# SUJET + CORRIGÉ

## OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

## ACADÉMIE DE BESANÇON

## Classes de première S • 2011

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2011

ACADEMIE DE BESANÇON

Durée : 4 heures

**Les calculatrices sont autorisées**.

Le sujet comprend quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre que vous aurez choisi.

***Recommandations***

Il est important que vous argumentiez vos affirmations. De plus, même si vous n'aboutissez pas à la solution complète d'une question, vous êtes invité à décrire votre recherche et votre démarche, un résultat même partiel pouvant avoir son intérêt.

Corrigés

Vous pourrez consulter les corrigés de ces exercices prochainement en vous connectant à l'adresse http : // catice.ac-besancon.fr/Mathematiques/Olympiades-1S

# Exercice national 1 : Essuie-glaces

**(les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)**

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

**1.** Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au $cm^2$ près.

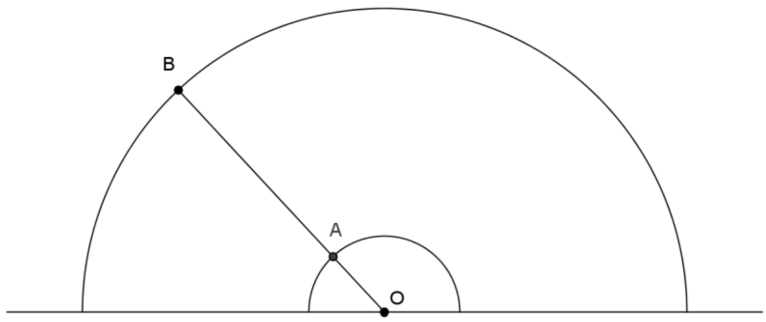



Fig. 1

**2.** Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant l'un autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

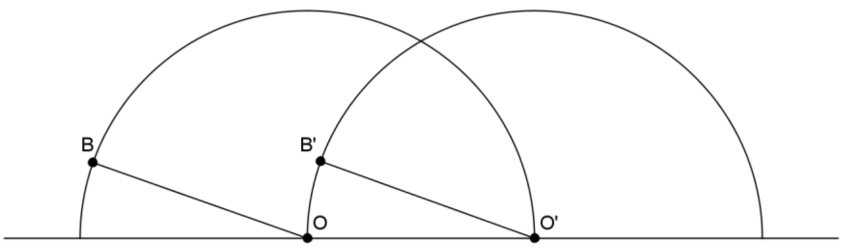



Fig. 2

**3.** Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, CB = 4 CA et $\text{OC} = \sqrt{3} \times \text{CA}$. On pose CA = $a$.

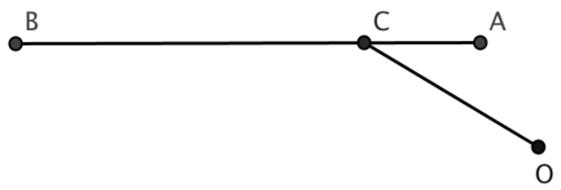



Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de $a$ l'aire de la surface essuyée par le balai.

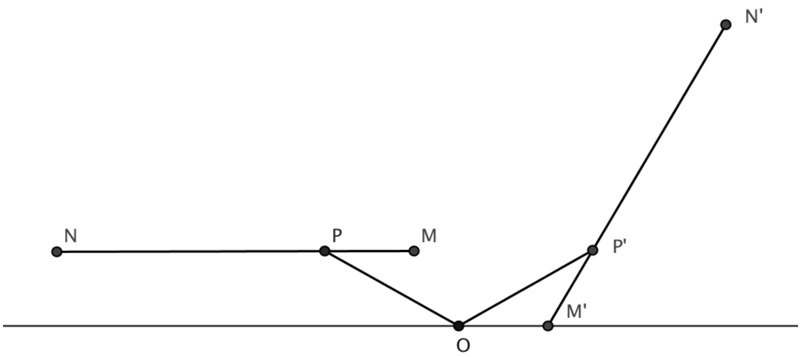


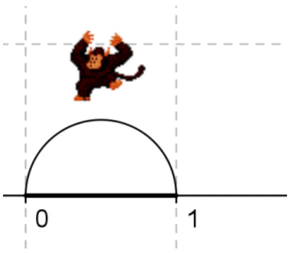

Fig. 4

# Exercice National 2 : Le singe sauteur

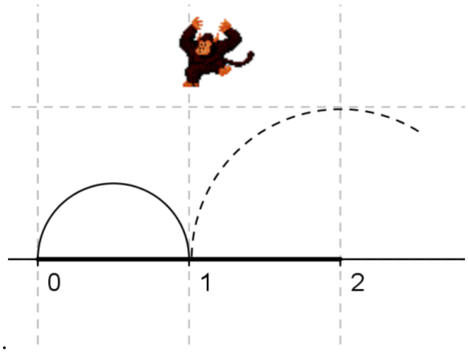
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre $n$ est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse $n$ en **exactement** $n$ bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, $n$ (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0\ ;\ n]$.

