OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE D'AMIENS 2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Olympiades nationales de mathématiques

Académie d'Amiens

Mercredi 11 mars 2020 de 8h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

Première générale spécialité mathématiques

Énoncés de la deuxième partie de 10h10 à 12h10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.** Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

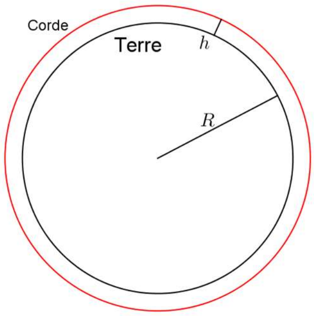
Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

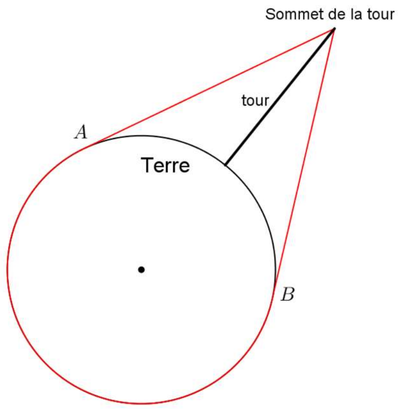
<u>Préambule :</u> Soit $k \in \mathbb{R}$, on admettra que la solution de l'équation d'inconnue réelle x , $x^3 = k$ est $x = k^{\frac{1}{3}}$.



On estime que la circonférence de la Terre est de 40 000 km.
On note R le rayon de la Terre, exprimé en kilomètres.
On tend une corde tout autour de la Terre supposée parfaitement sphérique.

1. De quelle longueur faut-il rallonger la corde pour pouvoir la fixer au sommet de piquets de hauteur h, répartis tout autour de la Terre ? (on suppose que la forme de la corde reste circulaire).

2. On suppose que les piquets utilisés mesurent 2 m de haut. Quelle est la longueur de la corde utilisée ?



3. La corde ayant été ainsi rallongée, on décide de supprimer les piquets et de tendre à nouveau la corde autour de la Terre. On arrime alors la corde au sommet d'une tour. On cherche la hauteur de la tour, sachant qu'aux points de contact A et B, la corde est tangente au cercle.
On note O le centre du cercle représentant la Terre, S le sommet de la tour et θ l'angle $\widehat{BOS}$.

   a. Calculer la longueur des segments $[AS]$ et $[SB]$ en fonction de θ.

   b. Calculer en fonction de θ la longueur de la corde correspondant à l'arc de cercle d'extrémités A et B.

   c. En déduire que $\tan(\theta) = \theta + \frac{2\pi}{R}$.

   d. On admet que θ est suffisamment petit pour vérifier l'approximation : $\tan(\theta) - \theta \approx \frac{\theta^3}{3}$.
   En déduire une valeur approchée de l'angle θ à 10^{-3} près.

   e. Déterminer une approximation de la hauteur de la tour au mètre près.

Exercice académique 2

« Les trois pik »

