OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE D'AIX-MARSEILLE
2020

SUJET + CORRIGÉ

20e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mars 2020[1], 2 énoncés (national et académique) en 4 heures, élèves de première générale et technologique[2] et de début de terminale[3], inscription auprès de votre professeur de mathématiques avant les vacances d'hiver selon académie.

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

2019 2020 ◆ année des mathématiques

Olympiades académiques de mathématiques

Académie d'Aix-Marseille

Mercredi 11 mars 2020

Les calculatrices sont autorisées selon la règlementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Cette sous-épreuve comporte deux exercices, à traiter dans le temps imparti.

Les binômes composés de candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité doivent traiter les exercices 1 et 2.

Les autres binômes doivent traiter les exercices 1 et 3.

Pour chaque binôme une seule copie est à rendre, avec le nom des deux élèves ayant composé.

Durée de la composition : 2 heures

Ce sujet comporte 8 pages dont celle-ci.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats) :
Nombres parfaits, abondants ou déficients

Nicomaque de Gérase (en Jordanie) mathématicien, musicologue et philosophe grec a introduit cette notion au premier siècle après JC :

- **Un nombre est <u>abondant</u> lorsque la somme de ses diviseurs est supérieure à 2 fois ce nombre.**
- **Un nombre est <u>parfait</u> lorsque la somme de ses diviseurs est égale à 2 fois ce nombre.**
- **Un nombre est <u>déficient</u> lorsque la somme de ses diviseurs est inférieure à 2 fois ce nombre.**

En quelque sorte, un nombre abondant est un nombre qui possède beaucoup de diviseurs et un nombre déficient en possède peu.

<u>PARTIE I : Nature des 200 premiers entiers naturels non nuls</u>

On note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs d'un entier naturel n non nul.

Par exemple, 4 étant divisible par 1, 2 et 4, on a $\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$, or $7 < 2 \times 4$ donc 4 est déficient.

1) Déterminer la nature (abondant, parfait ou déficient) des entiers 6, 9 et 12. Justifier.

2) L'algorithme ci-dessous permet de donner la nature des premiers entiers naturels non nuls. Les résultats obtenus pour les 200 premiers entiers sont donnés dans le tableau ci-contre.

Compléter l'algorithme (on ne recopiera en réponse que les lignes 5, 10, 12 et 15).

Algorithme :

```
1.  def sigma(n) :
2.      somme = 0
3.      for i in range(1 , n+1) :
4.          if n%i == 0 :
5.              somme = …………
6.      return somme
8.  def nature(n) :
9.      somme = sigma(n)
10.     if ………… :
11.         nature = "déficient"
12.     elif ………… :
13.         nature = "parfait"
14.     else :
15.         nature="…………………"
16.     return nature
```

Remarque :

a%b renvoie le reste de la division euclidienne de a par b.

Par exemple, 13%5 renvoie 3

Nature des 200 premiers entiers :

Déficients	Parfaits	Abondants
1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 69, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 79, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 99, 101, 103, 105, 106, 107, 109, 110, 111, 113, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 129, 130, 131, 133, 134, 135, 136, 137, 139, 141, 142, 143, 145, 146, 147, 148, 149, 151, 152, 153, 154, 155, 157, 158, 159, 161, 163, 164, 165, 166, 167, 169, 170, 171, 172, 173, 175, 177, 178, 179, 181, 182, 183, 184, 185, 187, 188, 189, 190, 191,193, 194, 195, 197, 199.	6, 28	12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100, 102, 104, 108, 112, 114, 120, 126, 132, 138, 140, 144, 150, 156, 160, 162, 168, 174, 176, 180, 186, 192, 196, 198, 200.

<u>PARTIE II : Conjectures</u>

À partir de ce tableau, on peut conjecturer un certain nombre de résultats.
Les questions suivantes vont permettre de valider ou de contredire ces conjectures.

On pourra s'appuyer pour certaines démonstrations sur le théorème suivant :

Théorème de décomposition en produit de facteurs premiers :
Tout nombre entier strictement positif admet une ***unique décomposition*** *en produit de facteurs premiers.*
Par exemple, l'unique décomposition en produit de facteurs premiers de 45 est $45 = 3^2 \times 5$.

1) Conjecture 1 : Tout nombre premier est déficient.

a. Tester la conjecture en prenant un exemple.

b. Justifier que, pour n nombre premier, on a $\sigma(n) = 1 + n$

c. La conjecture est-elle vraie ? Justifier.

2) Conjecture 2 : Tout nombre abondant est pair.

a. Décomposer en produit de facteurs premiers 945.

b. En déduire la liste des diviseurs de 945.

c. Vérifier que $\sigma(945) = 1920$.

d. La conjecture est-elle vraie ? Justifier.

3) Conjecture 3 : Tout multiple de 6, excepté 6, est abondant.

a. Tester la conjecture en prenant un exemple.

b. Justifier que, pour n multiple de 6 strictement supérieur à 36, on a :

$$\sigma(n) \geq 1 + 2 + 3 + 6 + \frac{n}{6} + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} + n$$

c. Vérifier que $\sigma(n) \geq 12 + 2n$ dans les conditions de la question précédente.

d. La conjecture est-elle vraie ? Justifier.

