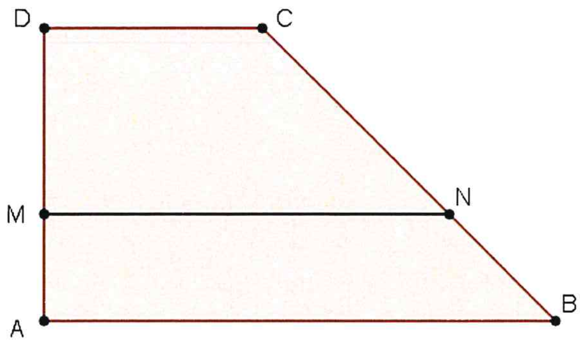
Partie B :
On considère un trapèze $ABCD$ rectangle en A, ce qui signifie que les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires. $[AB]$ et $[DC]$ sont respectivement la grande base et la petite base de ce trapèze.

a) Faire une figure.
b) Soit O le milieu de $[BC]$. Construire les points A' et D' images respectives de A et D par la symétrie centrale de centre O.
c) Quelle est nature du quadrilatère $AD'A'D$? Justifier.
d) Expliquer alors pourquoi l'aire du trapèze $ABCD$ est donnée par :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = (AB + DC) \times \frac{AD}{2}$$

Partie C :
On considère un trapèze $ABCD$ (schéma page suivante) rectangle en A, de bases $[AB]$ et $[CD]$ tel que :

- $\widehat{ABC} = 45°$
- Les longueurs AB, AD et CD sont des nombres entiers avec $AD > 2$ et $AB > DC$
- Le point M du segment $[AD]$ est tel que $AM = 2$
- N est le point du segment $[CB]$ tel que (MN) est parallèle à (AB)



L'objectif est de déterminer les valeurs des longueurs AB, AD et CD telles que les trapèzes $ABNM$ et $DCNM$ aient la même aire.

a) En faisant apparaitre un triangle isocèle, démontrer que :
   (i) $DC = AB - AD$
   (ii) $MN = AB - 2$

b) Montrer alors que résoudre le problème revient à chercher des longueurs entières AB et AD vérifiant :
$$(AB - 4)^2 - (AD - AB)^2 = 8$$

c) En utilisant la partie A, et en considérant le signe de $AD - AB$, déterminer les valeurs de AB, AD et CD qui répondent au problème.

EXERCICE 3 : LES TROIS REMISES *(1 Technologique)*

Un commerçant effectue trois remises successives sur un article. Celui-ci coûtait 400 € et est vendu finalement 297,16 € après les trois remises.

Quels sont les pourcentages des trois remises appliquées sachant qu'il s'agit de valeurs entières ?

www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

BESANÇON 2020

Exercice 1 : Empilement de cubes

Dans cet exercice, nous allons voir deux suites remarquables, les sommes des inverses des premiers entiers strictement positifs et les sommes des inverses des premiers carrés d'entiers strictement positifs. Ces suites ont, d'un point de vue limite à l'infini, des comportements radicalement différents.

1.a. Pour $n = 3$, l'algorithme affiche une valeur approchée de $\frac{49}{6}$, c'est-à-dire de $6 \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)$ et une valeur approchée de $\frac{11}{6}$, c'est-à-dire de $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

1.b. On va faire une conjecture et fournir une preuve :

Conjecture : si l'artiste peint 50000 cubes, il lui reste encore de la peinture pour plus de 2 m^2, **on peut conjecturer que l'artiste peut peindre autant de cubes qu'il veut**.

