SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE BESANÇON

Classes de première S • 2013

Olympiades académiques de mathématiques
2013
Académie de Besançon

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet comprend sept pages. Il est composé de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre que vous aurez choisi.

Deux de ces exercices sont des sujets nationaux, les deux autres sont des sujets académiques.

Recommandations :
Il est important que vous argumentiez vos affirmations. De plus, même si vous n'aboutissez pas à la solution complète d'une question, vous êtes invité à décrire vos initiatives, votre recherche et votre démarche, un résultat même partiel pouvant avoir son intérêt.

Exercice 1 (Exercice proposé par la cellule nationale)

Les nombres Harshad

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres.

Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. *a.* Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b. Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. *a.* Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b. Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. *a.* Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b. En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. *a.* Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b. En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c. Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. *a.* En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

b. Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. *a* Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.

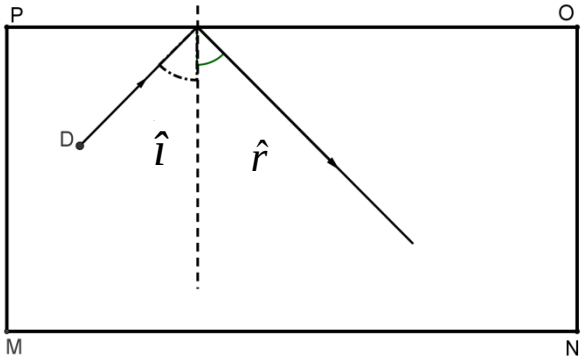
Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.

Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair. En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b. Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice 2 (Exercice proposé par la cellule nationale)

Un billard rectangulaire



On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion , comme sur la figure ci-contre (.

1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

a. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

b. Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?

c. Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].

a. Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

b. Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

Exercice 3 (Exercice proposé par la cellule académique)

La devinette de Clara

Clara a pensé à quatre nombres.

Elle calcule les six sommes de ces nombres pris deux à deux.

Elle écrit au tableau cinq de ces six sommes : $-2, 1, 2, 3, 6.$

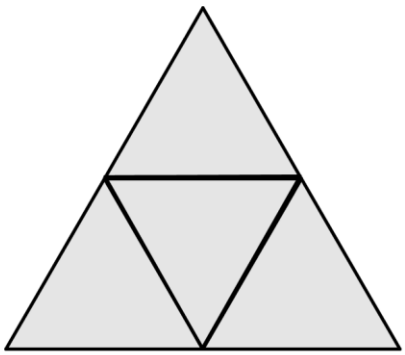
Quels sont les quatre nombres auxquels Clara pensait ?

Exercice 4 (Exercice proposé par la cellule académique)

Sommes de sommets

Première partie

Un triangle équilatéral de côté de longueur 2 est partagé en quatre triangles équilatéraux comme le montre la figure. À chaque sommet de ces 4 triangles est écrit un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, utilisé chacun une seule fois. À l'intérieur de chacun des quatre triangles, on inscrit la somme des nombres écrits à ses sommets.

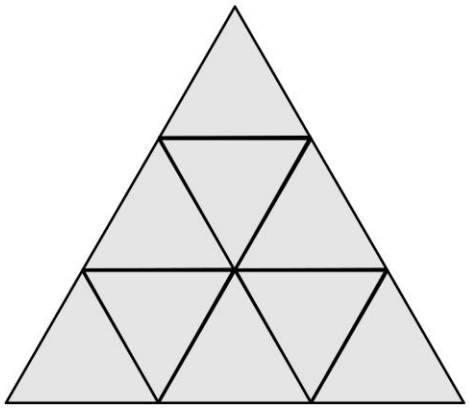


1. Est-il possible que les nombres inscrits dans les triangles soient tous égaux ?

2. Est-il possible que la différence entre le plus grand de ces nombres et le plus petit soit égale à 1 ? Si oui, donner un exemple de répartition convenable.

Tournez la page s'il vous plaît

Deuxième partie



Dans cette partie, on utilise un triangle équilatéral de côté 3 partagé en neuf triangles aux sommets desquels on écrit les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, utilisés chacun une seule fois, et on affiche les sommes obtenues pour chacun des neuf triangles.