4) Conjecture 4 : Tout nombre produit de 2 nombres premiers impairs est déficient.

a. Tester la conjecture en prenant un exemple.

b. Justifier que, pour $n = pq$ avec p et q premiers impairs tels que $p < q$, on a $\sigma(n) = 1 + p + q + pq$.

c. Vérifier que $1 + p + q < pq$.

d. La conjecture est-elle vraie ? Justifier.

5) Conjecture 5 : Tout carré d'un nombre premier est déficient.

a. Tester la conjecture en prenant un exemple.

b. Justifier que, pour $n = p^2$ avec p premier, on a $\sigma(n) = 1 + p + p^2$.

c. Vérifier que $1 + p < p^2$.

d. La conjecture est-elle vraie ? Justifier.

6) Conjecture 6 : Toute puissance de 2 est un nombre déficient.

a. Quels sont les diviseurs de 2^5 ? Vérifier que 2^5 est déficient.

b. Justifier que, pour p entier naturel, $\sigma(2^p) = 2^{p+1} - 1$.

c. La conjecture est-elle vraie ? Justifier.

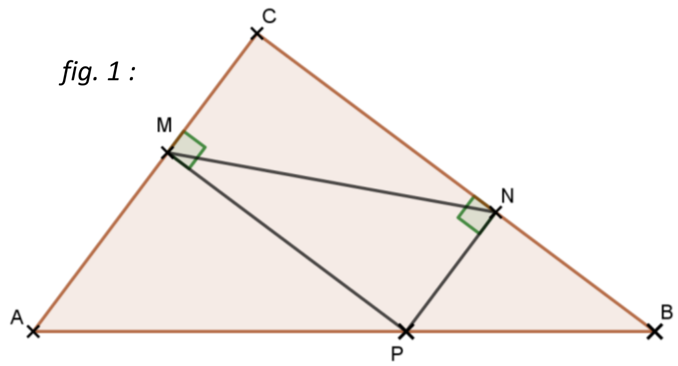
Exercice 2 (à traiter par les candidats de la voie générale ayant choisi la spécialité mathématique) :
Naufrage dans l'archipel des îles Triangles

Dans ce sujet, on cherche à minimiser des longueurs.
On pourra entre autres utiliser la propriété suivante : la distance la plus courte d'un point M à une droite (d) est la longueur du segment perpendiculaire à la droite (d) passant par le point M.

Robinson se retrouve échoué dans l'archipel des îles Triangles…

I. La première île sur laquelle il échoue a la forme d'un triangle dont les côtés mesurent 3, 4 et 5 km.
On donne ci-contre le plan de l'île à l'échelle, avec les notations à utiliser (*fig. 1*).

fig. 1 :



1) Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

Il veut établir son camp de base en P, quelque part sur la plage $[AB]$. Tous les jours, il compte se rendre sur les deux autres plages en empruntant des chemins $[PM]$ et $[PN]$ perpendiculaires aux rivages, comme indiqué sur la figure 1. Il voudrait que le trajet qui lui permet d'aller de M jusqu'à N soit le plus court possible. Nous allons donc chercher, par deux méthodes différentes, la position du point P_0 qui minimise la distance MN.

2) On note $x = AP$.

a. Exprimer PM puis PN en fonction de x.

b. Exprimer MN en fonction de x.

c. En déduire la position du point P_0 qui minimise la distance MN.

3) Démontrer que P_0 est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

II. Il se retrouve ensuite sur une île ayant la forme d'un triangle équilatéral de côté 5 km, dont le plan à l'échelle est donné ci-dessous (*fig. 2*).
Cette fois-ci, il décide d'établir son camp de base dans l'intérieur de l'île. Il souhaite se rendre sur chacune des trois plages par le chemin le plus court, et minimiser ses trajets. Pour cela, on cherche à placer le point P pour que la distance $d = PM + PN + PR$ soit minimale.

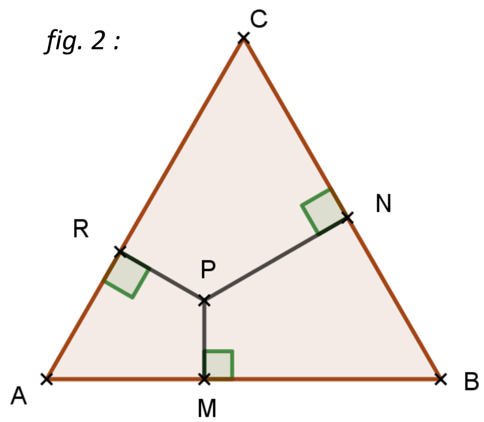
1) Il pense établir son camp P au centre de gravité de l'île.
Calculer alors la distance d.
Indication : dans un triangle, le centre de gravité se trouve au tiers de chaque médiane.