Preuve : La copie d'écran de l'énoncé prouve qu'on ne peut pas empiler 50000 cubes. La copie d'écran ci-contre prouve, quant à elle, qu'on peut empiler 1500 cubes mais non pas 2000. Ces résultats déterminent sans ambigüité que, dans une salle de 8 mètres de hauteur, **l'artiste ne peut pas empiler autant de cubes qu'il veut.**

```
>>> def cube(n):
        a=6
        b=1
        for i in range(2,n+1):
            a=a+6/(i*i)
            b=b+1/i
        return[n,a,b]

>>> cube(3)
[3, 8.166666666666666, 1.8333333333333333]
>>> cube(2000)
[2000, 9.866605150964382, 8.178368103610284]
>>> cube(1500)
[1500, 9.865605734126412, 7.8907693482881305]
```

2.a. Quel que soit l'entier k tel que $k \geq 2$, considérons la différence $\frac{1}{k\times(k-1)} - \frac{1}{k^2}$ des deux nombres à comparer : $\frac{1}{k\times(k-1)} - \frac{1}{k^2} = \frac{k}{k^2\times(k-1)} - \frac{k-1}{k^2\times(k-1)} = \frac{1}{k^2\times(k-1)}$

Cette différence est toujours strictement positive, ce qui démontre que :

Quel que soit l'entier *k* tel que $k \geq 2$ **:** $\frac{1}{k\times(k-1)} > \frac{1}{k^2}$

On a démontré la stricte positivité, *a fortiori* on en déduit la positivité au sens large $\frac{1}{k\times(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$ que l'énoncé demande.

D'autre part quel que soit l'entier k tel que $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k}{k\times(k-1)} - \frac{k-1}{k\times(k-1)} = \frac{1}{k\times(k-1)}$$

2.b. D'après les résultats de la question **2.a**, quel que soit l'entier $k \geq 2$: $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k^2}$

Soit un entier $n \geq 2$. Ecrivons les inégalités du **2.a.** à tous les rangs, depuis le rang 2 jusqu'au rang n :

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \geq \frac{1}{3^2} \\ .... \\ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

puis ajoutons membre à membre ces inégalités de même sens :

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

Le premier membre est une « somme télescopique » dans laquelle les termes intermédiaires s'annulent deux à deux, il ne subsiste que le premier et le dernier : $\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$

En effet : $\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{n}$

Ainsi, quel que soit l'entier $n \geq 2$ **:** $1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$ **.**

La somme des inverses des carrés $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}$ étant majorée par $1-\frac{1}{n}$, elle est *a fortiori* majorée par 1 :

$$\textbf{Pour tout entier } n \geq 2 \textbf{ : } \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \leq 1$$

2.c. La surface à peindre pour n cubes est : $s_n = 6+6\times\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)$

On déduit du **2.b**, en raison de la majoration $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2} \leq 1$, que $s_n \leq 12$, quel que soit le nombre n de cubes :

Avec une quantité de laque permettant de peindre 12 m^2, l'artiste peut peindre autant de cubes qu'il veut.

En conclusion de cette question : la suite (s_n)*, étant croissante et majorée par* 12*, est une suite convergente.*

3.a. $h_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$

La hauteur de la pile est égale à la somme des inverses des n premiers entiers strictement positifs.

3.b. Les entiers 3, 4, 5, 6, 7, 8 étant rangés par ordre croissant :

L'inégalité $3<4$ implique l'inégalité : $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$, donc : $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ et les inégalités $5<6<7<8$ impliquent que chacun des inverses : $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$ est supérieur ou égal au dernier cité, soit $\frac{1}{8}$.

Donc : $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

3.c. Plus généralement, soit k un entier strictement positif. Considérons les 2^k entiers qui succèdent à l'entier 2^k : il s'agit des entiers 2^k+1 ; 2^k+2 ;.... ;$2^k+\left(2^k-1\right)=2^{k+1}-1$; $2^k+2^k=2^{k+1}$, rangés par ordre croissant.

Leurs inverses $\frac{1}{2^k+1}$; $\frac{1}{2^k+2}$;.... ; $\frac{1}{2^{k+1}}$ sont rangés par ordre décroissant, ce qui fait que chacun d'entre eux est supérieur ou égal au dernier inverse cité, soit $\frac{1}{2^{k+1}}$

La somme de ces inverses $\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+....+\frac{1}{2^{k+1}}$ est donc supérieure ou égale à la somme $\underbrace{\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}+....+\frac{1}{2^{k+1}}}_{(2^k \ fois)}$, qui vaut : $\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$.