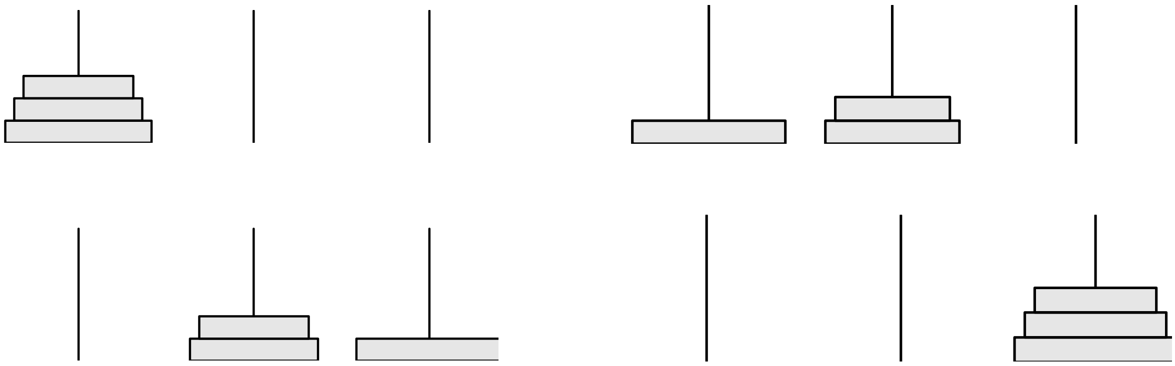
Considérons trois piquets avec socle, numérotés 1, 2 et 3, et n disques troués en leur milieu, tous de tailles différentes. On suppose que les n disques sont empilés initialement sur le piquet 1 par ordre décroissant de taille (le plus grand des disques se trouve donc tout en bas de la pile). On cherche à déplacer les n disques du piquet 1 au piquet 3 en respectant les règles suivantes :
- un seul disque peut être déplacé à la fois sur un autre piquet ;
- un disque ne peut pas être placé sur un disque de taille plus petite que lui.
On note T_n le nombre minimal de mouvements pour déplacer une tour de n disques du piquet 1 au piquet 3.

Partie A : Quelques exemples

1. Vérifier que $T_1 = 1$ et $T_2 = 3$.
2. En détaillant, calculer T_3.

Partie B : Une formule de récurrence

Pour résoudre le problème, il est nécessaire dans un premier temps de déplacer les $n-1$ premiers disques du piquet 1 au piquet 2, en un nombre minimal de mouvements. Le disque le plus grand pourra ainsi être déplacé sur le piquet 3. Il restera alors à déplacer les $n-1$ autres disques du piquet 2 au piquet 3, avec un nombre de déplacements minimal.



1. À l'aide des informations précédentes, en déduire une expression de T_n en fonction de T_{n-1}.
2. En déduire les valeurs de T_4, T_5, T_6 et T_7.
3. Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de la suite (T_n) ?

On remarque qu'il peut être rapidement fastidieux de calculer des termes de la suite (T_n) pour des valeurs de n assez élevées. Nous allons donc chercher une formule plus simple, dite explicite, afin de répondre à une problématique donnée sur un temps de résolution pour un nombre de disques n donné.

Partie C : Temps de résolution

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $U_n = T_n + 1$.

1. Déterminer la nature de la suite (U_n).
2. En déduire une expression de U_n en fonction de n, puis de T_n en fonction de n.
3. Si l'on suppose que le déplacement d'un disque est réalisé en une seconde, combien de temps, exprimé en années, faudra-t-il pour résoudre le problème avec une tour de 32 disques ? On arrondira au nombre entier supérieur.

Partie D : Une question d'algorithmique

1. On note i le numéro du piquet de départ, j le numéro du piquet d'arrivée, k le numéro du piquet non utilisé. Que vaut i + k + j ?
2. Quel est le rôle de la fonction Python suivante ?

```
def pik(n, i, j):
   if n == 1:
      print("Déplacement de ", i, " vers ", j)
   else:
      k = 6 - i - j
      pik(n-1, i, k)
      print("Déplacement de ", i, " vers ", j)
      pik(n-1, k, j)
```

Olympiades nationales de mathématiques

Académie d'Amiens

Mercredi 11 mars 2020 de 8h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

Premières <u>autres</u> que la première générale spécialité mathématiques

<u>Énoncés de la deuxième partie de 10h10 à 12h10</u>

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.** Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

