SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'AMIENS

Classes de première S • 2016

Olympiades académiques de mathématiques

Académie d'Amiens

Mercredi 16 mars de 8 heures à 12 heures 10

- Pause de 10 heures à 10 heures 10

Série S

<u>Énoncés de la deuxième partie de 10 heures 10 à 12 heures 10</u>

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

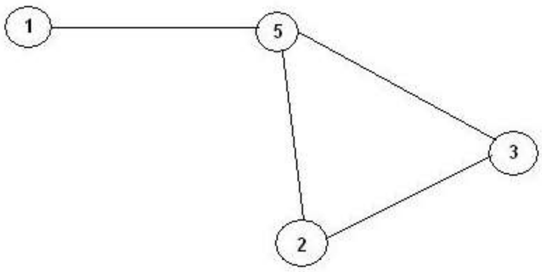
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique numéro 1

On considère un graphe avec des chiffres dans les nœuds. A chaque nœud on fait correspondre la somme de ses voisins.

Par exemple :



Ici, 1 est associé avec 5 ;

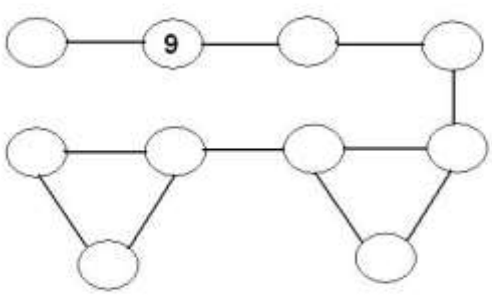
5 est associé avec 1+2+3=6

2 est associé avec 5+3=8

Et 3 est associé avec 2+5=7.

On a mis les entiers de 0 à 9 dans le graphe suivant et associé à chaque nœud la somme de ses voisins.

Malheureusement, presque tous les chiffres ont été effacés.



A vous de les retrouver sachant que :

0 → 10	1→ 9	2→ 10
3→ 9	4→ 18	5→ 10
6→ 9	7→ 9	8→ 9
	9→ 9	

Remarque : la → signifie est « associée à »

Exercice académique numéro 2

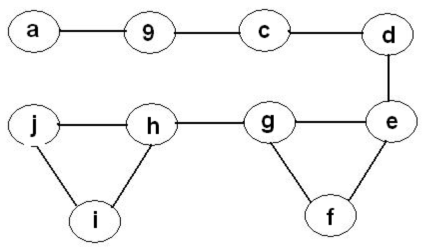
1) Vérifier que, pour tous réels $x, y, z,$ on a : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$.

2) La somme des aires des faces d'un parallélépipède rectangle est 22 cm² et la somme des longueurs de ses arêtes est 24 cm. Déterminer la longueur de ses diagonales intérieures.

Corrigés des Olympiades 1ères 2016 de l'académie d'Amiens

Exercice académique 1 (Série S) :

On introduit des noms pour les nœuds des graphes, que nous allons au fur et à mesure remplacer par les chiffres de 0 à 8.



On a

a →9	d→ c+e	h→ g+i+j
9→ a+c	e→ d+f+g	i→h+j
c→ 9+d	f→ e+g	j→ h+i
	g→ e+f+h	

Or 9→9 et 9→ a+c donc a+c=9 et alors **c=9-a**

De plus, c→9+d avec 0≤d≤8 ; donc c→9 ou 10 car on ne peut pas atteindre les 18 ! Alors **d=0 ou 1.**

Si **d=1** , c→10 donc c=0,2 ou 5 et d=1→9=c+e. d'où c=9-e=9-a donc a=e IMPOSSIBLE.

Donc **d=0.**

Alors c→9 donc **c=1, 3, 6, 7 ou 8.**

Comme d=0 et 0→10, **c+e=10** et **c+a=9** donc e-a=1 et **e=a+1**.