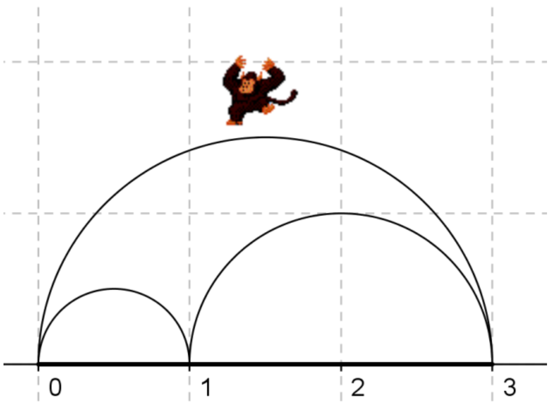
*Par exemple* : Le nombre 1 est atteignable en un bond.




Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.




Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0\ ;\ 3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



**Questions**

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis.*

4. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier $m$, on $a$ :$1+2+3+\ldots m=\dfrac{m(m+1)}{2}$ .

5. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

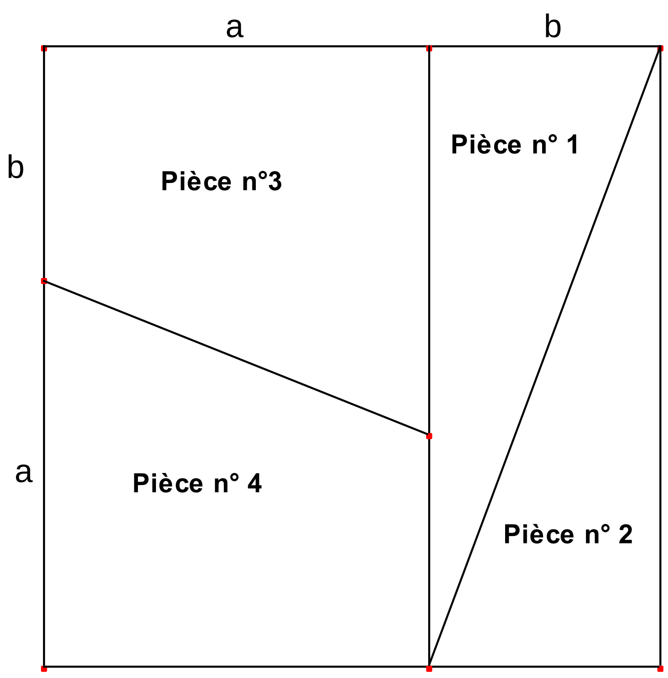
6.

   6.1. Montrer que si le nombre entier $n$ est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier $n$ pour qu'il soit atteignable.

   6.2. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

7. On suppose N $\geq$ 6 et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 … Montrer que N+4 est aussi atteignable.

