SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE BESANÇON

Classes de première S • 2014

Olympiades de mathématiques

Académie de Besançon

19 mars 2014

Série S

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet comprend sept pages. Il est composé de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre que vous aurez choisi.

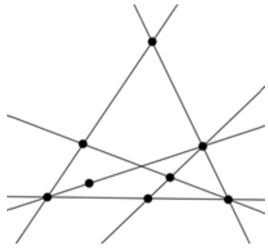
Deux de ces exercices sont des sujets nationaux, les deux autres sont des sujets académiques.

Recommandations :
Il est important que vous argumentiez vos affirmations. De plus, même si vous n'aboutissez pas à la solution complète d'une question, vous êtes invité à décrire vos initiatives, votre recherche et votre démarche, un résultat même partiel pouvant avoir son intérêt.

Corrigés :
Vous pourrez consulter les corrigés de ces exercices prochainement en vous connectant à l'adresse *http ://catice.ac-besancon.fr/Mathematiques*

Exercice 1 *(national)* **Figures équilibrées**

La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.
Une figure vérifiant cette propriété est dite **équilibrée**.

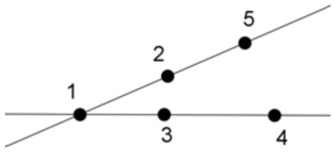


1. Construire une figure équilibrée constituée :

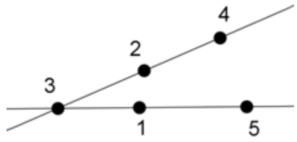
- **a)** de 7 points marqués et 5 droites ;
- **b)** de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.
Cette numérotation est alors dite **magique** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé **constante magique** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



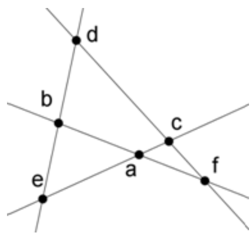
$K = 8$



$K = 9$

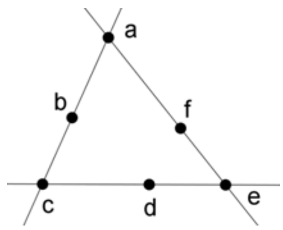
Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.



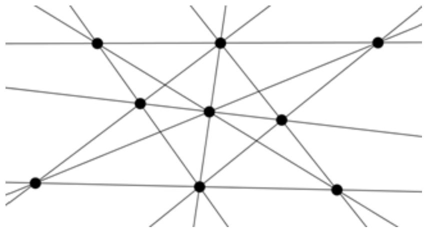
- **a)** Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
- **b)** Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ? Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.



- **a)** Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.
- **b)** Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.
- **c)** Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.

5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.



Cette figure admet-elle une numérotation magique ?

EXERCICE 2 *(national)* **Le plus court possible**

Quatre villes - Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon - sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.
La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A
« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.
« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.
« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

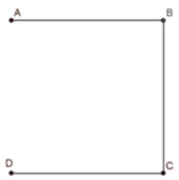


fig. 1
Assistant n°1

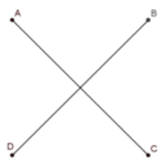


fig. 2
Assistant n°2

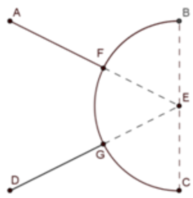


fig. 3
Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?
2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :

   « On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la *fig. 4*), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre ».

   Si $EF = 20$ km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

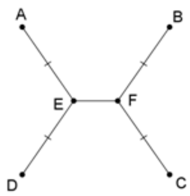


fig. 4

Partie B
Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.
Rappels de géométrie :
Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :
- *on a toujours $AB + BC \geqslant AC$;*
- *on a l'égalité $AB + BC = AC$ si, et seulement si, B appartient au segment $[AC]$.*

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment $[AB]$ (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.

   On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100 km de coté, comme dans le dessin ci-contre.