3.d. L'entier naturel k étant donné, considérons la somme : $h_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{k+1}}$ que l'on obtient lorsque $n = 2^{k+1}$. Groupons les termes de cette somme par paquets, à partir du troisième terme, chaque paquet contenant deux fois plus de termes que son précédent : $h_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^k + 1} + ... \frac{1}{2^{k+1}}\right)$.

Ce qui s'écrit : $h_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^1 + 1} + \frac{1}{2^1 + 2^1}\right) + \left(\frac{1}{2^2 + 1} + ... + \frac{1}{2^2 + 2^2}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^k + 1} + ... \frac{1}{2^k + 2^k}\right)$

On a formé ainsi k paquets (le même nombre de paquets que l'exposant de 2^k) et d'après la question **3.c** chacun de ces paquets a une valeur supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$: $h_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{1}{2} + k \times \frac{1}{2} = \frac{k+3}{2}$

En conclusion : $h_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{k+3}{2}$

3.e. Pour être sûr que $h_n > 8$, il suffit de choisir $n = 2^{k+1}$ avec $\frac{k+3}{2} > 8$, c'est-à-dire $k > 13$. On peut choisir : $k = 14$ et en conséquence : $n = 2^{15} = 32768$. **On est sûr que** $h_n > 8$ **en choisissant** $n \geq 32768$

NB : Conformément à l'énoncé, nous avons écrit des inégalités larges de la question **3.b** à la question **3.d** alors que, au même prix, nous pouvions écrire des inégalités strictes. Curieusement, l'énoncé introduit une inégalité stricte dans cette question **3.e**, ce qui nous oblige, puisque nous avons raté toutes les occasions d'écrire des inégalités strictes, à choisir $k = 14$ plutôt que $k = 13$ pour « être sûr » incontestablement.

Cependant, en remarquant par exemple que,: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$, nous pouvons introduire une inégalité stricte dans la majoration de la question **3.d** : $h_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + (k-1) \times \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (k-1) \times \frac{1}{2} = \frac{k+3}{2}$. Une seule suffit, l'inégalité stricte est désormais justifiée. Moyennant cette précaution, nous pouvons proposer $k = 13$ à la place de $k = 14$ et en conséquence $n \geq 2^{14} = 16384$ à la place de $n \geq 32768$.

D'autre part, le programme Python de la question **1.b** a montré que la condition $n \geq 2000$ suffisait.

3.f. Soit A la hauteur sous plafond, aussi grande qu'on veut. Il existe toujours un entier k tel que : $\frac{k+3}{2} > A$, par exemple le premier entier k_A qui est strictement supérieur à $2A - 3$.

Pour tout entier n tel que $n \geq 2^{k_A + 1}$, $h_n > A$.

L'artiste ne peut pas trouver de musée, aussi haut de plafond soit-il, qui lui permette d'empiler autant de cubes qu'il veut.

En conclusion de cette question : la suite (h_n) *est une suite divergente. Elle diverge vers plus l'infini.*

Exercice 2 : Partage de trapèzes

Partie A

On cherche deux entiers naturels m et n tels que : $m^2 - n^2 = 8$.

Compte tenu de l'identité $m^2 - n^2 = (m-n)\times(m+n)$, cette équation s'écrit : $(m-n)\times(m+n) = 8$.

Les nombres m et n étant des entiers naturels, l'entier $m+n$ est positif, et les entiers $m-n$ et $m+n$ sont deux diviseurs positifs de 8, le plus petit des deux étant $m-n$.

Or, l'entier 8 admet deux décompositions en produit de deux facteurs entiers : $8 = 1\times 8 = 2\times 4$

Ce qui conduit à l'alternative suivante :

Ou bien $\begin{cases} m-n=1 \\ m+n=8 \end{cases}$, éventualité qui aboutit à une impasse (solutions non entières) ou bien $\begin{cases} m-n=2 \\ m+n=4 \end{cases}$, éventualité qui conduit à : $m=3$; $n=1$.