Les triangles équilibrés de Steinhaus

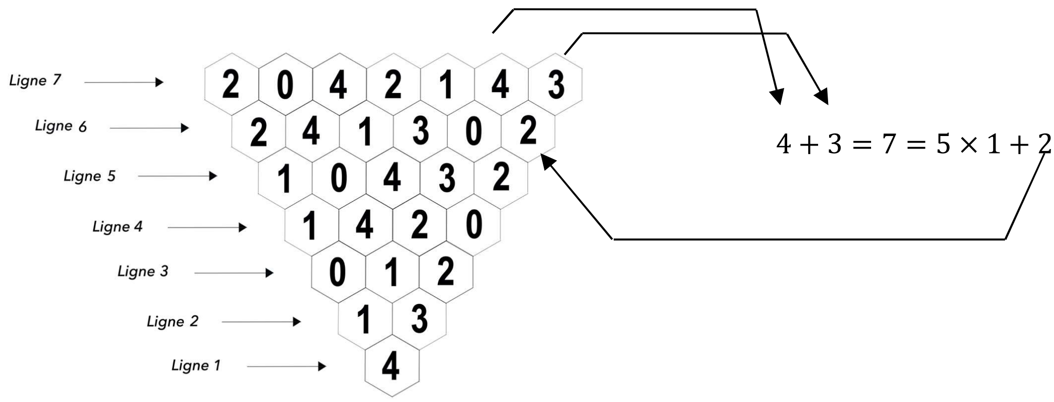
Définitions préalables

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit n un entier naturel non nul.

- On note S l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et $m-1$.
  Autrement dit : $S = \{0; 1; \dots ; m-1\}$.
- Un **triangle de Steinhaus de taille** n **modulo** m est construit de la manière suivante, comme précisé sur l'exemple :
  - La ligne du haut, notée Ligne n, est une succession de n cases placées côte-à-côte contenant chacune un élément appartenant à S. Ces éléments ne sont pas forcément des nombres distincts.
  - Puis, sous chaque paire de cases voisines contenant chacune un nombre de S, on place comme illustré ci-dessous une autre case contenant le reste de la division euclidienne de la somme de ces deux nombres par m.
  - On réitère cette opération pour chaque nouvelle ligne ainsi constituée, jusqu'à la Ligne 1 qui ne comporte qu'une case.
- Le **nombre** de cases constituant un **triangle de Steinhaus de taille** n est noté T_n.
- Un **triangle de Steinhaus de taille** n **modulo** m est dit **« équilibré »** lorsqu'il contient chacun des éléments de l'ensemble S à parts égales.

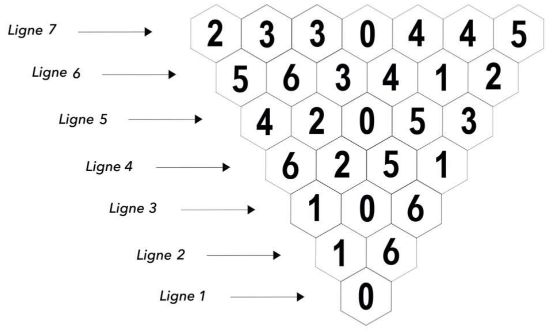
Exemples :

- Pour le triangle de Steinhaus de taille 7 modulo 5 ci-dessous, $T_7 = 28$.



Ce triangle de Steinhaus n'est pas « **équilibré** » car il contient 7 fois le nombre 2 et 5 fois le nombre 0.

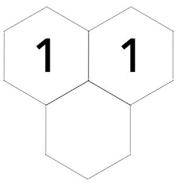
☞ Par contre, le triangle de Steinhaus de taille 7 modulo 7 ci-dessous est bien « **équilibré** ». En effet, il possède exactement 4 fois chacun des nombres de 0 à 6.



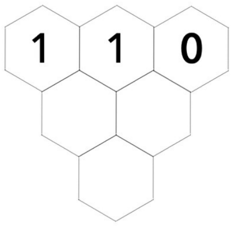
<u>Partie 1</u> : Prise en main des triangles de Steinhaus.

