SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'AMIENS

Classes de première S • 2012

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

SESSION 2012

MERCREDI 21 MARS 2012 (8h – 12h)

SUJET PREMIERE S

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice National 1 :

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1) Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

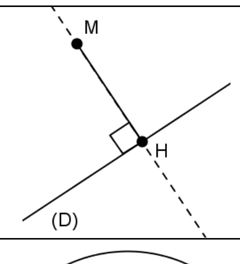
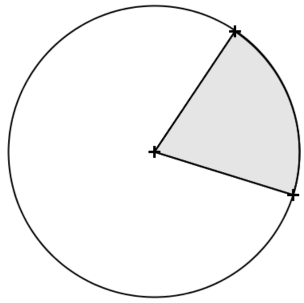
2) Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3) Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
   a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
   c) Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
   d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4) Soit n un entier *digisible* quelconque.
   a) Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
   b) Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
   c) Déterminer le plus grand entier *digisible*.

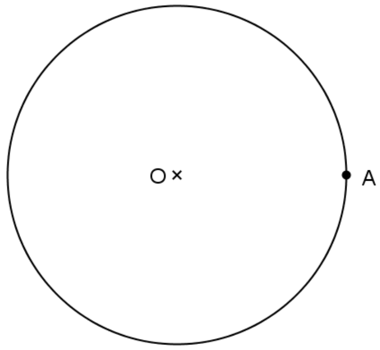
Exercice National 2 :

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\pi \alpha R^2/360$. *Dans la partie II de l'exercice, on considèrera la distance d'un point M à* ***un segment [BC]*** *comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

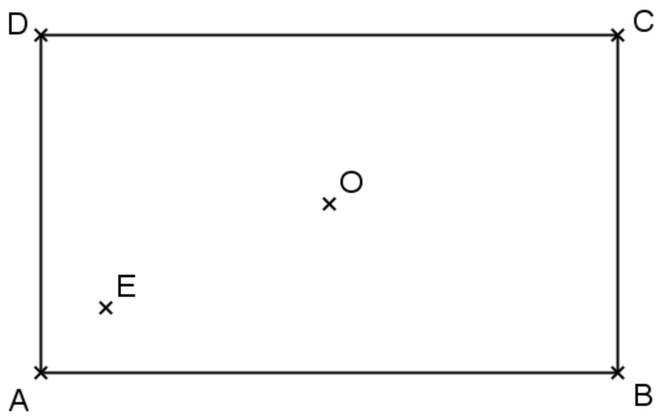
Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1) Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
2) Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
3) Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.
   Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

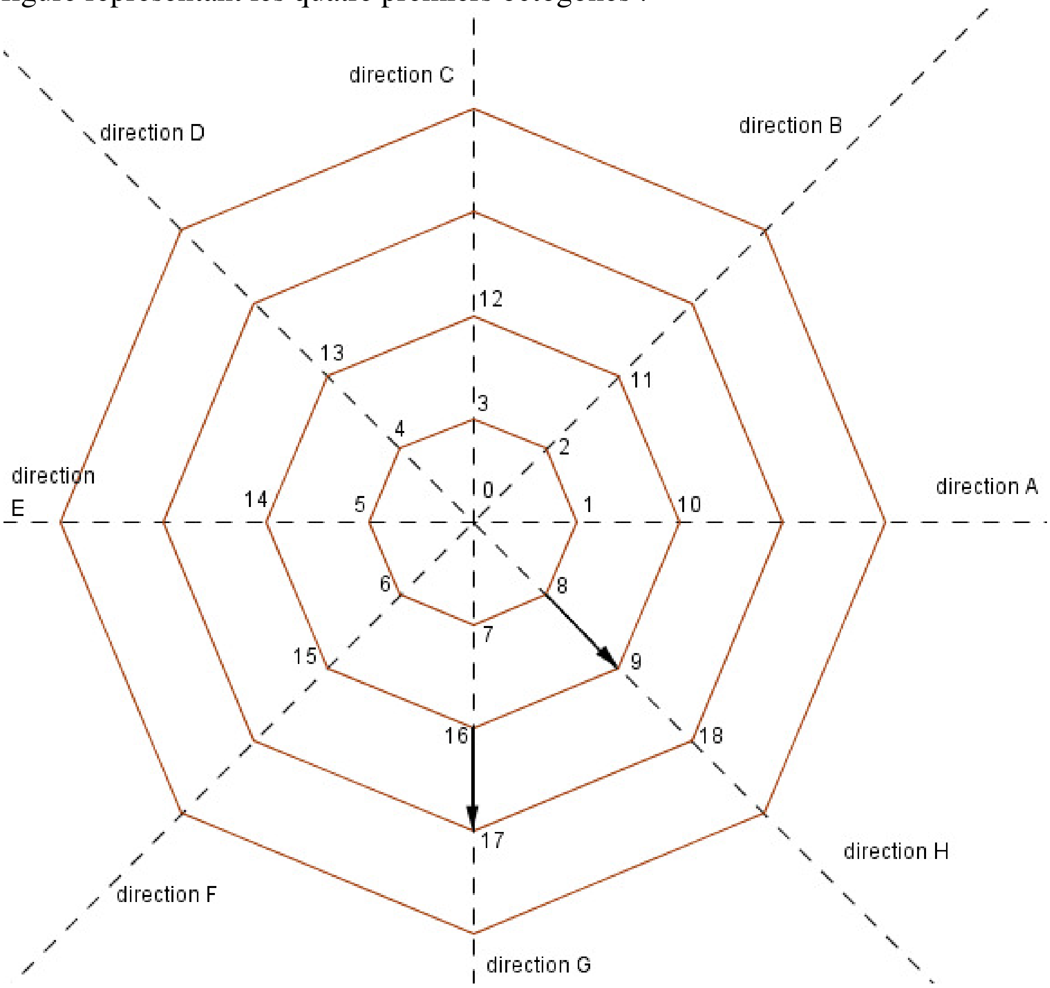
Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?
2) a) Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
   b) Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
   c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?
3) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?
4) Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
5) Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