L'équation $m^2 - n^2 = 8$ admet un seul couple solution en nombres entiers naturels : $m=3$; $n=1$

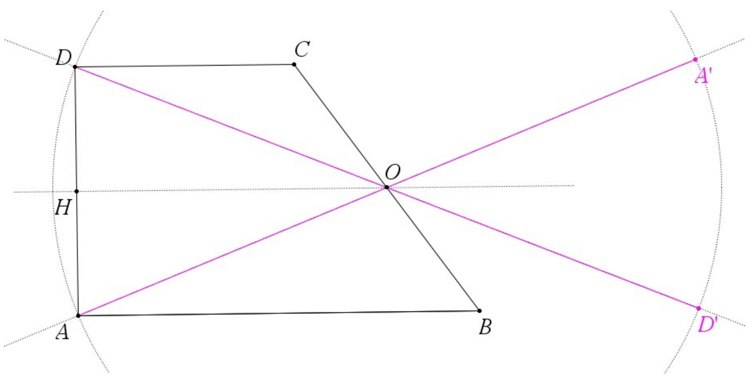
Partie B

b. Le point O étant le milieu du segment $[BC]$, la droite passant par O et parallèle aux bases du trapèze $ABCD$ passe aussi par le milieu H du côté $[AD]$.

Le trapèze étant rectangle en A, cette droite est perpendiculaire à $[AD]$: il s'agit de la médiatrice de $[AD]$.

a. *La figure demandée* :

Pour construire les points A' et D', on trace le cercle de centre O et passant par A : ce cercle passe aussi par D car O, situé sur la médiatrice de $[AD]$, est équidistant de A et de D. Les points A' et D'sont les points d'intersection, autres que A et D, de ce cercle et des droites (AO) et (DO).



c. Le quadrilatère *AD'A'D* est au moins un parallélogramme car *O* est le milieu commun de ses deux diagonales [*AA'*] et [*DD'*]. De plus : $AA' = DD'$ car [*AA'*] et [*DD'*] sont deux diamètres d'un même cercle. Le quadrilatère *AD'A'D* est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur : **c'est un rectangle**.

Il s'ensuit que *D, C, A'* d'une part et *A, B, D'* d'autre part sont des points alignés sur deux perpendiculaires à (*AD*), l'une en *D* et l'autre en *A*.

d. La symétrie centrale de centre O transforme [*AB*] en [*CA'*]et [*CD*] en [*BD'*] :
En tant qu'isométrie, elle conserve les longueurs : $CA' = AB$; $BD' = CD$.
On en déduit que $DA' = DC + CA' = DC + AB$. Le côté [*DA'*] du rectangle *AD'A'D* a pour longueur la somme des longueurs des bases du trapèze *ABCD*. Son aire est égale à : $AD \times (AB + CD)$.

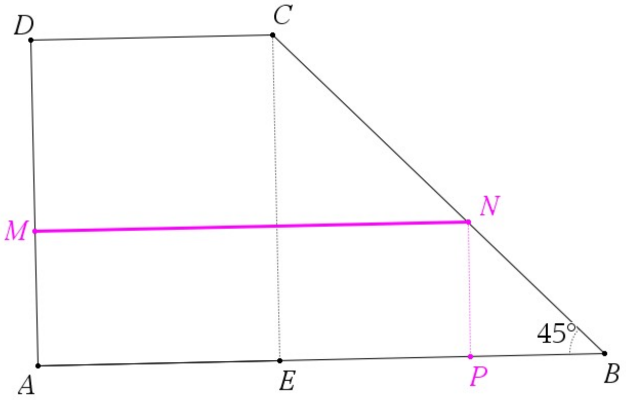
Les quadrilatères *ABCD* et *A'CBD'* sont deux trapèzes isométriques qui forment une partition du rectangle *AD'A'D* : l'aire de chacun d'eux est égale à la moitié de l'aire du rectangle.

Ce qui explique que : $aire\,(ABCD) = \dfrac{1}{2} \times AD \times (AB + CD)$

Partie C

a. Soit *E* et *P* les projetés orthogonaux de *C* et de *N* sur (*AB*). On remarque d'emblée que les quadrilatères *AECD* et *APNM* ont trois angles droits, ce sont des rectangles. En conséquence : $CE = AD$; $AE = CD$ et $NP = AM = 2$; $AP = MN$.