1. Compléter les **triangles de Steinhaus ci-dessous** pour des valeurs de *n* et de m données.

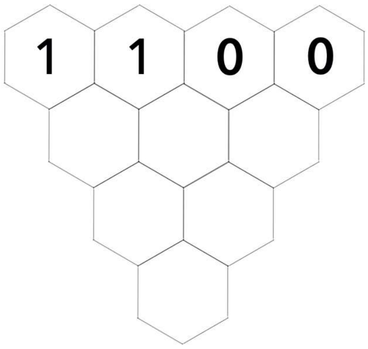
Triangle T_A
$m = 2$
n=2



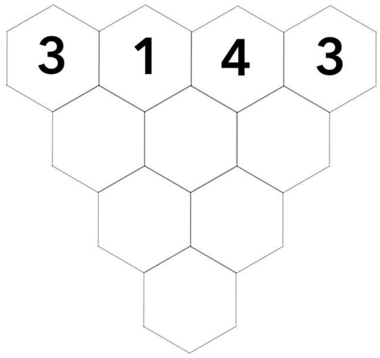
Triangle T_B
$m = 2$
n=3



Triangle T_C
$m = 2$
n=4

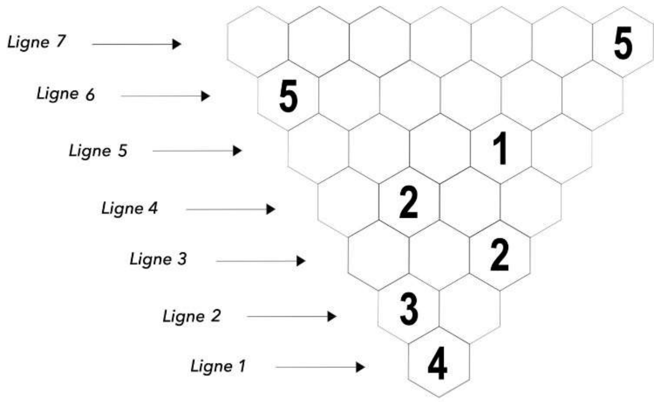


Triangle T_D
$m = 5$
n=4



2. Parmi ceux-ci, lesquels sont « **équilibrés »** ?

3. Compléter ce **triangle de Steinhaus de taille 7 modulo 6** :



4. Justifier qu'un triangle de Steinhaus est entièrement défini par la donnée d'un élément par ligne.

Partie 2 : **Equilibré et rester équilibré … Est-ce possible ?**

Dans cette partie, l'entier naturel *m* est égal à 2.

Soit n un entier naturel non nul.
On émet alors les conjectures suivantes :

- ☞ *C1 : tout **triangle de Steinhaus de taille** $n+1$ **« équilibré »** est obtenu à partir d'un **triangle de Steinhaus de taille** n **« équilibré »** auquel on a rajouté une ligne au-dessus de la Ligne n.*
- ☞ *C2 : tout **triangle de Steinhaus de taille** n **« équilibré »** peut être étendu d'une ligne au-dessus de la Ligne n pour former un nouveau **triangle de Steinhaus de taille** $n+1$ lui-même **« équilibré »**.*

1. Existe-t-il un triangle « **équilibré** » si $n = 2$?
2. **a.** Donner les 8 **triangles de Steinhaus de taille** $n = 3$.
   b. Lesquels sont « **équilibrés** » ?
3. **a.** Parmi les triangles « **équilibrés** » de taille 3, lesquels peuvent-être étendus d'une ligne au-dessus de la Ligne 3 pour obtenir un **triangle de Steinhaus « équilibré » de taille 4**.
   b. Un **triangle de Steinhaus de taille 4 « équilibré »** est-il nécessairement l'extension d'un t**riangle de Steinhaus de taille 3 « équilibré »** ?
4. Conclure quant aux conjectures *C1* et *C2* émises précédemment.