Exercice Académique 1 :

On considère des octogones réguliers, de même centre O.
Aux sommes de l'octogone central, on note les huit premiers entiers non nuls.
Sur les sommets du deuxième octogone, on inscrit les 8 nombres entiers suivants, avec une rotation de 45 degrés ($\dfrac{\pi}{4}$ radians) autour du point O.
Et ainsi de suite …
On dit que chaque nombre entier a une direction (A, B, C, D, E, F, G ou H par rapport à l'origine O).
Par exemple, 1 a pour direction A, 2 a pour direction B …
Voici une figure représentant les quatre premiers octogones :



1) Quel sera le premier entier inscrit sur le quatrième octogone ? Préciser sa direction.

2) Déterminer le premier entier inscrit sur le huitième octogone ? Préciser sa direction.

3) On considère le $n^{\text{ième}}$ octogone.
   a) Exprimer en fonction de n le premier nombre inscrit sur le $n^{\text{ième}}$ octogone.
   b) On suppose dans cette question que $n = 8k$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $k \neq 0$.
   Quelle est la direction du premier nombre inscrit sur le $n^{\text{ième}}$ octogone ?

4) Placer sur un octogone, les nombres associés aux sommets du $2012^{\text{ème}}$ octogone (la figure ne sera évidemment plus à l'échelle).

5) Sur quel octogone et dans quelle direction se placera le nombre 806002 ?

Exercice Académique 2 :

A et B sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon 5 tels que $AB = 6$.
Le carré PQRS est inscrit dans le secteur angulaire OAB de sorte que P est sur le rayon [OA], S est sur le rayon [OB], Q et R sont deux points de l'arc de cercle reliant A et B.

1) Faire une figure correspondant à la situation proposée.

2) Calculer l'aire du carré PQRS.

CORRECTION, AMIENS 2012

Premier exercice Académique

Olympiades mathématiques, S

1. Ce sera le nombre 25, dans la direction F.
2. On remarque que les nombres de 1 à 8 sont sur le 1^{er} octogone, ceux de 9 à 16 sur le $2^{\text{ème}}$, ceux de 17 à 24 sur le $3^{\text{ème}}$.
   Sur le $7^{\text{ème}}$ octogone, il y aura donc les nombres de 49 ($49 = 6\times8+1$) à 56 ($56 = 7\times8$).
   Le premier entier inscrit sur le $8^{\text{ème}}$ octogone sera donc 57.
   D'autre part, on remarque qu'à chaque nouveau tour, la direction recule d'une lettre : H pour le début du $2^{\text{ème}}$ octogone, G pour le début du $3^{\text{ème}}$, F pour le début du $4^{\text{ème}}$...
   Le début du $8^{\text{ème}}$ octogone se fera donc dans la direction B.
3. a) En suivant le même raisonnement que dans la question 2, on obtient que le premier entier inscrit sur le $n^{\text{ième}}$ octogone sera : $(n-1)8+1 = 8n-7$.