Les triangles *BEC* et *BPN* sont deux triangles rectangles, en *E* et en *P* respectivement. Leurs angles de base sont complémentaires, la somme de leurs mesures est égale à 90°. Or, leur angle de sommet *B* mesure 45° : il en résulte que leur autre angle de base mesure lui aussi 45°, ces triangles sont des triangles rectangles isocèles.
On en déduit : $EC = EB$ et $PN = PB$



(i) : D'une part : $EB = CE = AD$ et donc : $CD = AE = AB - EB = AB - AD$
(ii) : D'autre part : $MN = AP = AB - PB = AB - 2$

b. D'après les résultats de la **partie B**, le trapèze *ABCD* a pour aire : $\frac{1}{2}\times AD\times(AB+CD)$ et le trapèze *ABMN* a pour aire : $\frac{1}{2}\times AM\times(AB+MN)$.

D'après les résultats de la **question a** :

- $CD = AB - AD$ donc l'aire de *ABCD* peut s'exprimer uniquement en fonction de *AB* et *AD* : $\frac{1}{2}\times AD\times(AB+(AB-AD))=\frac{1}{2}\times AD\times(2AB-AD)$
- $MN = AB-2$ donc l'aire de *ABMN*, sachant de plus que $AM=2$, peut s'exprimer uniquement en fonction de *AB* : $\frac{1}{2}\times AM\times(AB+MN)=\frac{1}{2}\times 2\times(AB+(AB-2))=2AB-2$

Résoudre le problème revient à déterminer *AB* et *AD* de façon que l'aire de *ABMN* soit égale à la moitié de l'aire de *ABCD*, c'est-à-dire de façon que : $2AB-2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\times AD\times(2AB-AD)\right)$, soit :

$$AD^2-2AB\times AD+8AB-8=0. \qquad \textbf{(R)}$$

On reconnaît dans le premier membre de **(R)** deux des termes du développement de $(AD-AB)^2$:

$AD^2-2AB\times AD=(AD-AB)^2-AB^2$

La relation **(R)** s'écrit : $(AD-AB)^2-AB^2+8AB-8=0$

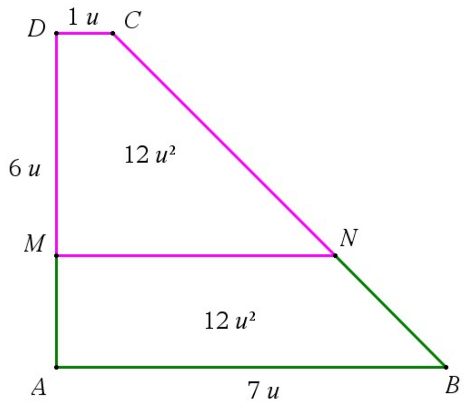
Or, AB^2-8AB sont deux des termes du développement de $(AB-4)^2$: $(AB-4)^2=AB^2-8AB+16$.

La relation **(R)** s'écrit : $(AD-AB)^2-(AB-4)^2+16-8=0$

On rejoint ainsi la formulation de l'énoncé :

Résoudre le problème revient à chercher *AB* et *AD* de telle sorte que : $(AB-4)^2-(AB-AD)^2=8$

*NB : D'après la question **a.i** : $AB-AD=CD>0$, le côté [AB] est plus grand que le côté [AD].*



c. En vertu des résultats de la **partie A** : $\begin{cases} AB-4=3 \\ AB-AD=1 \end{cases}$.

Nous obtenons finalement :

$AB=7$; $AD=6$ et $CD=1$

Exercice 3 : Les trois remises

Désignons par t_1 , t_2 et t_3 les pourcentages des trois remises.

