SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE BESANÇON

Classes de première S • 2016

Olympiades académiques de mathématiques

Exercices proposés par l'académie de Besançon

Mercredi 16 mars 2016

Toutes séries

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Ce sujet comporte deux exercices, tous à traiter dans le temps imparti.

La durée de composition est de 2 heures.

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins d'une heure après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout d'une heure ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Les candidats indiqueront, dans l'en-tête de leur copie, leur filière et l'établissement dans lequel ils sont inscrits.

Exercice numéro 1

(proposé par le jury académique)

Au feu rouge

En moyenne, nous passons 6 mois de notre vie assis devant un feu rouge ! Certains designers ont imaginé des feux tricolores qui comprennent un chronomètre afin d'informer les automobilistes du temps d'attente restant avant le feu vert. Cette invention ne change pas le temps perdu au feu mais permet d'anticiper le passage du feu vert au feu rouge.

On considère un feu de signalisation qui clignote pendant 2 minutes (les voitures passent) puis passe au rouge pendant 1,5 minutes (les voitures s'arrêtent et sont en attente).

1. Une voiture arrive à un instant t.

a) Expliquer pourquoi t peut être assimilé au tirage d'un réel aléatoire de l'intervalle [0 ; 3,5].

b) Quelle est la probabilité que la voiture arrive au feu alors qu'il est rouge ?

c) Quelle est la probabilité que le temps d'attente au feu soit nul ?

d) Déterminer la probabilité que le temps d'attente au feu soit supérieur à 1 minute.

e) Déterminer la probabilité que le temps d'attente au feu soit inférieur à x minutes où x est un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 1,5]

f) Un automobiliste patiente depuis 50 secondes au feu rouge. Quelle est la probabilité que son temps d'attente total soit inférieur à une minute ?

2. L'algorithme ci-dessous permet de simuler l'arrivée d'une voiture au feu et d'afficher le temps d'attente.

Variables : t et a sont des nombres réels

Traitement : t prend une valeur aléatoire entre 0 et 3,5

Si $t \leq 2$ alors

a prend la valeur 0

Afficher « le temps d'attente est nul »

Sinon

a prend la valeur $3{,}5 - t$

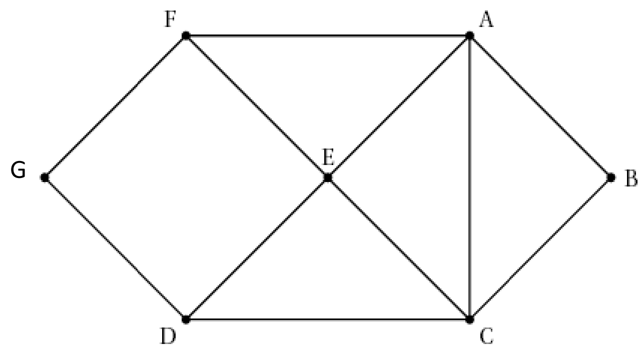
Sortie : Afficher « Le temps d'attente est de »

Afficher a

Afficher « minutes. »

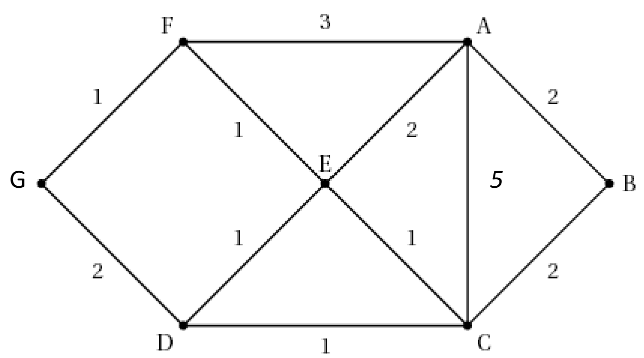
Modifier l'algorithme pour qu'il donne le temps d'attente moyen au feu, que l'on pourra estimer à partir de 1000 véhicules.

3. Le schéma ci-dessous représente le plan d'une ville. Les segments matérialisent les principales avenues et les feux à l'intersection de ces avenues sont désignés par les points A, B, C, D, E, F et G.



a) Un piéton souhaite se promener dans la ville en parcourant toutes les avenues une et une seule fois.
Est-ce possible ? Si oui, donner un trajet possible en mentionnant la liste des feux rencontrés, dans l'ordre.

b) Un automobiliste est au feu F. Déterminer le nombre de chemins lui permettant d'aller de F à D sans emprunter deux fois le même feu.
On a indiqué sur le schéma ci-dessous la longueur des avenues en kilomètres.