Alors pour le triplet (a,c,e) on a comme possibilités :

(1,8,2)

(2,7,3) Impossible car 2→10 et a→9 donc a≠2

(3,6,4)

(4,5,5) Impossible car c=e

(5,4,6) Impossible car a→9 et 5→10 donc a≠5

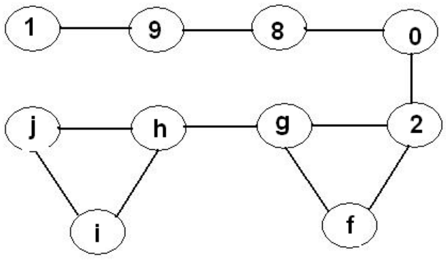
(6,3,7)

Et (7,2,8) Impossible car c→9 et 2→10 donc c≠2

Il ne reste que 3 possibilités.

Testons le triplet (1,8,2) :

On a :



C'est h qui a le plus de voisins, c'est donc lui le seul susceptible d'être associé à 18, donc **<u>h=4</u>**.

Alors $g \rightarrow 2+4+f=6+f$ et cette somme vaut 9 ou 10. Pour faire 10 il manque 4 qui est déjà utilisé donc **<u>f=3</u>**.

Alors $g \rightarrow 9$ et il ne reste que **<u>g=6 ou 7</u>**.

Si $g=6$, alors $h=4 \rightarrow g+i+j=6+i+j=18$ donc $i+j=12$ donc $j=12-i$ et alors $i=5$ et $j=7$, ou $i=7$ et $j=5$ ou $i=6$ et $j=6$. Or $i \neq j$.

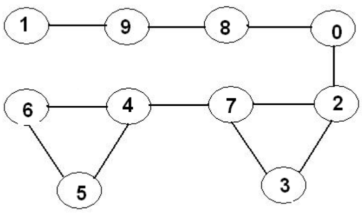
Si $i=5$ et $j=7$, $i=5 \rightarrow h+j=4+7=11$ impossible.

Si $i=7$ et $j=5$, $i=7 \rightarrow h+j=4+5=9$ et $j=5 \rightarrow i+h=7+4=11$ impossible.

On obtient donc **<u>g=7</u>**.

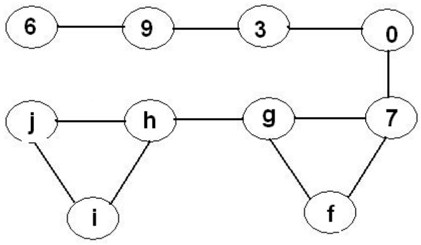
Alors $h=4 \rightarrow i+j+g=7+i+j=18$ donc $i+j=11$ et alors **<u>i=5</u>** et **<u>j=6</u>** ou l'inverse. Les deux conviennent.

On a finalement :



Testons le triplet (3,6,4) : 4 n'a que deux voisins dans ce cas, et il est impossible de faire 18 avec 1,2,5,7 et 8.

Testons le triplet (6,3,7) :



On a $7 \rightarrow g+f=9$ donc $(f,g)=(1,8)$ ou $(4,5)$.

Si $f=1$, $1 \rightarrow 9$ et $f=1 \rightarrow g+7=8+7=15$ impossible

Si $f=8$, $8 \rightarrow 9$ et $f=8 \rightarrow g+7=1+7=8$ impossible

Si $f=5$, $5 \rightarrow 10$ et $f=5 \rightarrow g+7=4+7=11$ impossible

Si $f=4$, $4 \rightarrow 18$ et $f=4 \rightarrow g+7=5+7=12$ impossible

Donc le triplet (6 ,3,7) est impossible.

Exercice académique 2 (Série S) :

1) On développe $(x+y+z)(x+y+z)$.
2) Soit x, y, z les longueurs des arêtes du parallélépipède rectangle.
   On a $2(xy+xz+yz)=22$ et $4(x+y+z)=24$.
   La longueur d'une de ses diagonales est $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
   soit $\sqrt{(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)}=\sqrt{6^2-22}=\sqrt{14}$ cm d'après l'égalité du 1).