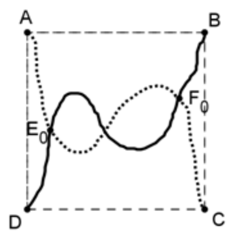


fig. 5

   On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).
Montrer qu'alors la longueur du réseau de la figure 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*) :

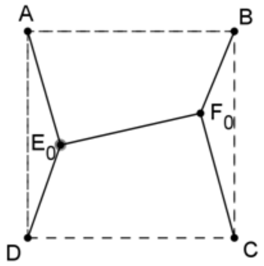


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

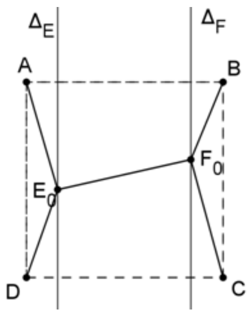


fig. 7

a) Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances $DE + EA$ soit minimale. On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b) Montrer que $EF \leqslant E_0F_0$.

c) Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment $[AD]$ (*fig. 8*) :

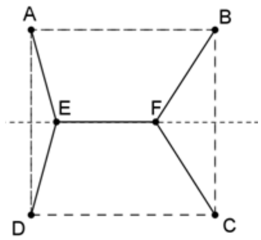


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de $[AB]$.

a) Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de $[AB]$.

b) D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).
Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

c) Quelle est alors la valeur de l'angle $\widehat{DEA}$?

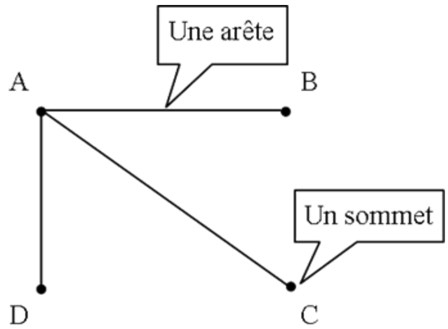
Exercice 3 *(académique)* **Organisation d'un tremplin musical**

La région Franche-Comté envisage l'organisation d'un tremplin musical pour des groupes de rock. Le principe consiste à faire concourir deux groupes face à face lors d'une soirée concert, un « battle » musical. Les présélections se font sur dossier.

Partie A : Étude de quelques exemples

1. On suppose dans cette question que quatre groupes, notés A, B, C et D sont présélectionnés. On suppose aussi que chaque groupe rencontre les trois autres.
On représente la situation à l'aide d'un **graphe**. Un graphe est composé de **sommets** et d'**arêtes** reliant ces sommets. Les sommets représentent ici les groupes et une arête matérialise le fait qu'une rencontre aura lieu entre les deux groupes qu'elle relie.

a) Compléter le graphe ci-dessous.



b) Quel est le nombre total d'arêtes de ce graphe ? Combien y aura-t-il de rencontres ?

2. On suppose cette fois que cinq groupes ont été présélectionnés : A, B, C, D et E. On suppose toujours que chaque groupe rencontre tous les autres.
Représenter cette situation par un graphe et déterminer le nombre de rencontres qui auront lieu.

3. Devant le succès rencontré, les organisateurs décident d'augmenter le nombre de groupes présélectionnés. Mais les contraintes de temps ne permettent plus à chaque groupe de rencontrer tous les autres.

a) Montrer qu'il est possible d'organiser un tremplin avec six groupes A, B, C, D, E, F de sorte que chacun joue quatre fois exactement et dessiner le graphe correspondant. Combien y aura-t-il de rencontres en tout ?

b) Peut-on organiser un tremplin avec sept groupes jouant chacun quatre fois ? Justifier la réponse.

c) Essayer d'envisager un tremplin avec sept groupes jouant chacun cinq fois. Que remarque-t-on ?

4. Le lemme des poignées de mains
On appelle **degré** d'un sommet le nombre d'arêtes ayant ce sommet pour extrémité.
Par exemple, dans le graphe de la question 1, le sommet A a pour degré 3.

a) Pour chacun des graphes des questions 1, 2 et 3, donner le nombre total d'arêtes et calculer la somme des degrés des sommets de chacun d'eux.

b) Émettre une conjecture sur la relation entre le nombre d'arêtes d'un graphe et la somme des degrés de chacun des sommets puis la démontrer.

c) Est-il possible d'organiser un tremplin avec sept groupes jouant chacun cinq fois ? Justifier la réponse.

d) Si vingt groupes sont présélectionnés, est-il possible de satisfaire simultanément aux contraintes suivantes ?
- sept d'entre eux rencontrent exactement trois groupes ;
- neuf d'entre eux rencontrent exactement quatre groupes ;
- quatre d'entre eux rencontrent exactement cinq groupes.