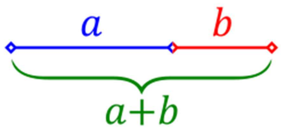
Parmi les chemins de la question précédente, quel est le plus long ?

Exercice numéro 2

(proposé par le jury académique)

Le nombre d'or

Présentation :



Le nombre d'or est une proportion, définie initialement en géométrie comme l'unique rapport entre deux longueurs *a* et *b* telles que le quotient de la somme des deux longueurs *a* + *b* par la plus grande *a* soit égal à celui de la plus grande *a* par la plus petite *b,* c'est-à-dire **l'unique rapport entre deux longueurs a et b tel que**

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}.$$

Le découpage d'un segment en deux longueurs vérifiant cette propriété est appelée par Euclide découpage en « extrême et moyenne raison ». Le nombre d'or $\frac{a}{b}$ est maintenant souvent désigné par la lettre Φ (phi) en l'honneur du sculpteur Phidias qui l'aurait utilisé pour concevoir le Parthénon.

Partie A - Généralités sur le nombre d'or

Soient *a* et *b* deux nombres tels que : $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$.

1. On pose $\Phi = \frac{a}{b}$.

a) Montrer que Φ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

b) Justifier que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donner une valeur approchée de Φ à 10^{-5} près.

2. a) Montrer que $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$.

b) En déduire que

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}} \quad \text{et} \quad \Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}}$$

3. On considère la suite de fractions suivantes :

$$F_0 = 1\,;\; F_1 = 1 + \frac{1}{1}\,;\; F_2 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}}\,;\; F_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}\,;\; \ldots$$

a) Ecrire les fractions F_4 et F_5 et les simplifier.

b) Soit n un entier naturel. Ecrire un algorithme permettant de calculer F_n.

c) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-9} de F_{20}.

d) Que peut-on conjecturer sur les nombres F_n lorsque n devient grand ?

Partie B - Nombre de pavages par des dominos et nombre d'or

On considère un quadrillage $n \times 2$ dont la longueur comporte n carreaux et la hauteur 2 carreaux. On s'intéresse au nombre K(n) de manières différentes de paver complétement ce quadrillage par des dominos constitués de deux carreaux ayant un côté commun.
Les dominos recouvrent deux cases du quadrillage ayant un côté commun.

Grille $n \times 2$ à paver par des dominos

Exemple de pavage par les dominos

On pose K(0) = 1 car il existe une seule manière de ne mettre aucun domino dans un quadrillage 0×2.

1. **a)** Justifier que K(1) = 1 et K(2) = 2.

b) Déterminer K(3).

c) Justifier que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, K(n + 1) = K(n) + K(n - 1).

2. **a)** Soit r un nombre réel non nul.
Montrer que le nombre r vérifie la relation $r^{n+1} = r^n + r^{n-1}$ pour tout entier naturel n si, et seulement si $r = \Phi$ ou $r = 1 - \Phi$.

b) Soient α et β deux nombres réels.
Montrer que les nombres de la forme $u_n = \alpha\Phi^n + \beta(1-\Phi)^n$ vérifient, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que les nombres de la forme $u_n = \alpha\Phi^n + \beta(1-\Phi)^n$ sont les seuls vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, la relation $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

c) Déterminer α et β tels que $u_0 = u_1 = 1$.