1. Prouver que, quelle que soit la répartition des nombres sur les 10 sommets, trois au moins des nombres inscrits dans les triangles sont supérieurs ou égaux à 12.

2. Prouver que, quelle que soit la répartition des nombres sur les 10 sommets, trois des nombres inscrits dans les triangles ont une somme supérieure ou égale à 48.

3. Est-il possible que les nombres inscrits dans les triangles soient tous de même parité ?

4. Est-il possible que la différence entre le plus grand et le plus petit des nombres inscrits dans les triangles soit égale à 1 ?

5. Prouver, en donnant un exemple de distribution correspondant, qu'il est possible que la différence entre le plus grand et le plus petit de ces nombres soit égale à 2.

Exercice commun 1 Les nombres Harshad

On notera dans le corrigé s(n) la somme des chiffres de l'entier n.

1.a) 364 est divisible par 3+ 6 + 4 = 13.

b) 11 est le plus petit entier qui ne soit pas de Harshad.

2. a) 1000 par exemple.

b) 10^{n-1} par exemple.

3. a) 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs

b) 1**0**10 ; 1**0**11 ; 1**0**12 sont trois nombres Harshad consécutifs.

c) 1**0…0**10 ; 1**0…0**11 ; 1**0…0**12 sont trois nombres Harshad consécutifs (avec autant de 0 que l'on veut).

4. a) A = 30 × 31 × 32 × 33 = 982080. Sa somme de chiffres est 27.

b) 98208030 = 98208000 + 30 est divisible par s(98208030) = 27 + 3 = 30.

idem pour les trois suivants.

c) 98208**0…0**30 ; etc. forment une liste de quatre Harshad consécutifs.

5. a) A = 30 × 31 × 32 × 33 × 34 = 33390720 a pour somme de chiffres 27.

3339072030 ; 3339072031 ; 3339072032 ; 3339072033 ; 3339072034 sont cinq nombres de Harshad consécutifs/

b) 3339072**0…0**30 ; etc. forment une liste de cinq Harshad consécutifs.

6 .a) s(p + 2) = s(p) – i – 9 + (i + 1) + 1 = s(p) – 7 donc s(p) et s(p + 2) sont de parités différentes.

p et p + 2 sont tous les deux impairs, donc ne sont pas divisibles par 2.

L'un de ces nombres a une somme de chiffres paire, il ne peut donc pas être Harshad.

b) Les couples de terminaisons incompatibles sont :

09-11 ; 19-21 ; … ; 89-91.
Le plus grand « vide » possible est la série 90 ; 91 ; … ; 09 ; 10 qui a une longueur 21.

Il existe donc au maximum 21 nombres Harshad consécutifs.

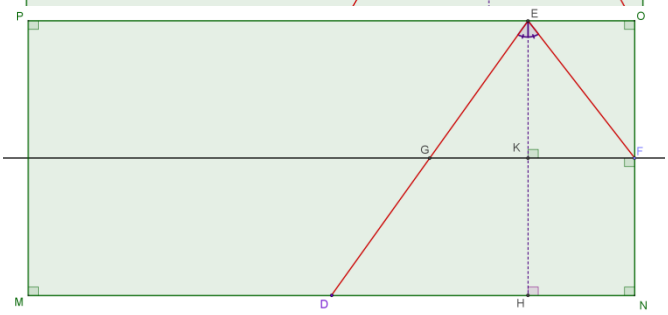
Remarque : le théorème de Grundman ramène ce nombre maximum à 20 (démonstration plus difficile).

Grundman a montré l'existence d'une telle liste de 20 Harshad consécutifs ; les nombres de cette liste ont

44 363 342 786 chiffres…

Exercice commun 2 Un billard rectangulaire

1. La bille est placée initialement en D, milieu de $[MN]$.
   a. Si on vise un point B du rail $[PO]$ et que la bille atteint N, suivant les règles de la réflexion, la perpendiculaire à $[PO]$ en B est la bissectrice de l'angle $\widehat{DBN}$ et confondue avec la hauteur issue de B dans le triangle ABN.
   Le triangle DBN est donc isocèle en B, et la droite (HN) est la médiatrice de $[DN]$ ($DN = \frac{300}{2} = 150$ cm).
   Il faut donc viser le point B du segment $[PO]$ situé à 75 cm de O ($DH = HN = BO$.)



   b. Quel point du rail $[PO]$ faut-il viser pour que la bille atteigne en une bande le milieu du rail $[NO]$?