# Exercice académique 3 : L'énigme du puzzle

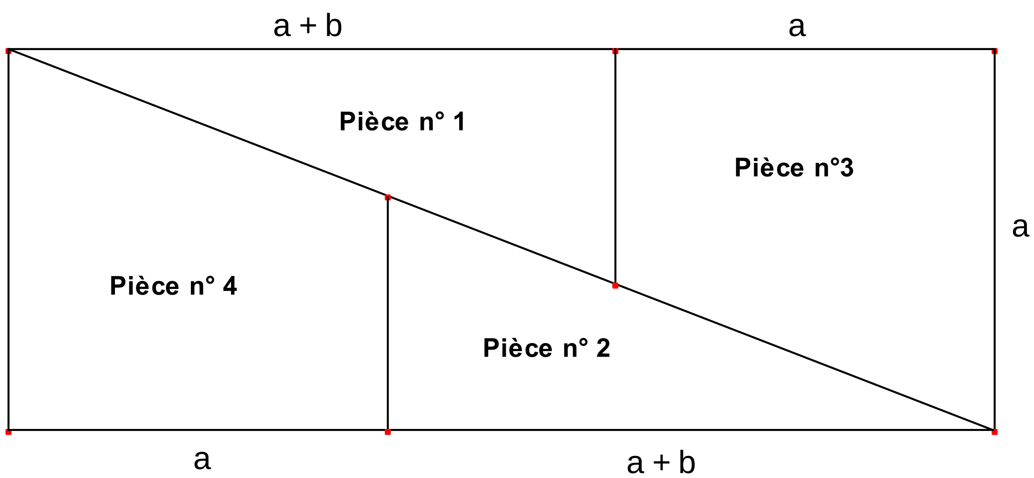



Dans un carré de côté $c$, on construit un puzzle de quatre pièces comme tracé ci-dessus.

On a donc $c = a + b$.

On essaie alors d'assembler les quatre pièces en un rectangle comme tracé ci-dessous.

Le rectangle souhaité aura donc pour longueur $L = 2a + b$ et pour largeur $l = a$.



1. a. Reproduire les deux dessins avec $a = 5$ cm et $b = 3$ cm.
   b. Le puzzle est-il exact (c'est-à-dire à l'aide des pièces du carré initial, assemble-t-on exactement un rectangle) ? Justifiez votre réponse.

2. On suppose dans cette question que le puzzle est exact.
   a. Trouver une relation liant $a$ et $b$. On pourra raisonner sur l'aire du rectangle à reconstituer.
   b. Déterminer quelle(s) valeur(s) peut alors prendre le quotient $\frac{a}{b}$.

*Les mathématiciens ont montré qu'il n'existe pas de solution exacte au puzzle si on veut que les côtés soient tous les nombres entiers.*

3. On recherche donc des couples $a, b$ d'entiers pour lesquels le puzzle est satisfaisant visuellement sans être parfaitement exact.
   Une solution $a, b$ est dite « presque exacte » si $a^2 - ab - b^2$ vaut 1 ou $-1$.
   a. Le puzzle réalisé en question 1.a est-il presque exact ?
   b. Démontrer que si $a, b$ est une solution presque exacte, alors $a + b, a$ est aussi une solution presque exacte.
   c. Trouver ainsi quelques solutions presque exactes.

# Exercice académique 4 Une corde tout autour de la Terre

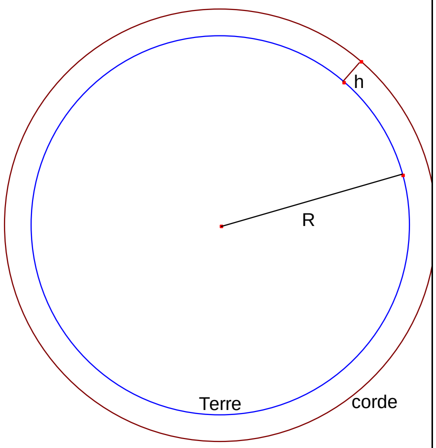



Fig.1

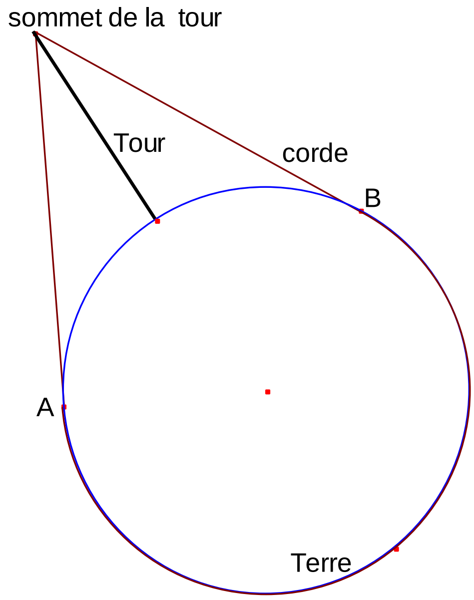



Fig.2

Dans cet exercice, on estimera la circonférence de la Terre à 40 000 km.

On tend une corde tout autour de la Terre (celle-ci est supposée ici parfaitement sphérique).

<u>Question 1 (cf Fig.1)</u>

De quelle longueur faut-il allonger la corde pour pouvoir à présent la fixer au sommet de piquets d'un mètre de haut répartis tout autour de la Terre (on suppose que la forme de la corde reste circulaire).