Partie B : Comité d'organisation du tremplin

Le comité d'organisation de ce tremplin musical est réparti en sept commissions constituées en respectant les règles suivantes :

- **Règle 1** Tout membre du comité fait partie de deux commissions exactement.
- **Règle 2** Deux commissions quelconques ont exactement un membre en commun.

Déterminer le nombre de membres dans le comité d'organisation du tremplin et le nombre de membres dans chaque commission. (On pourra s'aider d'un graphe en précisant ce que représentent les sommets et les arêtes.)

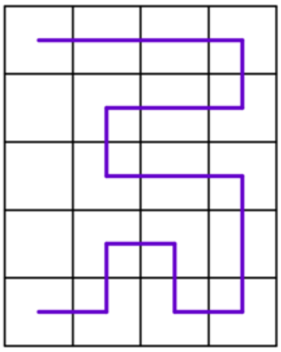
Partie C : Liens entre les groupes

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que n groupes sont présélectionnés pour le tremplin. Lors de la présentation de tous les groupes, certains révèlent se connaître.

Justifier que deux groupes au moins connaissent exactement le même nombre de groupes participant au tremplin. On pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 4 *(académique)* **Marches d'Olympe**

On déplace un pion sur une grille rectangulaire.
On appelle **marche d'Olympe** une suite de déplacements horizontaux (de gauche à droite ou de droite à gauche) et verticaux (du haut vers le bas ou du bas vers le haut) de sorte que chaque case soit atteinte au maximum une fois. De plus, une marche d'Olympe commence toujours au coin inférieur gauche et se termine toujours au coin supérieur gauche de la grille.
Par exemple le chemin ci-dessous est une marche d'Olympe dans une grille qui comporte 5 lignes et 4 colonnes :



1. Combien y a-t-il de marches d'Olympe dans une grille qui ne comporte qu'une seule colonne ?
2. Déterminer le nombre de marches d'Olympe dans une grille qui comporte deux lignes et deux colonnes.

   Dans toute la suite, n étant un entier naturel strictement positif, on considère une grille qui comporte trois lignes et n colonnes. On note u_n le nombre de marches d'Olympe dans une telle grille.
3. Dans cette question, $n = 2$.
   On considère donc la grille ci-contre, dans laquelle on a numéroté les cases.
   Calculer u_2, nombre de marches d'Olympe dans cette grille.
   On pourra s'aider d'un arbre.

E	F
C	D
A	B

4. Dans cette question, $n = 3$.
   On considère donc la grille ci-contre, dans laquelle on a numéroté les cases.
   Calculer u_3, nombre de marches d'Olympe dans cette grille.

G	H	I
D	E	F
A	B	C

On se place désormais dans le cas général. n désigne un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
On admet que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a la relation :

$$u_{n+2} = 2 + 2u_{n+1} + u_n \qquad (\mathcal{R}_1)$$

5. **a)** Vérifier que la formule donnant u_n est compatible avec les résultats précédents.
   b) Calculer u_4.
   c) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous qui permet de calculer u_n avec n entier naturel supérieur ou égal à 3.

Entrée	:	n entier naturel supérieur ou égal à 3
Initialisation	:	Affecter à a la valeur 1
		Affecter à b la valeur ...
Traitement	:	Pour k allant de 1 à ... faire :
		| m prend la valeur ...
		| a prend la valeur ...
		| b prend la valeur ...
		Fin Pour
Sortie	:	Afficher m

6. Dans cette question, on cherche à établir une formule explicite donnant le nombre u_n en fonction de n. Pour tout entier naturel n, on note $v_n = 1 + u_n$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, v_n vérifie la relation :

$$v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n \qquad (\mathcal{R}_2)$$

b) Soit r un nombre réel non nul.
Démontrer que si la suite (w_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $w_n = r^n$ vérifie la relation $\mathcal{R}_2$, alors r ne peut prendre que deux valeurs distinctes que l'on déterminera.