Le point E étant le point du rail $[PO]$ visé, le point F étant le milieu du rail $[NO]$ à atteindre, le point G étant le point d'intersection de la médiatrice du segment $[NO]$ et du segment $[DE]$, par les arguments précédents, on a cette fois :

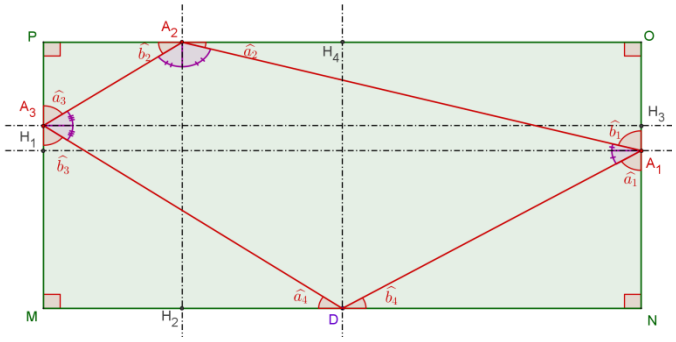
GEF isocèle en E et $GK = KF$.

Par ailleurs, dans le triangle DEH, $G \in [DE]$, K est le milieu de $[EH]$, et $(GK)//(DH)$, donc, par la réciproque du théorème des milieux, $DH = 2GK$.

Enfin, $EO = HN = KF = GK$ et $DN = DH + HN$, donc : $EO = \frac{DN}{3} = \frac{150}{3} = 50$ cm.

Il faut donc viser le point E du segment $[PO]$ situé à 50 cm de O.

   c. Quel point du rail $[NO]$ faut-il viser pour que la bille revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après avoir touché exactement trois rails) ?



Il est assez aisé de deviner que la ligne brisée joignant les milieux des trois rails répond à la question, on viserait donc le milieu du rail $[NO]$, puis de vérifier que cette trajectoire convient.
On peut cependant montrer que c'est l'unique solution (la démonstration permettra ensuite de répondre immédiatement à la question 2.b.) :

Considérons une hypothétique trajectoire à trois bandes dans laquelle la bille part de D, touche les rails en $A_1 \in [NO]$, $A_2 \in [OP]$, $A_3 \in [PM]$ puis revient en D.

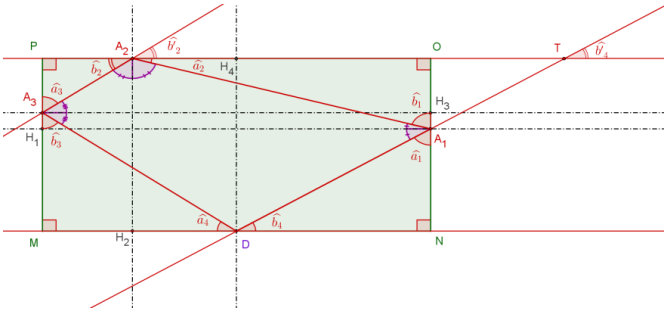
Les droites en traits tiretés sont des perpendiculaires aux rails.

Par les règles de la réflexion, tous les angles d'un même couple $(\widehat{a_i}; \widehat{b_i})$ $(1 \leq i \leq 3)$ sont de même mesure car leurs complémentaires sont de même mesure.
Mais aussi en tant que couple d'angles aigus aux sommets d'un même triangle rectangle, chaque couples $(\widehat{b_i}; \widehat{a_{i+1}})$ $(1 \leq i \leq 3)$ est aussi un couple d'angles complémentaires. Et il en est de même pour le couple $(\widehat{b_4}; \widehat{a_1})$.
Il s'ensuit les égalités :

$$(1)\ \widehat{b_4} = \widehat{a_2} = \widehat{b_2} = \widehat{a_4} \quad \text{et} \quad \widehat{a_1} = \widehat{b_1} = \widehat{a_3} = \widehat{b_3}.$$