   b) On suppose que $n = 8k$. Donc n est un multiple de 8.
   On vient de voir que lorsque $n = 8$, la direction du premier inscrit sur le $8^{\text{ème}}$ octogone est la B.
   Pour $n = 8\times 2 = 16$, la direction recule de 8 lettres : on revient sur la direction B.
   Plus généralement, pour $n = 8k$, le premier inscrit sur le $\text{n}^{\text{ième}}$ octogone aura pour direction la B.
4. On a : $2012 = 2008 + 4 = 8 \times 251 + 4$.
   Le premier inscrit sur le $2008^{\text{ème}}$ octogone aura pour direction la direction B.
   En reculant de 4 lettres, on obtient que le premier inscrit sur le $2012^{\text{ème}}$ octogone aura F pour direction.
   Et le premier inscrit sera : $(2012-1)\times 8+1 = 8\times 2011+1 = 16089$.
   Les 8 nombres seront donc : 16089, 16090, 16091, 16092, 16093, 16094, 16095 et 16096 ; dans les directions F, G, H, A, B, C, D, E.
5. On a : $806002 = 806000 + 2 = 8 \times 100750 + 2$.
   Le $100750^{\text{ème}}$ octogone se termine par le nombre 806000. Donc 806002 se trouvera sur le $100751^{\text{ème}}$ octogone.
   Ensuite $100751 = 100744 + 7 = 8 \times 12593 + 7$.
   Comme pour le 4), le premier nombre inscrit sur le $100744^{\text{ème}}$ octogone aura B pour direction.
   On recule de 7 lettres, donc le premier inscrit sur le $100751^{\text{ème}}$ octogone aura C pour direction.
   Ce premier nombre inscrit sera 806001. Et donc le suivant, 806002, aura pour direction la D.

CORRECTION, AMIENS 2012

Second exercice Académique

Olympiades mathématiques, S

On pose $x = DE$ et $y = EQ$.
D'après Pythagore dans OBD, on a déjà $OD = 4$.

Ensuite, on doit avoir $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{CP}{DA}$

D'où : $OC = OD \times \dfrac{CP}{DA} = \dfrac{4}{3}y$.

Puis $QR = EC \Leftrightarrow 2y = 4+x-\dfrac{4}{3}y \Leftrightarrow \dfrac{10}{3}y = 4+x$.

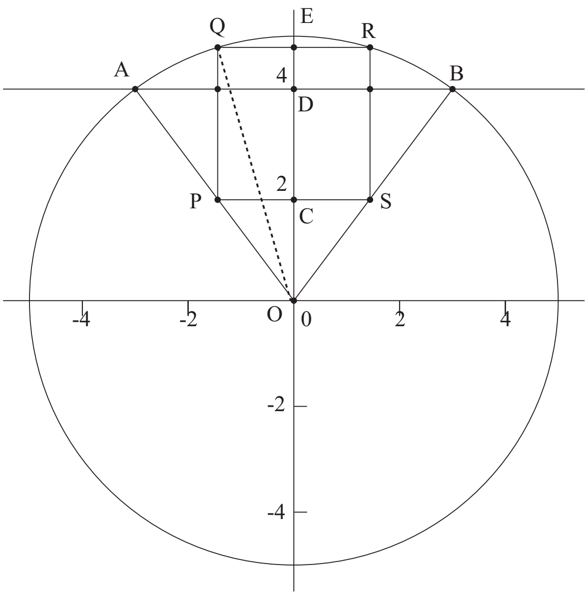
Enfin, d'après Pythagore dans OEQ :

$$OE^2 + EQ^2 = 5^2 \Leftrightarrow (4+x)^2 + y^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{10}{3}y\right)^2 + y^2 = 25.$$

$$\Leftrightarrow \frac{109}{9}y^2 = 25$$

$$y^2 = 25 \times \frac{9}{109} \Leftrightarrow y = \frac{15}{\sqrt{109}}.$$



Cette égalité fournit la valeur de y. On pourrait ensuite déterminer x.
Mais ce n'est pas utile, car on cherche l'aire du carré.
D'après nos équations, les valeurs de x et de y garantissent que PQRS est un carré.

On a alors : $\text{aire}_{\text{PQRS}} = (2y)^2 = 4y^2 = \dfrac{900}{109} = 8,26$.