c) Soient α et β deux nombres réels.
Démontrer que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel non nul n par

$$t_n = \alpha\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \beta\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

vérifie la relation $\mathcal{R}_2$.

d) Déterminer α et β de sorte que $t_1 = v_1$ et $t_2 = v_2$.
On admettra qu'alors, pour tout entier naturel n, t_n et v_n sont égaux.

e) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

Olympiades de mathématiques

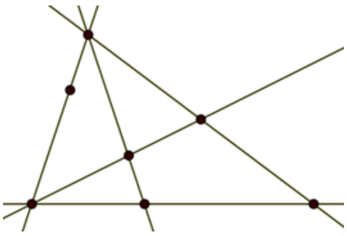
Académie de Besançon

19 mars 2014

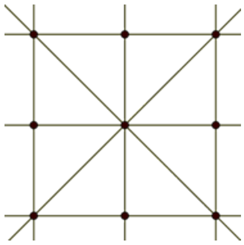
Éléments de correction

Exercice 1 *(national)* **Figures équilibrées**

1.



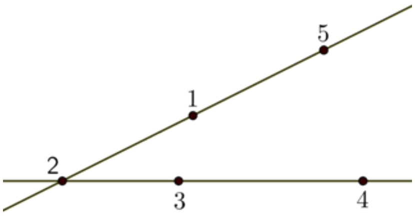
a) Figure équilibrée constituée de 7 points marqués et 5 droites.



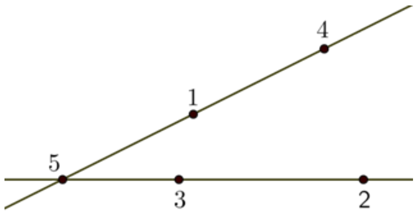
b) Figure équilibrée constituée de 9 points marqués et 8 droites.

2.

Exemple de numérotation non magique :



Exemple de numérotation magique de constante $K = 10$:



On peut montrer que, pour être magique, une numérotation doit avoir au point d'intersection le numéro 1, 3 ou 5 (en raisonnant sur les numéros restants par couples sur la même droite).

3. **a)** Les quatre droites portent respectivement les sommes $a+c+e$, $a+b+f$, $b+d+e$ et $c+d+f$. La somme de ces quatre sommes est d'une part égale à $4 \times K$, et d'autre part égale à $2(a+b+c+d+e+f) = 2(1+2+3+4+5+6) = 42$.
D'où l'égalité $4 \times K = 42$.

b) Une numérotation magique de cette figure est impossible puisque K est un entier et 42 n'est pas un multiple de 4.

4. **a)** La somme $a+c+e$ est minimale lorsque $\{a\,;c\,;e\} = \{1\,;2\,;3\}$ et cette somme est maximale lorsque $\{a\,;c\,;e\} = \{4\,;5\,;6\}$, donc $6 \leqslant a+c+e \leqslant 15$.

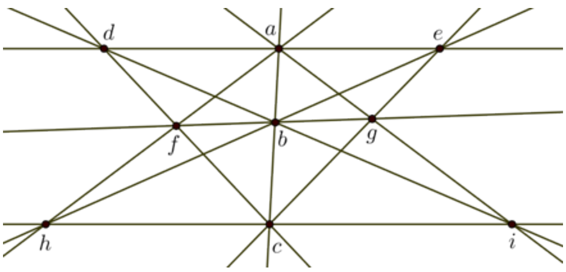
b) Si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors

$$(a+b+c)+(a+f+e)+(c+d+e) = 3 \times K.$$

Comme $a+b+c+d+e+f = 1+2+3+4+5+6 = 21$, on a $a+c+e+21 = 3 \times K$, d'où $a+c+e = 3(K-7)$.

c) On déduit de **4. a)** et **4. b)** que $6 \leqslant 3(K-7) \leqslant 15$, d'où $9 \leqslant K \leqslant 12$.
On vérifie que les quatre valeurs possibles de K donnent effectivement une figure équilibrée magique :
- avec $K = 9$, on place en tournant depuis un point marqué les nombres : 1, 5, 3, 4, 2, 6 ;
- avec $K = 10$, on place en tournant depuis un point marqué les nombres : 5, 4, 1, 6, 3, 2 ;
- avec $K = 11$, on place en tournant depuis un point marqué les nombres : 6, 3, 2, 5, 4, 1 ;
- avec $K = 12$, on place en tournant depuis un point marqué les nombres : 6, 2, 4, 3, 5, 1.