Par ailleurs, en considérant les droites parallèles (PO) et (MN), et la droite (D, A_1) sécante à (MN) en D, et à (PO) en T, on a l'égalité des mesures des angles correspondants $\widehat{b_4'}$ et $\widehat{b_4}$.
Et en considérant les droites (PO) et (A_2A_3), on a l'égalité des mesures des angles aux sommets $\widehat{b_2'}$ et $\widehat{b_2}$.
En combinant avec les égalités (1), il vient que $\widehat{b_2'} = \widehat{b_4'}$, c'est-à-dire qu'on a une égalités des mesures des angles correspondants relativement aux droites (DA_1) et (A_2A_3) coupées par la sécante (PO).
On en déduit que les côtés opposés $[DA_1]$ et $[A_2A_3]$ dans le quadrilatère $DA_1A_2A_3$ sont parallèles.
On montre de même que les côtés opposés $[A_1A_2]$ et $[A_3D]$ sont parallèles.

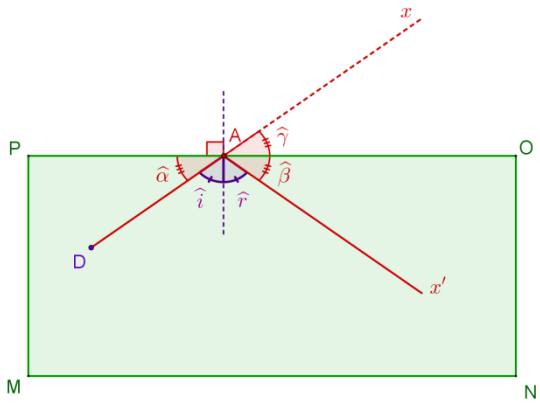
La trajectoire fermée en trois bandes D, A_1, A_2, A_3 forme donc un parallélogramme.



Le point D étant le milieu de $[MN]$, et les angles $\widehat{a_4}$ et $\widehat{b_4}$ même mesure, les triangles rectangles DNA_1 et DMA_3 sont symétriques par rapport à la médiatrice du rail $[MN]$, ce qui donne l'égalité des longueurs DA_1 et DA_3. Le parallélogramme $DA_1A_2A_3$ est donc un losange.
Les triangles DNA_1 et A_1OA_2 étant rectangles et semblables car $\widehat{a_1} = \widehat{b_1}$ et $\widehat{b_4} = \widehat{a_2}$, comme aussi leurs hypoténuses sont de même longueur ($DA_1 = A_1A_2$, côtés consécutifs du losange $DA_1A_2A_3$), les côtés NA_1 et A_1O sont de même longueur.

On en conclut que le point N est nécessairement le milieu du rail $[NO]$, c'est le point qu'il faut viser.
Les résultats précédents assurent que suivant les règles de la réflexion, la bille retournera en D.

2. La construction de la trajectoire de la bille au-delà d'un rebond, conformément aux règles de la réflexion peut se faire par symétrie axiale par rapport au rail heurté.
Ainsi, si la bille part d'un point D et heurte un rail en A, sa poursuite de trajectoire (demi-droite $[A, x")$ est le symétrique de la demi-droite $[Ax)$, prolongement du segment $[DA]$:

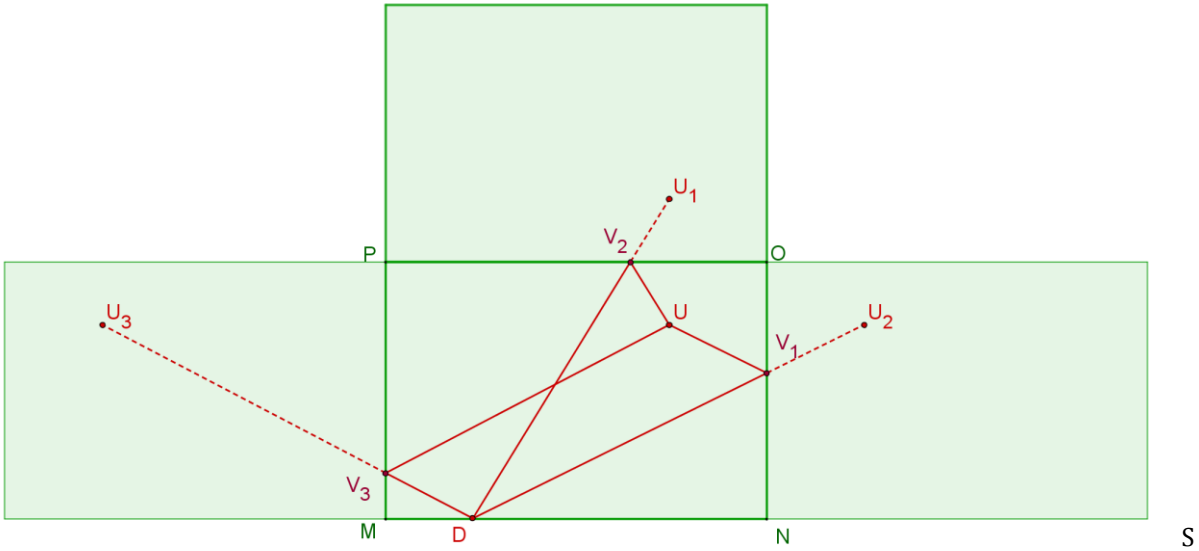


En effet, suivant les lois de la réflexion, les angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, complémentaires respectifs des angles de même mesure $\hat{\imath}$ et $\hat{r}$, sont encore de même mesure, tandis que les angles $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ sont de même mesure, par symétrie.

En cas de rebonds multiples, on peut, de la même façon, obtenir la trajectoire complète, en multipliant les symétries à partir du prolongement rectiligne de la trajectoire initiale.

Ceci permet de répondre aisément aux questions 1.a., 1.b. et 1.c. et plus encore aux questions 2.a. et 2.b.

a. On note D la position initiale de la bille, et U le point à atteindre.

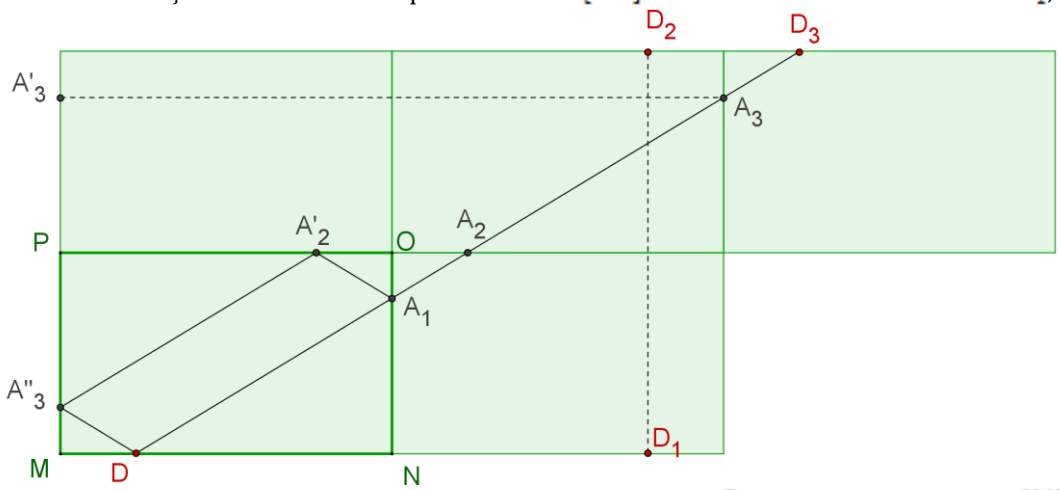


ur la figure ci-dessus, où l'on a placé les points U_1, U_2, U_3 symétriques respectifs du point U à atteindre par rapport aux rails $[NO]$, $[OP]$ et $[PM]$, atteindre le point U en une bande sur l'un de ces rails, revient à atteindre l'un des symétriques U_1, U_2, U_3 par une trajectoire rectiligne rencontrant le rail par rapport auquel le symétrique est construit.
Il y a sur cet exemple trois façons d'atteindre le point U.