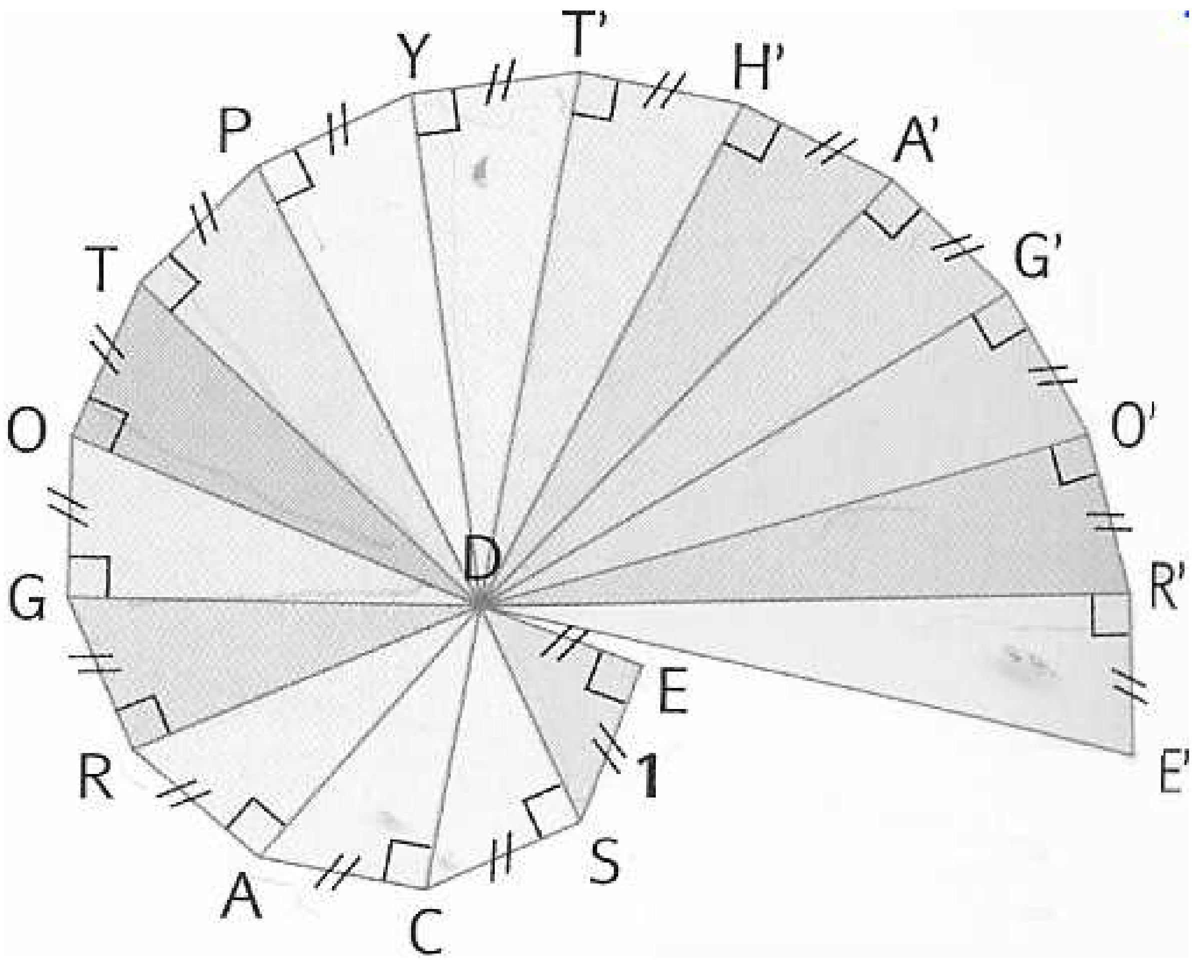
d) En déduire une expression de K(2016). (On pourra donner une expression de K(2016) en fonction de Φ.)

Partie C - Construction géométrique du nombre d'or

Un segment de longueur *a* est dessiné en **annexe (*à rendre avec la copie*)**.

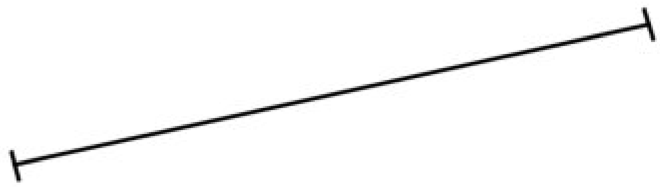
On souhaite tracer un segment de longueur *b* tel que $\frac{a}{b} = \Phi$.

On dispose pour cela d'une équerre et d'une règle **non graduées**, d'un compas, et de l'escargot de Pythagore ci-dessous.
Construire, sur l'**annexe**, un segment de longueur *b* en expliquant clairement la démarche.



Nom – Prénom – Classe – Etablissement

Annexe
(à rendre avec la copie)



« Au feu rouge » - Eléments de correction

1) a) Dans un laps de temps de 3 min et 30 s, le feu tricolore aura fait un cycle complet : 1,5 minute au rouge et 2 minutes au vert.