5. On numérote la figure ainsi :



Les trois sommets a, b et c sont les seuls qui appartiennent à quatre droites, les autres appartenant à trois droites.
En additionnant les dix sommes égales à K, on obtient :

$$4(a+b+c) = 3(d+e+f+g+h+i) = 10 \times K.$$

Comme $a+b+c+d+e+f+g+h+i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$, on a $a+b+c+3\times 45 = 10\times K$ soit $a+b+c = 10\times K - 135$. Comme $1+2+3 \leqslant a+b+c \leqslant 7+8+9$, c'est-à-dire $6 \leqslant a+b+c \leqslant 24$, on a $6 \leqslant 10\times K - 135 \leqslant 24$ soit $\dfrac{141}{10} \leqslant K \leqslant \dfrac{159}{10}$.
La seule valeur de K possible est donc $K = 15$.
Selon les cas, le sommet qui porte la valeur 9 appartient à trois ou quatre droites. Puisque la constante est $K = 15$, les deux autres nombres portés sur ces trois ou quatre droites ont pour somme 6. Or, il n'y a que deux façons d'obtenir une somme égale à 6 avec des entiers distincts : $6 = 1+5 = 2+4$.
La figure équilibrée donnée n'admet donc pas de numérotation magique.

EXERCICE 2 *(national)* **Le plus court possible**

Partie A

1. • Le réseau n°1 a pour longueur 300 km.
   • Le réseau n°2 a pour longueur (en km) $200\sqrt{2}$, soit environ $282,843$ km.
   • Le demi-cercle a pour longueur 50π et chaque segment $50\sqrt{5}-50$. Donc le réseau n°3 a pour longueur (en km) $50\pi+100(\sqrt{5}-1)$, soit environ $280,686$ km.

   Le réseau n°3 est donc le plus court.

2. Si $EF=20$, d'après le théorème de Pythagore, chaque segment diagonal a pour longueur $10\sqrt{41}$, donc le réseau a pour longueur (en km) $20+4\times 10\sqrt{41}$, soit environ $276,125$ km. Ce réseau est donc plus court que les trois premiers.

Partie B

1. Comme admis au début de l'énoncé, si on trace une courbe quelconque entre deux points, sa longueur est toujours au moins égale à celle du segment entre ces deux points.
   Donc ici, le premier réseau dessiné dans l'énoncé est de longueur supérieure ou égale à celui dessiné avec des segments, en remplaçant en outre les deux courbes entre E_0 et F_0 par un seul segment.

2. **a)** Notons A' le symétrique du point A par rapport à Δ_E. La symétrie conserve les longueurs, on a $DE+EA=DE+EA'$. D'après l'inégalité triangulaire, cette somme est toujours supérieure ou égale à DA'. Et il y a égalité si, et seulement si E appartient au segment $[DA']$. Ainsi, $DE+EA$ sera minimale lorsque E sera sur le segment $[DA']$, ce qui implique que E soit le milieu de $[DA']$, ou encore que E soit sur la médiatrice de $[AD]$.

   b) Comme le segment $[EF]$ est perpendiculaire aux droites Δ_E et Δ_F, la distance EF est la plus courte distance entre ces droites. Donc $EF \leqslant E_0F_0$.

   c) La configuration qui minimise la longueur totale du réseau est celle qui minimise les longueurs DE_0+E_0A, E_0F_0 et BF_0+F_0C. D'après les questions **1**, **2. a)** et **2. b)**, il existe un réseau qui réalise le minimum de chacune de ces composantes et il est analogue à celui de la figure 8, où E et F sont sur la médiatrice du segment $[AD]$.