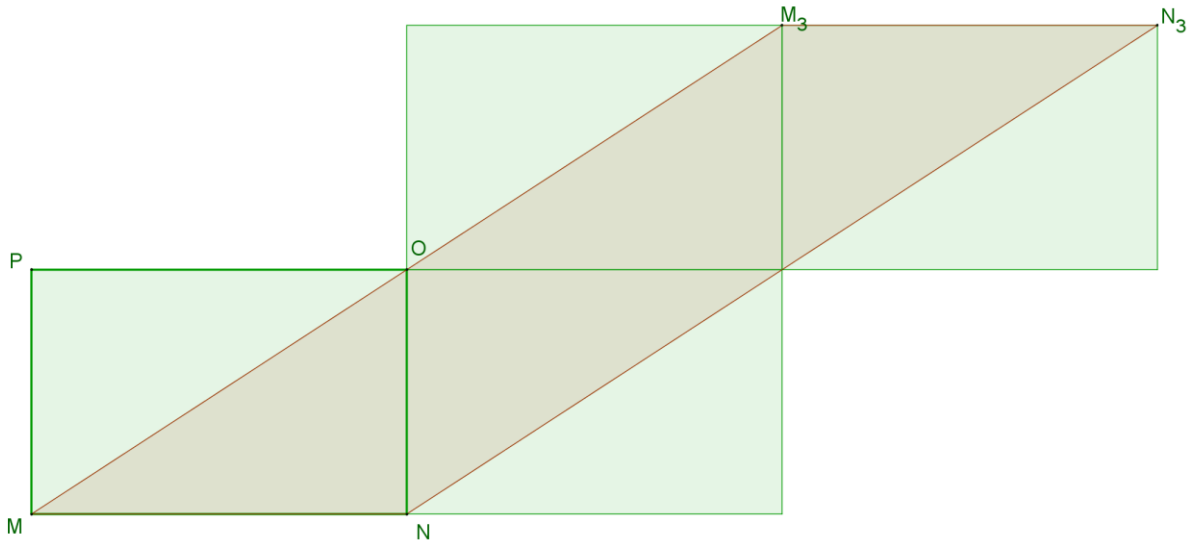
S'il s'agit de savoir si l'on peut atteindre un point quelconque du billard, on cherchera s'il est possible d'atteindre un symétrique quelconque par une trajectoire rectiligne rencontrant la rail par rapport auquel est construit le symétrique.

Où que soit situé le point D le long du rail $[MN]$, il est possible d'atteindre tout point situé sur n'importe où à l'intérieur des trois rectangles figurant les symétriques de la surface de jeu par rapport à chacun des rails $[NO]$, $[OP]$ et $[PM]$, il est donc possible d'atteindre tout point U de la surface de jeu en une bande, et ce de trois façons possibles toujours.

b. On peut répondre en reprenant les résultats du 1.c. (si l'on a cherché toutes les trajectoires possibles – on reprend le résultat selon lequel la trajectoire est nécessairement un parallélogramme ; si l'on a « intuité » qu'il s'agissait au 1.b. d'un losange, ce n'est pas possible). Ci-dessous, un autre méthode.
S'il s'agit de revenir au point initial en trois bandes, on cherchera des solutions en étudiant la possibilité de trajectoires rectilignes traversant trois symétriques de la surface jeu par rapport à des rails et atteignant l'image de D par la composée de ces trois symétries.
Ci-dessous la façon de revenir en un point D du rail $[MO]$ en trois bandes avec rebonds en A_1, A'_2 et A''_3 :



La même construction est possible à partir de tout point D situé le long du rail $[MN]$, puisque le parallélogramme NN_3MM_3 est inclus dans la surface de jeu et les trois surfaces symétriques à considérer, et pour tout point D du rail $[MN]$, le point D_3 construit comme au-dessus par composition de trois symétries est tel que le segment $[DD_3]$ est inclus dans ce parallélogramme :



Exercice 3 Concours S La devinette de Clara

Considérons les nombres inconnus rangés dans l'ordre décroissant : $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. Ces inégalités en entraînent d'autres : $a+b \geqslant a+c \geqslant a+d$, $b+c \geqslant b+d$, etc.

On peut écrire les deux chaînes d'inégalités : $\begin{cases} a+b \geqslant a+c \geqslant a+d \geqslant b+d \geqslant c+d \\ a+b \geqslant a+c \geqslant b+c \geqslant b+d \geqslant c+d \end{cases}$.