<u>Question 2 (cf Fig.2)</u>

La corde ayant été ainsi rallongée, on décide de supprimer les piquets et de tendre à nouveau la corde autour de la terre. On arrime alors la corde au sommet d'une tour. Quelle est la hauteur de la tour, sachant qu'aux points de contact A et B, la corde est tangente au cercle ?

<u>Indications pour la question 2</u> : on notera $O$ le centre du cercle, $S$ le sommet de la tour et $\theta$ la moitié de l'angle au centre $AOB$.

a) Calculer la longueur de chacun des deux segments $AS$ et $SB$ en fonction de $\theta$.

b) Calculer en fonction de $\theta$ la longueur de l'arc de cercle d'extrémités A et B où la corde reste en contact avec la terre.

c) En déduire une équation vérifiée par l'angle $\theta$.

d) On admettra que l'angle $\theta$ est suffisamment petit pour utiliser l'approximation : $\tan\theta - \theta \approx \dfrac{\theta^3}{3}$.

En déduire, à l'aide de votre calculatrice, une valeur approchée de l'angle $\theta$ et finir l'exercice.

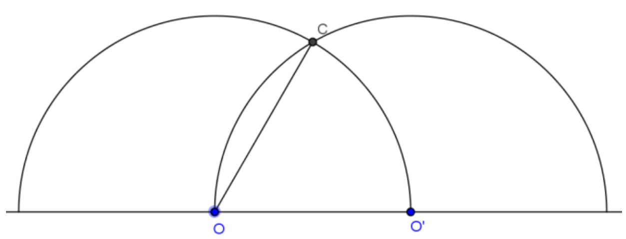
# CORRECTION OLYMPIADES ACADEMIE DE BESANÇON 2011

## Exercice national 1 : Essuie-glaces

**<u>Eléments de correction (proposés par l'Académie de Corse)</u>**

1) L'aire demandée en $\text{cm}^2$ est $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}(\pi.60^2 - \pi.15^2) = \dfrac{\pi}{2}15^2(4^2-1) = \dfrac{\pi}{2}15^3 = \dfrac{3375.\pi}{2}$ soit en valeur approchée 5301 $\text{cm}^2$ .

2) Soit $C$ l'intersection des deux demi-cercles. Calculons L'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur $R$, et donc de hauteur $R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ :




$A_1 = \dfrac{1}{2}\left(R \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $O'OC$ de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$ : $A_2 = \dfrac{\pi R^2}{6}$ .

Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\overset{\frown}{OC}$ sera : $A_2 - A_1$.

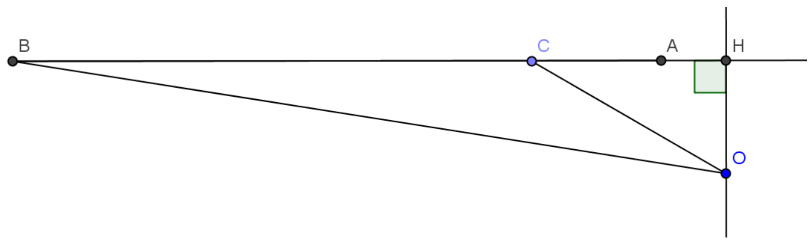
L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A = A_2 + A_2 - A_1 = 2A_2 - A_1$

Donc $A_3 = \dfrac{\pi}{3}R^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon $R$ privée de $A_3$ soit

$$\mathcal{A} = \pi R^2 - \left(\frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2 \quad \text{et donc} \quad \boxed{\mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2}$$

3)




***a)*** $\sin\widehat{OCH} = \sin 30° = \dfrac{1}{2}$ donc

$\dfrac{OH}{OC} = \dfrac{1}{2}$ soit $OH = \dfrac{1}{2}a\sqrt{3}$.

De même $\dfrac{HC}{OC} = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

donc $HC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3} = \dfrac{3}{2}a$.

Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en $H$ on a

$$OA^2 = HA^2 + HO^2 = \ HC - CA\ ^2 + HO^2 = \left(\frac{3}{2}a - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2 \ .$$

Ainsi $OA = OC$ et donc $\boxed{\text{le triangle } AOC \text{ est isocèle.}}$

***b)*** L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180 - \widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le triangle $MOP$ est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX} = 2\times 30 = 60°$ . Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180-60= $\boxed{120°.}$

La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MN] et [M'N'] et les arcs $\widehat{MM'}$ et $\widehat{NN'}$. Soient T et T' les intersections du cercle de centre O passant par M et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points M, T, N ont respectivement pour images M', T' et N', et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par [MN], [NT] et l'arc $\widehat{MT}$ a la même aire que celle limitée par [M'N'], [N'T'] et l'arc $\widehat{M'T'}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMP et OM'P' sont isométriques.