3. **a)** On note O le point d'intersection de $[EF]$ avec la médiatrice de $[AB]$.
   Si E et F ne sont pas symétriques, on considère les longueurs $DE+EA+EO$ d'un côté et $CF+FB+FO$ de l'autre. Si, par exemple, $CF+FB+FO \geqslant DE+EA+EO$, on remplace F par le point E' symétrique de E par rapport à O. On obtient alors une configuration symétrique de longueur inférieure ou égale.

   b) Si l'on note x la distance EF, $x\in[0\,;100]$, alors la longueur du réseau est égale à :

   $$f(x)=x+4\sqrt{50^2+\left(50-\frac{x}{2}\right)^2}=x+4\sqrt{\frac{x^2}{4}-50x+5000}$$

   À l'aide de la calculatrice, on détermine une valeur approchée du minimum d'environ 275 km atteinte pour $x\approx 42$.

   Solution exacte (qui n'est pas attendue) :
   f est dérivable sur $[0\,;100]$ et pour tout x de $[0\,;100]$ on a : $f'(x)=1+\dfrac{x-100}{\sqrt{\dfrac{x^2}{4}-50x+5000}}$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) \geqslant 0 &\iff 1 + \frac{x-100}{\sqrt{\frac{x^2}{4} - 50x + 5000}} \geqslant 0 \\
&\iff \frac{\sqrt{\frac{x^2}{4} - 50x + 5000}}{x-100} \leqslant -1 \\
&\iff \sqrt{\frac{x^2}{4} - 50x + 5000} \geqslant 100 - x \\
&\iff \frac{x^2}{4} - 50x + 5000 \geqslant (100-x)^2 \\
&\iff \frac{3}{4}\, x^2 - 150x + 5000 \leqslant 0
\end{aligned}
$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 7500 > 0$ donc il admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = 100 - \frac{100\sqrt{3}}{3} \approx 42,265 \text{ et } x_2 = 100 + \frac{100\sqrt{3}}{3} > 100.$$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		$100 - \frac{100\sqrt{3}}{3}$		100
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$200\sqrt{2}$	$\searrow$	$100 + 100\sqrt{3}$	$\nearrow$	300

c) Avec $EF = 100 - \dfrac{100\sqrt{3}}{3}$, si I est le milieu de $[AD]$, on a :

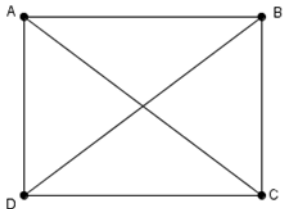
$$
\begin{aligned}
\tan\left(\frac{1}{2}\,\widehat{DEA}\right) &= \frac{DI}{EI} \\
&= \frac{50}{\dfrac{100 - \left(100 - \dfrac{100\sqrt{3}}{3}\right)}{2}} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Donc $\dfrac{1}{2}\,\widehat{DEA} = \dfrac{\pi}{3}$ et donc $\widehat{DEA} = \dfrac{2\pi}{3}$, soit en degrés : $\widehat{DEA} = 120^\circ$.

Exercice 3 *(académique)* **Organisation d'un tremplin musical**

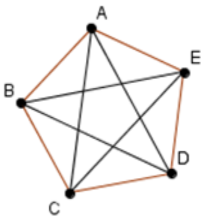
Partie A : Étude de quelques exemples

1. a)



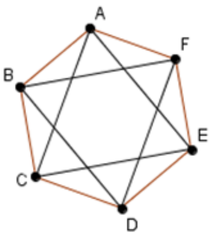
b) Ce graphe a 6 arêtes. Il y aura donc 6 rencontres.

2.



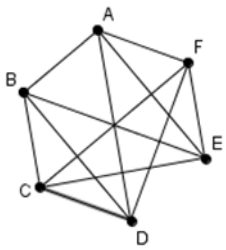
Ce graphe a 10 arêtes. 10 rencontres auront donc lieu.

3. a)



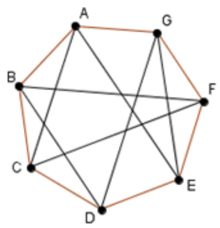
Ce graphe a 12 arêtes. Il y aura donc 12 rencontres au total.

On peut envisager d'autres possibilités ; par exemple :



b) On peut envisager d'organiser un tremplin avec sept groupes jouant chacun quatre fois.