Dans lesquelles on voit l'importance de l'ordre relatif de $b+c$ et $a+d$

1. Supposons que $b+c$ et $a+d$ font partie des données

Dans l'ordre décroissant des sommes données, ces deux sommes occupent alors les deuxième et troisième rangs ou les troisième et quatrième. La somme $a+b+c+d$ est, dans le premier cas, égale à 5 et dans le second égale à 3. La somme de deux autres des nombres donnés doit elle aussi représenter $a+b+c+d$, mais on constate dans chaque cas qu'aucune des sommes deux à deux des nombres restants de la liste n'est égale à 5 (respectivement à 3).

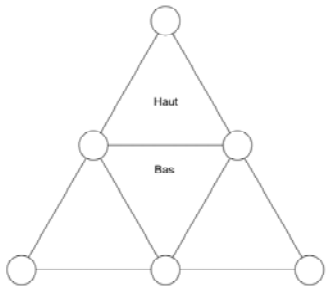
2. Supposons que $b+c$ et $a+d$ ne font pas tous les deux partie des données

La somme $a+b+c+d$ s'écrit $(a+b)+(c+d)$ et aussi $(a+c)+(b+d)$. Elle est égale à 4. Comme $a+d$ (ou $b+c$) est égal à 2, on en déduit que la somme manquante est aussi 2.

Finalement $a=\frac{7}{2}$, $b=\frac{5}{2}$, $c=-\frac{1}{2}$, $d=-\frac{3}{2}$.

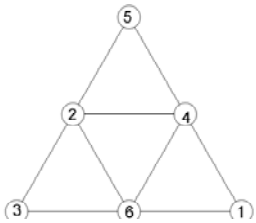
Exercice 3 Concours S Somme de sommets

Première partie

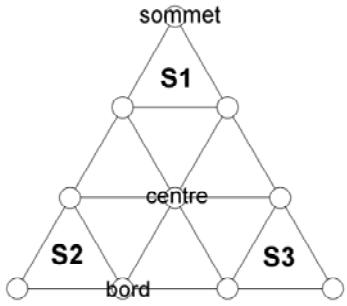


1. Les triangles marqués Haut et Bas de la figure ci-contre ont deux sommets en commun. Les sommes à y inscrire différent de la différence des nombres placés en leurs sommets non communs. Ceux-ci sont distincts. La réponse est donc négative.

2. Une condition nécessaire est que les nombres inscrits aux sommets non communs des trois paires de triangles adjacents diffèrent au maximum de 1. La figure de droite fournit un exemple.



Deuxième partie



1. Si le nombre 10 occupe la position marquée « centre », il participe à six sommes, toutes supérieures à 12. S'il occupe une des six positions « bord », il participe à trois sommes supérieures à 12. Il participe à une seule somme s'il occupe une des trois positions « sommet ». Le même raisonnement vaut pour le nombre 9 (en remplaçant supérieures par supérieures ou égales). Ce raisonnement n'est pas concluant pour le nombre 8, car la somme 8 + 1 + 2 est inférieure à 12. Mais en position « centre » ou « bord », 8 apporte encore au moins une somme supérieure ou égale à 12. Si on place 8 dans la dernière position « sommet » disponible, avec 1 et 2 comme compléments, la somme des nombres inscrits dans les six triangles ayant un sommet en position « centre » est au moins égale à $6\times3+2\times(1+2+4+5+6+7)$, c'est-à-dire 68. La moyenne des six sommes est supérieure à 11, donc l'une des six est supérieure ou égale à 12.

2. Si le nombre 10 occupe la position « centre », la somme des nombres inscrits dans les six triangles marqués 10 à leur sommet commun est au minimum $6\times10+2\times(1+2+3+4+5+6)$, c'est-à-dire 102. Trois des nombres inscrits dans les triangles concernés ont alors une somme supérieure à 51. De même, **si le nombre 9 occupe la position « centre »**, la somme des nombres inscrits dans les six triangles marqués 9 à leur sommet commun est au minimum $6\times9+2\times(1+2+3+4+5+6)$, c'est-à-dire 96, et trois des nombres inscrits dans ces six triangles ont une somme supérieure ou égale à 48.