Exercice académique 2

L'addition martienne

Une calculatrice dispose d'une touche $\oplus$ qui, pour deux nombres a et b donnés, donne le nombre noté $a \oplus b$ et égal à $a + b + ab$.
Ainsi : $3 \oplus 5 = 23$.
Cette calculatrice fonctionne de la manière suivante : chaque fois que l'on introduit un nombre, elle calcule le résultat de l'opération $\oplus$ de ce nombre avec le nombre précédemment affiché, et affiche le nouveau résultat.
Pour la mise en marche, la calculatrice affiche 0.

1. Un utilisateur entre successivement les trois nombres 5 ; 10 et 20. Quel est le dernier résultat affiché par la calculatrice ?
2. Un utilisateur entre successivement les quatre nombres 3 ; 8 ; 8 et 100. Quel est le dernier résultat affiché par la calculatrice ?
3. Justifier que dès que l'on entre la valeur -1, le résultat obtenu est -1; et que réciproquement, le résultat -1 ne peut être obtenu qu'après avoir entré la valeur -1.
4. Montrer que pour tout nombre a entré différent de -1, le résultat 0 ne peut être obtenu qu'avec un seul nombre b que l'on exprimera en fonction de a.
5. Un utilisateur introduit successivement quatre nombres entiers naturels a, b, c et d tels que $a \leq b \leq c \leq d$.
   - **a.** Montrer que le dernier résultat affiché par la calculatrice peut s'écrire sous la forme :
     $$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) - 1.$$
     On pourra utiliser l'égalité $a + b + ab = (a+1)(b+1) - 1$.
   - **b.** Sachant que la calculatrice affiche le résultat 2020, déterminer les nombres a, b, c et d introduits par l'utilisateur.
   - **c.** Que peut-on dire des quatre nombres a, b, c et d si le résultat affiché par la calculatrice est 2026 ?
   - **d.** Quel nombre entier naturel doit-on entrer quatre fois de suite pour obtenir un résultat égal à 9 999 ?

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

AMIENS 2020

Exercice 1

Une corde autour de la Terre

1. De façon générale, la circonférence C_0 d'une boule de rayon R est donnée par la formule : $C_0 = 2\pi R$.

La circonférence C_h d'une boule de rayon $R+h$ est : $C_h = 2\pi\left(R+h\right) = 2\pi R + 2\pi h = C_0 + 2\pi h$.

L'écart entre les deux circonférences est donc : $C_h - C_0 = 2\pi h$. Il ne dépend pas du rayon R mais uniquement de h. Pour pouvoir fixer la corde autour de piquets de hauteur h, il faut rallonger la corde d'une longueur égale à $2\pi h$.

2. Si les piquets sont hauts de 2 mètres, c'est-à-dire 0,002 kilomètre, la longueur de la corde rallongée est :

$C_{0,002} = 40000 + 2\pi \times 0,002 = 40000 + 0,004\pi = 40000,01257$ km (à un centimètre près).

NB. Dans toute la suite, la notation R désignera le rayon de la Terre, c'est-à-dire que : $R = \dfrac{40000}{2\pi} = \dfrac{20000}{\pi}$.

3. *Analyse préalable de la figure*

Les droites (AS) et (BS) sont les tangentes respectivement en A et en B au cercle de centre O passant par A et B. La tangente en un point d'un cercle de centre O étant la droite passant par ce point et perpendiculaire au rayon, les angles $\widehat{OAS}$ et $\widehat{OBS}$ sont droits, les triangles OAS et OBS sont rectangles en A et en B respectivement. Le point O étant équidistant des droites (AS) et (BS), il appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{ASB}$. Les angles $\widehat{ASO}$ et $\widehat{BSO}$ sont égaux. Les triangles rectangles OAS et OBS ayant deux angles homologues égaux et deux côtés homologues de même longueur ($OA = OB$) sont superposables.