Voici un graphe pouvant représenter cette situation :
Il y aura au total 14 rencontres.



c) On a l'impression qu'il est impossible d'organiser un tremplin avec sept groupes jouant chacun cinq fois.

4. Le lemme des poignées de mains

a)
- Le graphe de la question **1** a 4 sommets ayant tous pour degré 3. $4 \times 3 = 12$ donc la somme des degrés de tous les sommets est égale à 12 et on a déjà vu que le nombre d'arêtes de ce graphe est 6.
- Le graphe de la question **2** a 5 sommets ayant tous pour degré 4. $5 \times 4 = 20$ donc la somme des degrés de tous les sommets est égale à 20 et on a déjà vu que le nombre total d'arêtes de ce graphe est 10.

- Le graphe de la question **3. a)** a 6 sommets ayant tous pour degré 4. $6 \times 4 = 24$ donc la somme des degrés de tous les sommets est égale à 24 et on a déjà vu que le nombre total d'arêtes de ce graphe est 12.
- Le graphe de la question **3. b)** a 7 sommets ayant tous pour degré 4. $7 \times 4 = 28$ donc la somme des degrés de tous les sommets est égale à 28 et on a déjà vu que le nombre total d'arêtes de ce graphe est 14.

b) On peut alors émettre la conjecture suivante :
La somme de tous les degrés des sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.
En effet, lorsqu'on additionne les degrés de tous les sommets d'un graphe, on compte toutes les arêtes reliées à ces sommets deux fois car une arête fait intervenir deux sommets. Ainsi la somme des degrés des sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes de ce graphe. On en conclut aussi que la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est un nombre pair.

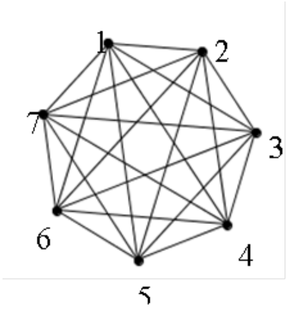
c) S'il était possible d'organiser un tremplin avec sept groupes jouant chacun cinq fois, le graphe correspondant à cette situation comprendrait 7 sommets et chaque sommet serait d'ordre 5. Dans ce cas, la somme des degrés de tous les sommets serait égale à 35, ce qui est impossible car ce doit être un nombre pair.
Il est donc impossible d'organiser un tel tremplin.

d) S'il était possible d'organiser un tremplin remplissant ces conditions, alors en considérant le graphe associé, on aurait 20 sommets dont :
- sept seraient d'ordre 3 ;
- neuf seraient d'ordre 4 ;
- quatre seraient d'ordre 5.

Ainsi, la somme des degrés serait : $7 \times 3 + 9 \times 4 + 4 \times 5 = 77$ et 77 est un nombre impair.
Il est donc impossible d'organiser un tel tremplin.

Partie B : Comité d'organisation du tremplin

On réalise un graphe comportant 7 sommets (les sommets représentent les sept commissions) et où une arête représente un membre du comité faisant partie des deux commissions en question. Chaque sommet doit être relié exactement aux six autres.
Pour plus de commodité, on note les commissions 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7.
Le nombre total d'arêtes est 21 donc il y a 21 membres au total dans ce comité et chaque commission compte 6 membres.



Partie C : Liens entre les groupes
On représente la situation par un graphe à n sommets (qui représentent les groupes) et où une arête reliant deux sommets signifie : les deux groupes en question se connaissent.
Supposons que chaque groupe connaisse un nombre différent de groupes. Alors les degrés des sommets du graphe sont tous différents. De plus, comme au maximum un groupe peut connaître $n-1$ groupes, les degrés des sommets sont 0, 1, 2, $\ldots n-1$.
Or, le groupe représenté par le sommet de degré $n-1$ connait tous les autres groupes, ce qui est impossible car il y a un sommet de degré 0, c'est-à-dire un groupe qui ne connait aucun autre groupe. C'est une contradiction.
Ainsi, il y a au moins deux groupes qui connaissent exactement le même nombre de groupes participant au tremplin.