Le fonctionnement du tricolore est périodique de période 3,5 min donc l'arrivée d'une voiture à un instant *t* au feu peut être assimilé à un tirage d'un nombre réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 3,5].

b) Sur un intervalle de temps [0 ; 3,5], il y a 1,5 minutes pour lesquelles le feu est au rouge donc P = $\frac{1,5}{3,5} = \frac{3}{7}$

c) Pour que la probabilité que le temps d'attente au feu soit nul, il faut que le feu soit au vert lorsque l'automobiliste arrive donc P = $\frac{2}{3,5} = \frac{4}{7}$ ou P = 1 - $\frac{3}{7}$

d) Pour que la probabilité que le temps d'attente au feu soit supérieur à 1 minute, il faut que le feu soit au rouge depuis moins de 30 s lorsque l'automobiliste arrive, donc P = $\frac{0,5}{3,5} = \frac{1}{7}$

e) Pour que la probabilité que le temps d'attente au feu soit inférieur à *x* minutes, il faut qu'il reste au maximum *x* minutes de temps d'attente au rouge lorsque l'automobiliste arrive ou que le feu soit au vert, donc P = $\frac{x+2}{3,5}$

f) L'automobiliste attend moins d'une minute si le feu passe au vert dans les 10 secondes qui suivent parmi les 40 secondes où le feu va encore être au rouge donc $P = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0,25$

2)

Variables : *t* , *S* et *a* sont des nombres réels

Traitement : *S* = 0

Pour *k* variant de 1 à 1000
t prend une valeur aléatoire entre 0 et 3,5
Si $t \leq 2$ alors
a prend la valeur 0
Sinon
a prend la valeur 3,5 – *t*
S prend la valeur *S* + a

Sortie : Afficher « Le temps d'attente moyen est de »
Afficher *S*/1000
Afficher « minutes. »

3) a) Oui : FABCAEDCEFGD par exemple

b) 11 chemins différents :

FGD FED FECD FEACD FEABCD FAED FAECD FACD FACED FABCD FABCED

c) FACED : 10 km.

« Le nombre d'or » - Eléments de correction

Partie A :

1. a) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a+b}{b}$

   Mais on sait que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ ce qui équivaut à $a + b = \frac{a^2}{b}$

   Donc $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a+b}{b} = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = 0$

   φ est bien solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

   b) On résout l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

   $$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5$$

   L'équation a deux solutions réelles distinctes :

   $$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

   $\varphi > 0$ donc $\varphi = x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803$.

2. a) $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi^2 = \varphi + 1 \Leftrightarrow \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$

   b) $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\varphi}}}$ en remplaçant à chaque fois φ par $1 + \frac{1}{\varphi}$.

3. a) $F_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}$ et $F_5 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}} = 1 + \frac{1}{F_4} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$.

   b)

   Variables :
   n entier naturel
   k entier naturel
   F nombre réel

   Initialisation :
   Affecter à F la valeur 1

   Traitement :
   Lire n
   Pour k allant de 1 à n
   F prend la valeur $1 + \frac{1}{F}$
   Fin Pour

   Sortie :
   Afficher F

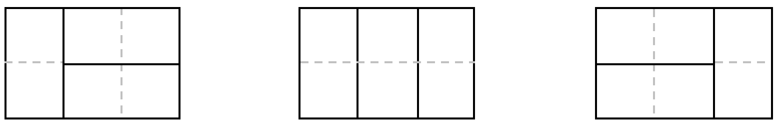
   c) D'après la calculatrice on a $F_{20} \approx 1{,}618033985$

   d) On a également $F_{100} \approx 1{,}618034$; $F_{500} \approx 1{,}618034$ et $\varphi \approx 1{,}618034$ donc on peut conjecturer que les nombres F_n tendent vers φ.