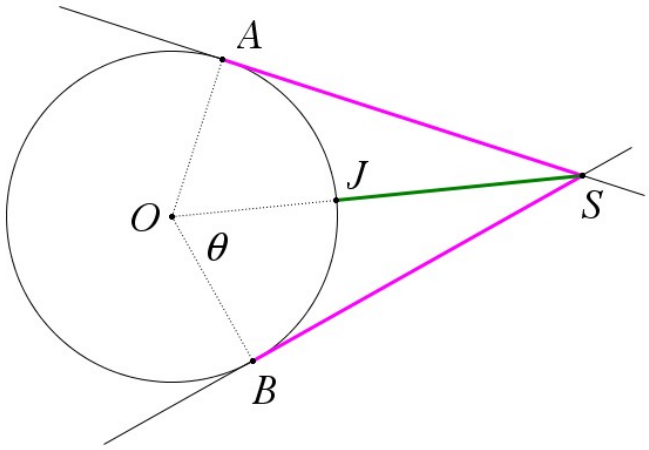
En conséquence : $SA = SB$ et $\widehat{AOS} = \widehat{BOS}$.

3.a. Le segment [BS] est le côté opposé à l'angle $\widehat{BOS}$ dans le triangle BOS, rectangle en B.

Donc : $BS = OB \times \tan \widehat{BOS} = R.\tan\theta$

Retenons que $AS = BS = R\tan\theta$

La figure a été complétée. S désigne le sommet de la tour, O le centre de la Terre, J est le pied de la tour, intersection de [OS] avec le petit arc de cercle d'extrémités A et B.



3.b. Les points A et B délimitent sur le cercle deux arcs. L'un, le petit arc, est intercepté par l'angle saillant $\widehat{AOB}$. L'autre, le grand arc, est intercepté par l'angle rentrant $\overset{\vee}{AOB}$.

Les angles $\widehat{BOS}$ et $\widehat{AOS}$ ayant tous deux pour mesure θ, l'angle saillant $\widehat{AOB}$ a pour mesure 2θ et l'angle rentrant $\overset{\vee}{AOB}$ a pour mesure $2\pi - 2\theta$.

La longueur du grand arc d'extrémités A et B (c'est de lui dont il est question ici) est égale à $(2\pi - 2\theta)R$ et celle du petit arc d'extrémités A et B est égale à $2\,R\,\theta$.

NB : L'angle θ est exprimé en radians.

3.c. NB. Dans cette question, il faut lire : « En déduire que $\tan\theta = \theta + \dfrac{\pi h}{R}$ »

La longueur de la corde se calcule de deux façons :

- C'est $2\pi(R+h)$ d'après la question **1**.
- C'est aussi la somme : (longueur du grand arc AB) + AS +BS c'est-à-dire : $(2\pi - 2\theta)R + 2R\tan\theta$

On en déduit la relation : $2\pi(R+h) = (2\pi - 2\theta)R + 2R\tan\theta$ autrement dit : $\pi h + R\theta = R\tan\theta$.

Et on obtient comme indiqué : $\tan\theta = \theta + \dfrac{\pi h}{R}$

3.d. En utilisant l'approximation fournie par l'énoncé : $\theta^3 \approx \dfrac{3\,\pi\,h}{R}$ et donc : $\theta \approx \left(\dfrac{3\,\pi\,h}{R}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{3\,\pi\,h}{R}}$ (la fonction « puissance un tiers » est la fonction racine cubique)

Une calculatrice nous indique que $\theta \approx 0{,}01436$ radians à 10^{-5} près.

Une approximation à 10^{-3} près semble discutable si l'on veut conserver une précision acceptable des calculs « au mètre près » sur la hauteur de la tour.

Pour information, on peut cependant dire qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de cet angle, exprimé en degrés, est 0,823. Mais c'est bien le radian qui est l'unité adaptée au contexte.