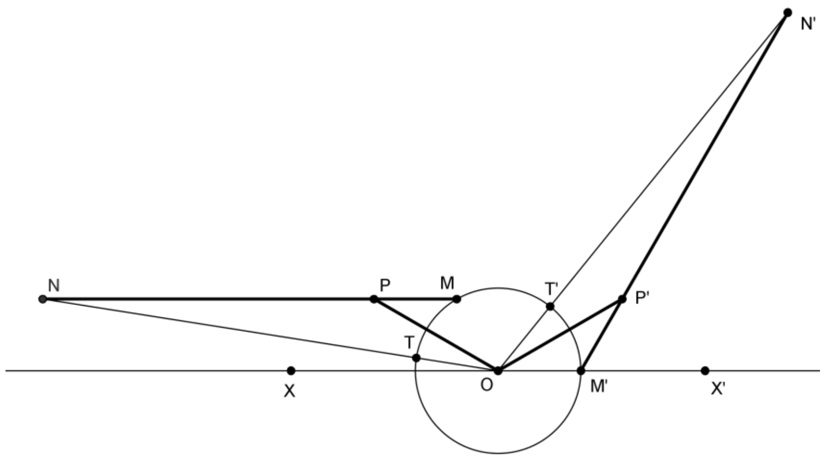
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [NT] et [N'T'] et les arcs de cercle $\widehat{NN'}$ et $\widehat{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\ \pi.ON^2 - \pi.OT^2\ = \frac{\pi}{3}\ OB^2 - OA^2$

Or, $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 +\ HC + CB\ ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \frac{\pi}{3}\ 31a^2 - a^2\ = \frac{\pi}{3}\times 30a^2 = 10\pi a^2$ $\boxed{\mathcal{A} = 10\pi a^2}$



# Exercice national 2 : Le singe sauteur

**Eléments de correction (proposés par l'académie de Montpellier)**

Le nombre 4 est atteignable car 1+2-3+4=4.

Le singe n'a le choix : 1+2-3+4 et … il est bloqué !!

Le nombre 9 est atteignable car on a 1+2+3-4+5-6+7-8+9=9, sans jamais sortir de l'intervalle [0 ; 9].

Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner 1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0 ; 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$$1+2+3+\ldots+n-(n+1)+(n+2)-(n+3)+(n+4)\ldots-(n^2-1)+n^2=\frac{n(n+1)}{2}+1+1+1+\ldots+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2-n}{2}=n^2$$

d'où $n^2$ est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle [0 ; $n^2$].

Si le nombre $n$ est atteignable, il existe des $a_i$ valant 1 ou -1 telles que

$1+2a_2+3a_3+\ldots+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme $S_+$ des termes négatifs dont on note la somme $S_-$ . On a alors : $S_+=S_-$ On calcule ensuite :

$1+2+3+\ldots+(n-1)= S_+-S_-=2\ S_+$

On en déduit que : $\dfrac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit *n(n-1).*

Donc $n$ est de la forme $4k$ ou $4k+1$. Par exemple 18 n'est pas atteignable.

La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

L'idée est de transformer une configuration de signes + - en - +, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4) et l'on trouve N+4. On note S(i) la somme partielle des *i*-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par -(N-1)+ N. La séquence commence par 1+2+3 et le premier signe – apparaît en position i+1. Alors S(i-1) ≥ i, car S(3) ≥ 4. On change alors la sous-séquence i-(i+1) en –i+(i+1), ce qui est possible. On ajoute la séquence -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4), ce qui assure que N+4 est atteignable.

Question subsidiaire : est-il vrai que les nombres de la forme N=4k ou 4k+1, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

# Exercice académique 3 : L'énigme du puzzle

….

Le carré a pour aire $8\times 8=64$ alors que le rectangle a pour aire $13\times 5=65$ : le puzzle ne peut donc être exact.

Si on veut que le puzzle soit exact, il faut au moins déjà que la condition d'aire soit respectée. Or le carré aura pour aire $A_1=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ et le rectangle pour aire $A_2=(2a+b)\times a=2a^2+ab$. L'égalité $A_1=A_2$ donnera après simplification : $\boxed{a^2-ab-b^2=0}$.