Si le nombre *n* occupe la position marquée centre, les autres nombres apparaissent chacun une fois dans la somme $S1+S2+S3$, qui est égale à $\sum_{k=1}^{k=10} k-n$, c'est-à-dire $55-n$. **Pour *n* inférieur ou égal à 7, la somme** $S1+S2+S3$ **est donc supérieure à 48.**

Reste à examiner le cas où 8 est au centre. Si 10 occupe une position « bord », deux triangles ont des sommets communs marqués 8 et 10. La somme des nombres inscrits sur les deux est supérieure ou égale à 39. Comme le nombre inscrit sur au moins un autre triangle est supérieur à 9, trois des triangles montrent des sommes dont la somme est supérieure ou égale à 48. Reste à examiner le cas où le nombre 10 occupe un sommet. Si le nombre 9 occupe une position « bord », la somme des nombres inscrits sur trois triangles, les deux qui ont 8 et 9 occupant leurs sommets communs et un dont un sommet est marqué 10, est supérieure ou égale à $2\times(8+9)+10+1+2+3$, c'est-à-dire 50. Le nombre 9 occupe donc un sommet… mais alors, trois triangles portent à leurs sommets les nombres 10, 9, 8 et six nombres distincts parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. La somme des nombres inscrits sur ces trois triangles est supérieure à $10+9+8+6+5+4+3+2+1$, c'est-à-dire 48.

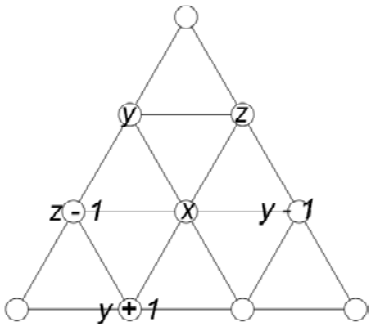
3. *a.* 1. Si on souhaite obtenir des sommes toutes paires et que le nombre placé au centre est pair, ses voisins doivent être tous de même parité. Cela fait six nombres de même parité parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10. Impossible.

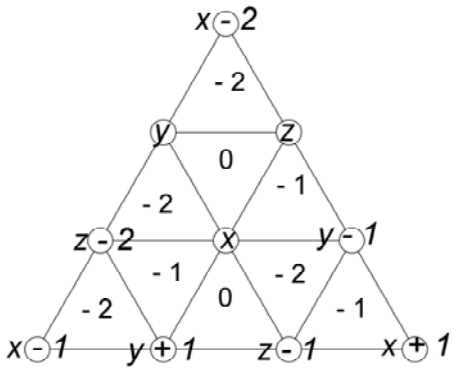
a. 2. Si le nombre placé au centre est impair, ses voisins doivent être de parité alternée (un pair, un impair par triangle), mais alors les trois sommets sont occupés par des nombres impairs, cela fait sept nombres impairs parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10. Impossible.

b. 1. Si on souhaite obtenir des sommes toutes impaires et que le nombre placé au centre est impair, c'est la situation du *a.* 1.

b. 2. Si le nombre placé au centre est pair, c'est la situation du *a.* 2.

4. Partant du triangle dont les sommets sont marqués *x*, *y*, et *z*, on marque les sommets des triangles ayant avec lui un côté commun. Si $x+y+z$ est la plus forte somme, les sommes voisines sont $x+y+z-1$, et chaque fois deux des trois termes sont connus. La figure ci-contre montre qu'alors les trois positions « sommet » sont occupées par le même $x-1$. Impossible. Échanger – 1 et + 1 fournit le même résultat si on suppose que la somme $x+y+z$ est la plus petite.





5. On a utilisé dans la figure ci-contre quatre nombres consécutifs, $x-2,\ x-1,\ x,\ x+1$, trois nombres consécutifs $y-1,\ y,\ y+1$ et trois autres nombres consécutifs $z-2,\ z-1,\ z$ (cette répartition est due au choix de départ). On peut donc éviter les chevauchements.

N.B. Les 0, – 1 et – 2 figurent les différences par rapport à la somme $x+y+z$.