Partie B :

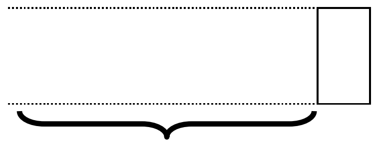
1. a) $K(1) = 1$ car on a une seule façon de paver un quadrillage 1×2 : mettre un domino verticalement
$K(2) = 2$ car on a deux façons de paver un quadrillage 2×2 :
   - soit on dispose deux dominos verticalement
   - soit on dispose deux dominos horizontalement

   b) Les seules façons de paver un quadrillage 3×2 sont :

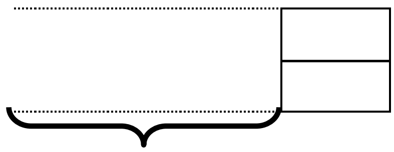


   Donc $K(3) = 3$

   c) Pour paver un quadrillage $(n + 1) \times 2$:



   - soit on finit par un domino vertical et dans ce cas,
   il reste un quadrillage $n \times 2$ à paver :
   on a donc $K(n)$ pavages de ce type



   - soit on finit par deux dominos horizontaux et dans ce cas,
   il reste un quadrillage $(n - 1) \times 2$ à paver :
   on a donc $K(n - 1)$ pavages de ce type

   On a donc $K(n + 1) = K(n) + K(n - 1)$

2. a) Supposons que pour tout entier naturel $n, r^{n+1} = r^n + r^{n-1}$
   Alors on a $r^2 = r + 1$.
   Réciproquement si $r^2 = r + 1$ alors par multiplication, on obtient, pour tout entier naturel, $r^{n+1} = r^n + r^{n-1}$.

Ainsi r^n vérifie la relation $r^{n+1} = r^n + r^{n-1}$ pour tout entier naturel n si et seulement si $r^2 = r + 1$ et d'après la partie A, on obtient $r = \varphi$ ou $r = 1 - \varphi$

   b) Soit $u_n = \alpha\varphi^n + \beta(1 - \varphi)^n$.
Alors pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_n + u_{n-1} &= \alpha\varphi^n + \beta(1-\varphi)^n + \alpha\varphi^{n-1} + \beta(1-\varphi)^{n-1} \\ &= \alpha(\varphi^n + \varphi^{n-1}) + \beta((1-\varphi)^n + (1-\varphi)^{n-1}) \\ &= \alpha\varphi^{n+1} + \beta(1-\varphi)^{n+1} \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

   c) $u_n = \alpha\varphi^n + \beta(1 - \varphi)^n$
   $u_0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = \alpha\varphi + \beta(1 - \varphi)$
   Par résolution du système $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\varphi + \beta(1 - \varphi) \end{cases}$, on obtient $\alpha = \frac{\varphi}{2\varphi - 1}$ et $\beta = \frac{\varphi - 1}{2\varphi - 1}$

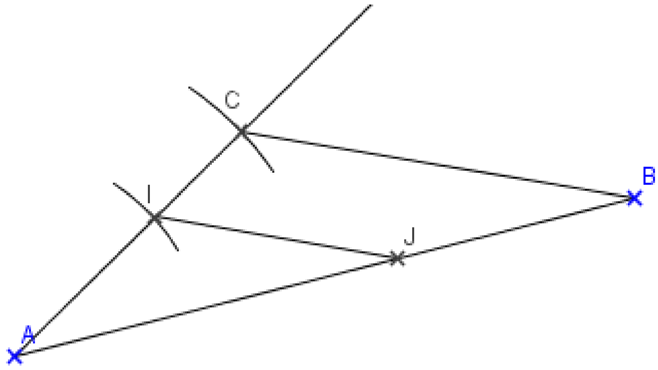
   d) Pour tout entier naturel n, $K(n + 1) = K(n) + K(n - 1)$ et on a que $K(0) = 1$; $K(1) = 1$.
   D'après ce qui précède, on a pour tout n,

$$K(n) = \frac{\varphi}{2\varphi - 1}\varphi^n + \frac{\varphi - 1}{2\varphi - 1}(1 - \varphi)^n = \frac{\varphi^{n+1}}{2\varphi - 1} - \frac{(1 - \varphi)^{n+1}}{2\varphi - 1}$$

   et on a donc

$$K(2016) = \frac{\varphi^{2017}}{2\varphi - 1} - \frac{(1 - \varphi)^{2017}}{2\varphi - 1}$$

Partie C :



On trace une demi-droite d'origine A.
On place les points I et C sur cette demi-droite tels que $AI = 2$; $AC = 1 + \sqrt{5}$ (notons que le segment [DR] de l'escargot de Pythagore a une longueur de $\sqrt{5}$).

Ensuite on trace [BC] puis la droite parallèle à [BC] passant par I : celle-ci coupe [AB] en J et d'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{AB}{AJ} = \frac{AC}{AI} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$