©Le rayon r de la Terre exprimé en km est égal à $\frac{20000}{\pi}$

Define $r=\frac{20000}{\pi}$ — *Terminé*

©La hauteur h des piquets est égale à 0,002 km

Define h=0.002 — *Terminé*

©Valeur approchée de l'angle thêta exprimé en radians (noté ici t)

Define $t=\sqrt[3]{\frac{3\cdot\pi\cdot h}{r}}$ — *Terminé*

t — 0.014359533

©Il s'agit de la valeur en radians. Voici pour information sa valeur en degrés :

$\frac{t\cdot 180}{\pi}$ — 0.822740669

3.e. Le segment $[OS]$ est l'hypoténuse du triangle rectangle BOS et par conséquent : $OS = \dfrac{OB}{\cos\theta} = \dfrac{R}{\cos\theta}$. La hauteur x de la tour représente la différence JS entre OS et le rayon de la Terre :

$$x = \frac{R}{\cos\theta} - R = R \times \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)$$

©La hauteur h des piquets est égale à 0,002 km

Define h=0.002 — *Terminé*

©Valeur approchée de l'angle thêta exprimé en radians (noté ici t)

Define $t=\sqrt[3]{\frac{3\cdot\pi\cdot h}{r}}$ — *Terminé*

t — 0.0143595336

©Il s'agit de la valeur en radians. Voici pour information sa valeur en degrés :

$\frac{t\cdot 180}{\pi}$ — 0.8227406695

Define $x=r\cdot\left(\frac{1}{\cos(t)}-1\right)$ — *Terminé*

x — 0.6563992982

$2\cdot r\cdot t$ — 182.8312599

Une calculatrice indique qu'une valeur approchée à 1 m près de la hauteur de la tour est **656 mètres**.

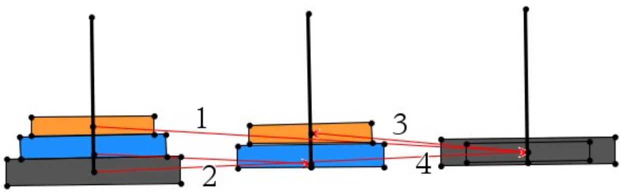
Pour information, nous avons calculé la longueur du petit arc AB : 183 km environ. La corde imaginaire devrait être fixée au sol en deux points distants de 183 km et, au milieu, fixée en haut d'une tour haute de 656 mètres.

Exercice 2 : « Les trois pik »

Partie A : Quelques exemples

1. S'il n'y a qu'un seul disque, il suffit de le déplacer du piquet 1 au piquet 3 (un seul déplacement). S'il y a deux disques, on déplace le plus petit sur le piquet 2, le plus grand sur le piquet 3, puis le plus petit du piquet 2 au piquet 3 (trois déplacements).

2. En un minimum de trois déplacements nous pouvons amener les deux plus petits disques sur le piquet numéro 2 et un quatrième déplacement permet de déplacer le plus grand disque sur le piquet numéro 3. Cet état intermédiaire est illustré ci-contre.



Il reste à transférer les deux plus petits disques sur le piquet numéro 3, ce qui nécessite au minimum trois déplacements : le plus petit disque sur le piquet numéro 1, le disque moyen sur le grand disque puis le plus petit disque sur le disque moyen.

En tout, il a fallu au minimum 7 déplacements pour réaliser l'opération : $T_3 = 7$

Partie B : Une formule de récurrence

1. Pour transférer les $(n-1)$ plus petits disques sur le piquet numéro 2, il faut par hypothèse au minimum T_{n-1} déplacements. Ensuite, on transfère le plus grand disque sur le piquet numéro 3 (à compter : un déplacement de plus). Enfin, on transfère les $(n-1)$ plus petits disques sur le piquet numéro 3, au dessus du plus grand disque en utilisant le piquet numéro 1 comme relais, et cette opération nécessite au minimum T_{n-1} déplacements.

On en déduit la relation de récurrence : $T_n = 2.T_{n-1} + 1$.

2. Utilisons un tableur pour résoudre cette question. Nous avons généré la suite définie par la relation de récurrence précédente. Résultats à lire ci-contre.