- Après la première remise, l'article, dont le prix initial en euros était 400, est vendu : $400\times\left(1-\dfrac{t_1}{100}\right)$.
- Après la deuxième, l'article, dont le prix était $400\times\left(1-\dfrac{t_1}{100}\right)$ est vendu : $400\times\left(1-\dfrac{t_1}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{t_2}{100}\right)$.
- Après la troisième remise, l'article, dont le prix était $400\times\left(1-\dfrac{t_1}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{t_2}{100}\right)$ est vendu :

$$400\times\left(1-\frac{t_1}{100}\right)\times\left(1-\frac{t_2}{100}\right)\times\left(1-\frac{t_3}{100}\right).$$

D'après l'énoncé, le prix final de vente en euros après les trois remises est 297,16.

Les trois pourcentages doivent vérifier la relation : $400\times\left(1-\dfrac{t_1}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{t_2}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{t_3}{100}\right)=297{,}16$, c'est-à-dire la relation : $\left(1-\dfrac{t_1}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{t_2}{100}\right)\times\left(1-\dfrac{t_3}{100}\right)=\dfrac{297{,}16}{400}=0{,}7429$

Cette relation s'écrit aussi bien : $(100-t_1)\times(100-t_2)\times(100-t_3)=742900$

Remarquons au passage que, puisque le taux de remise global est $1-0{,}7429=0{,}2571$ soit 25,71 %, aucun des pourcentages ne peut, en aucun cas, dépasser 25,71.

Nous sommes amenés à chercher trois entiers compris entre 1 et 25 vérifiant :

$$(100-t_1)\times(100-t_2)\times(100-t_3)=742900$$

Nous proposons deux méthodes pour déterminer ces entiers :

Méthode arithmétique :

Les trois nombres $100-t_1$; $100-t_2$; $100-t_3$ sont tous des nombres entiers compris entre 75 et 99. Nous devons chercher trois diviseurs du nombre 742900 compris entre 75 et 99 et dont le produit est égal à 742900.

Or la factorisation de 742900 en produit de facteurs premiers est : $742900=2^2\times5^2\times17\times19\times23$.

Parmi les trois nombres $100-t_1$; $100-t_2$; $100-t_3$, nécessairement l'un est multiple de 17, un autre est multiple de 19 et le troisième est multiple de 23.

Compte tenu de la contrainte « compris entre 75 et 99 », celui qui est multiple de 23 est aussi multiple de 2^2 et ceux qui sont multiples de 17 et 19 sont aussi, l'un et l'autre, multiples de 5.

Nous obtenons : $\begin{cases} 100 - t_1 = 4 \times 23 = 92 \\ 100 - t_2 = 5 \times 19 = 95 \\ 100 - t_3 = 5 \times 17 = 85 \end{cases}$ ce qui donne : $t_1 = 8$; $t_2 = 5$; $t_3 = 15$

Les pourcentages de remise sont 8 % , 5 % et 15 % (dans l'ordre que l'on veut)

Méthode exhaustive à l'aide de Python :

Dans la mesure où l'on a pu localiser les solutions, s'il y en a, dans l'ensemble $\{1 ; 2 ;... ; 25\}^3$, il est possible de balayer la totalité de cet ensemble fini et d'en extraire, à l'aide d'un test adéquat, les triplets (a, b, c), vérifiant $1 \leq a \leq b \leq c \leq 25$, qui sont solutions de l'équation $(100 - a) \times (100 - b) \times (100 - c) = 742900$. Aucune solution ne peut nous échapper :

<table>
<tr>
<td>On cherche systématiquement à l'aide de l'algorithme « remise » quels sont les triplets $a \leq b \leq c$ d'entiers compris entre 1 et 25 qui vérifient la condition que nous avons trouvée. Quand l'algorithme trouve une solution, il l'affiche.
Son exécution provoque un unique affichage.</td>
<td>

```
>>> def remise():
        for a in range(1,26):
                for b in range(a,26):
                        for c in range(b,26):
                                if (100-a)*(100-b)*(100-c)==742900:
                                        print([a,b,c])


>>> remise()
[5, 8, 15]
```

</td>
</tr>
</table>

La recherche exhaustive aboutit à la même conclusion : les entiers solutions sont 5, 8 et 15 et ce sont les seuls.