Divisons l'équation précédente par $b^2$ (ce qui est évidemment possible car $b^2\neq 0$. Il vient : $\frac{a^2}{b^2}-\frac{ab}{b^2}-\frac{b^2}{b^2}=0$ soit

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)-1=0$.

Notons *x* le nombre $\frac{a}{b}$ ; il vérifie donc $x^2-x-1=0$ et il est positif car les nombres *a* et *b* sont positifs. En résolvant cette équation du second degré, on trouve pour seule solution positive $\boxed{x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ : c'est le fameux **nombre d'or**.

Oui, le puzzle donné est presque exact car $\left|5^2-5\times 3-3^2\right|=1$.

Si $(a,b)$ est une solution presque exacte, on a $a^2-ab-b^2=1 \text{ ou } -1$.

Or $(a+b)^2-(a+b)a-a^2=a^2+2ab+b^2-a^2-ab=-a^2+ab+b^2$

et donc $(a+b)^2-(a+b)a-a^2=-(a^2-ab-b^2)=1 \text{ ou -1}$, ce qui montre que le couple $(a+b,a)$ est aussi une solution presque exacte.

On note que le couple $(a=5, b=3)$ donné en question 1 est une solution presque exacte.

Pour réaliser un puzzle presque exact (et de plus en plus précis), on pourra prendre comme autres valeurs obtenues successivement à partir de $(a=5, b=3)$ en remplaçant $a$ par $a+b$ et $b$ par $a$ :

$\boxed{(8,5)\ ,\ (13,8)\ ,\ (21,13)\ ,\ (34,21)\ ,\ldots}$

Les nombres 3, 5, 8, 13, 21, 34… sont les **nombres de Fibonacci**

On peut montrer que les seules solutions presque exactes du problème du puzzle sont obtenues en prenant deux termes consécutifs de cette suite.

# Exercice académique 4 : Une corde autour de la terre

Question 1

En notant R le rayon terrestre (exprimé en mètres), $\ell_1$ la longueur de la corde initiale et $\ell_2$ la longueur de la corde finale, il vient :

$\ell_2-\ell_1=2\pi(R+1)-2\pi R=2\pi$ .soit environ $6,28$ mètres.

Question 2

On expime ici $\theta$ en radians.

a. En utilisant la trigonométrie dans les triangles OAS et OBS, il vient $\tan\theta = \frac{AS}{OA} = \frac{BS}{OB}$ et comme $OA = OB = R$, on obtient finalement :

$\boxed{AS = BS = R\tan\theta}$

b. Comme on a exprimé $\theta$ en radians, la formule de la longueur d'un arc $\ell = r\alpha$ donne ic, comme le rayon est R et l'angle associé au grand arc $AB$ est $2\pi - 2\theta$, on obtient don pour longueur de cet arc :

$\boxed{\ell(\widehat{AB}) = (2\pi - 2\theta)R}$

c. Il s'ensuit que la longueur $\ell_2 = 2\pi(R+1)$ de la corde (après allongement) s'écrit aussi comme la somme de $(2\pi - 2\theta)R$ pour la partie qui va coller à la terre et de $2R \times \tan\theta$ pour la partie constituée des segments $AS$ et $SB$.

D'où l'égalité : $2\pi(R+1) = (2\pi - 2\theta)R + 2R \times \tan(\theta)$, d'où il résulte que $\boxed{\tan\theta - \theta = \frac{\pi}{R}}$ (1).

d. En utilisant l'approximation donnée par l'énoncé, il vient $\frac{\theta^3}{3} \approx \frac{\pi}{R}$ soit $\theta \approx \sqrt[3]{\frac{3\pi}{R}}$ soit $\theta \approx 0.0114$.

En notant *x* la hauteur de la tour, il vient, en raisonnant dans le triangle SOA : $\cos\theta = \frac{OA}{OS} = \frac{R}{x+R}$ d'où

$x = R\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)$ et donc

après calcul $x \approx 413$. La hauteur de la tour est donc d'environ $\boxed{\text{413 mètres}}$

Remarque : en passant par la résolution à l'aide d'un logiciel de calcul numérique (Maple, Mathematica, …) de l'équation (1) sans tenir compte du développement limité de tan, on obtient une hauteur de tour d'environ $\boxed{\text{413.48 mètres}}$