A num	B depla	C
=seq(n,n,1,10)	=seqgen(2*u(n−1)+1,n,u,{1,10},{1}	
1	1	
2	3	
3	7	
4	15	
5	31	
6	63	
7	127	
8	255	
9	511	
10	1023	

3. La conjecture attendue est que cette suite est une suite strictement croissante. Si on augmente le nombre de disques, il serait d'ailleurs bien étonnant que moins de mouvements soient nécessaires pour transférer plus d'objets !

Il est possible même, avec un brin d'observation, de conjecturer quelle est l'expression de T_n en fonction de n. Cependant, ménageons le suspense.

Partie C : Temps de résolution

1. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier n strictement positif par $U_n = T_n + 1$.

Pour un tel entier n :

- Expression du terme de la suite (U_n) de rang $n+1$: $U_{n+1} = T_{n+1} + 1$
- Mise en œuvre de la relation de récurrence dont on dispose : $U_{n+1} = (2T_n + 1) + 1 = 2T_n + 2 = 2(T_n + 1)$
- Conclusion : $U_{n+1} = 2U_n$

La suite (U_n) est une suite géométrique de raison 2.

2. Le premier terme de la suite (U_n) est $U_1 = T_1 + 1 = 2$

On sait que l'expression du terme de rang n d'une suite géométrique (u_n) de premier terme u_1 et de raison q est : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. Dans le présent contexte : $U_n = U_1 \times 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

Et par conséquent : $T_n = U_n - 1 = 2^n - 1$ (formule compatible avec les résultats obtenus au tableur).

3. En particulier : $T_{32} = 2^{32} - 1$ soit 4 294 967 295 secondes.

Sachant qu'il y a 86 400 secondes dans une journée et 31 536 000 secondes dans une année de 365 jours, le temps nécessaire à l'opération, exprimé en années, est le quotient $\dfrac{4294967295}{31536000}$.

Une calculatrice nous indique que $136{,}1 < \frac{4\,294\,967\,295}{31\,536\,000} < 136{,}2$. Il faudrait un peu plus de 136 ans pour réaliser l'opération et « l'arrondi à l'unité » de ce nombre au sens mathématique de cette notion est 136.

Cependant, l'énoncé demande « d'arrondir au nombre d'années supérieur ».

La réponse attendue est donc **137 ans**. (En 136 ans, l'énoncé considère que l'opération n'est pas encore achevée !)

Le lecteur pourra vérifier, s'il le souhaite, que la prise en compte de 33 ou 34 jours complémentaires relatifs aux années bissextiles ne change pas le résultat.

Partie D : Une question d'algorithmique

1. Les nombres *i, j, k* prennent, dans un ordre ou dans un autre, les valeurs 1, 2 et 3. Leur somme est donc égale à 6 : $i + j + k = 6$

Cette relation permet d'exprimer le numéro du piquet non utilisé en fonction de ceux utilisés : $k = 6 - i - j$, relation dont on remarque l'emploi dans l'écriture de l'algorithme qui suit.

2. L'algorithme proposé semble détailler, pour une valeur de *n* donnée, quels sont les déplacements à réaliser pour transférer les *n* disques de la colonne *i* à la colonne *j*. Ci-dessous, transfert de 3 puis 4 disques de la colonne 1 à la colonne 3.

`>>> def pik(n,i,j):`
`if n == 1:`
`print(i,j)`
`else:`
`k = 6-i-j`
`pik(n-1,i,k)`
`print(i,j)`
`pik(n-1,k,j)`
	`>>> pik(3,1,3)`
	`1 3`
	`1 2`
	`3 2`
	`1 3`
	`2 1`
	`2 3`
	`1 3`
		`>>> pik(4,1,3)`
		`1 2`
		`1 3`
		`2 3`
		`1 2`
		`3 1`
		`3 2`
		`1 2`
		`1 3`
		`2 3`
		`2 1`
		`3 1`
		`2 3`
		`1 2`
		`1 3`
		`2 3`