Exercice 4 *(académique)* **Marches d'Olympe**

1. Dans une grille qui ne comporte qu'une seule colonne, il y a une marche d'Olympe.

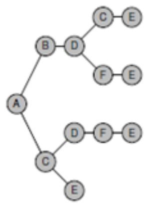
2. Dans une grille qui comporte deux lignes et deux colonnes, il y a deux marches d'Olympe qui correspondent aux déplacements A-C et A-B-D-C.

C	D
A	B

3.

E	F
C	D
A	B

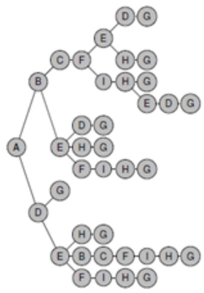
On a donc $u_2 = 4$.



4.

G	H	I
D	E	F
A	B	C

On a donc $u_3 = 11$.



5. **a)** $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 2 + 2u_2 + u_1 = 11$.

b) $u_4 = 2 + 2u_3 + u_2 = 28$.

c)

Entrée	:	n entier naturel supérieur ou égal à 3
Initialisation	:	Affecter à a la valeur 1
		Affecter à b la valeur 4
Traitement	:	Pour k allant de 1 à $n-2$ faire :
		| m prend la valeur $2+2b+a$
		| a prend la valeur b
		| b prend la valeur m
		Fin Pour
Sortie	:	Afficher m

6. ***version S***

a)

$$\begin{aligned}
v_{n+2} &= 1 + u_{n+2}\\
&= 1 + 2 + 2u_{n+1} + u_n\\
&= 2(1+u_{n+1}) + (1+u_n)\\
v_{n+2} &= 2v_{n+1} + v_n \qquad (\mathcal{R}_2)
\end{aligned}$$

b) Si (w_n) vérifie la relation $\mathcal{R}_2$, alors :

$$\begin{aligned}
w_{n+2} = 2w_{n+1} + w_n &\Rightarrow r^{n+2} = 2r^{n+1} + r^n\\
&\Rightarrow r^n r^2 - 2r^n r - r^n = 0\\
&\Rightarrow r^n(r^2 - 2r - 1) = 0\\
&\Rightarrow r^2 - 2r - 1 = 0 \qquad \text{car } r \neq 0
\end{aligned}$$

et les solutions de cette équation sont $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $r_2 = 1 - \sqrt{2}$.

c)

$$\begin{aligned} t_{n+2} - 2t_{n+1} - t_n &= \alpha r_1^{n+2} + \beta r_2^{n+2} - 2\alpha r_1^{n+1} - 2\beta r_2^{n+1} - \alpha r_1^n - \beta r_2^n \\ &= \alpha r_1^n \underbrace{(r_1^2 - 2r_1 - 1)}_{=0} + \beta r_2^n \underbrace{(r_2^2 - 2r_2 - 1)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc (t_n) vérifie la relation $\mathcal{R}_2$

d) Il s'agit de trouver α et β tels que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) & = & 2 \\ \alpha(1+\sqrt{2})^2 + \beta(1-\sqrt{2})^2 & = & 5 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \\ \beta & = & \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \end{array} \right.$$

e) On a donc $v_n = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n + \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n$, puis

$$u_n = v_n - 1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n - 1.$$

6. ***version non S***

a) La proportion de marches d'Olympe n'atteignant pas la quatrième colonne est égale à $\dfrac{u_3}{u_4}$ donc à $\dfrac{11}{28}$.

b) La fréquence $\dfrac{165}{500} = 0,33$ n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % :

$$\left[\frac{11}{28} - \frac{1}{\sqrt{500}}\,;\frac{11}{28} + \frac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx [0,348\,;0,438].$$

On a donc des raisons de mettre en doute la capacité du simulateur à simuler au hasard des marches d'Olympe.

c) On cherche n tel que $0,33 < \dfrac{11}{28} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui équivaut à $n > \left(\dfrac{1}{\frac{11}{28} - 0,33}\right)^2 \approx 253,099$.
Les tailles des échantillons que l'on peut choisir pour espérer corroborer l'hypothèse émise à la question précédente sont les entiers supérieurs ou égaux à 254.