2) Il se rend compte finalement que quel que soit le lieu où il installe son camp P, la distance d reste identique. On cherche à le démontrer.

a. En découpant le triangle ABC en trois triangles APB, BPC, et CPA, exprimer son aire totale.

b. En déduire que la distance d ne dépend pas de la position de P à l'intérieur du triangle ABC.

fig. 2 :



III. Il installe finalement son camp sur la plage $[AC]$ à 3 km de A. Il souhaite aller cueillir des noix de coco qui poussent en T sur la plage $[BC]$, à 2 km de B, mais en chemin, il doit passer sur la plage $[AB]$ en un point S quelconque, et souhaite que son trajet soit le plus court possible (*fig. 3*).

1) Calculer AH, BH' puis HH'.

2) On note $x = HS$.
Démontrer que la longueur totale de son trajet est :
$$l(x) = \sqrt{x^2 + \frac{27}{4}} + \sqrt{\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 + 3}$$

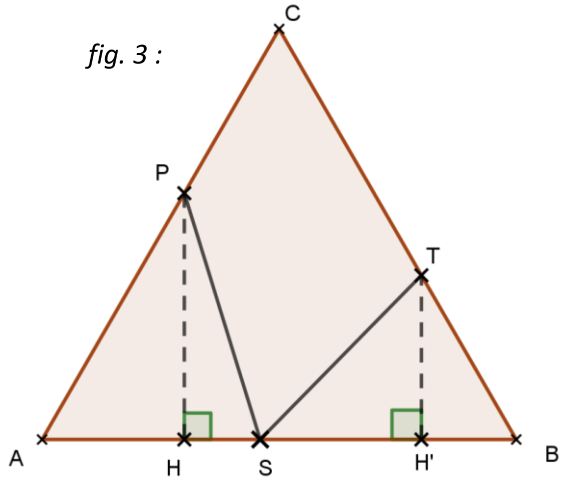
3) A l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur de x qui lui permet de minimniser son trajet, ainsi que la longueur totale du trajet ainsi effectué.

4) Soit P' le symétrique de P par rapport à (AB).

a. Démontrer que le point S_0 qui permet d'effectuer un trajet minimal est le point d'intersection de $(P'T)$ et de (AB).

b. En déduire une validation de la conjecture précédente.

fig. 3 :

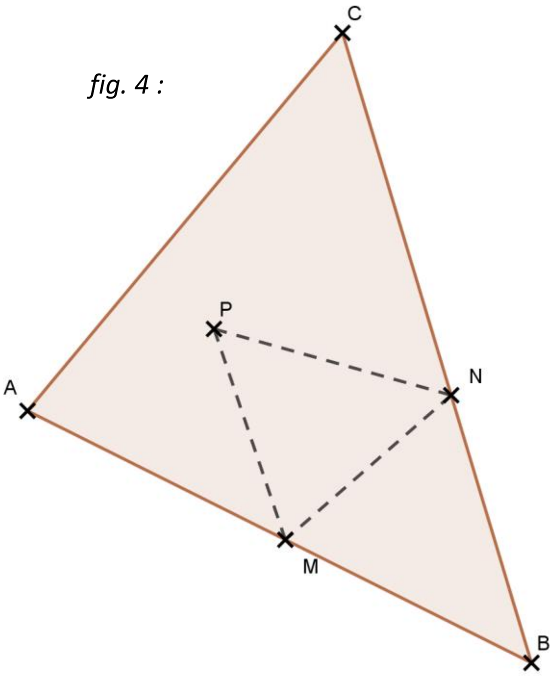


IV. La dernière île sur laquelle il échoue a la forme d'un triangle quelconque dont le plan à l'échelle est donné ci-dessous (*fig.4*).

1) Il installe tout d'abord son camp dans l'intérieur de l'île, au point P repéré sur la carte (fig. 4).
Il souhaite pouvoir se rendre sur la plage $[AB]$ puis sur la plage $[BC]$ et enfin revenir en P.
Par une méthode géométrique, construire, sur la figure en annexe page 8, les points $M_0 \in [AB]$ et $N_0 \in [BC]$ qui permette de minimiser son trajet total.

2) Il décide finalement de s'installer sur la plage $[AC]$.
Justifier que le point $P_0 \in [AC]$ où il doit installer son camp pour que son trajet soit minimal est le pieds de la hauteur issue de B.

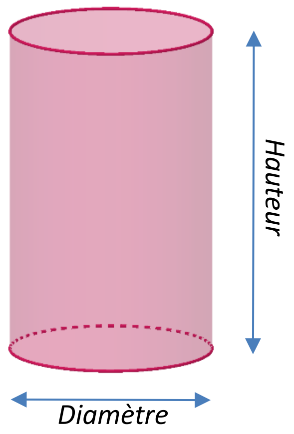
fig. 4 :



Exercice 3 (à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité de mathématiques de voie générale) :
Optimisation d'un emballage en aluminium.

Les canettes en aluminium sont des boites métalliques qui permettent de contenir du liquide.
Dans cet exercice, nous allons étudier différents formats de canettes qui peuvent contenir 33 cL de liquide, et tenter de déterminer les dimensions qui permettent de minimiser la surface d'aluminium nécessaire à leur confection.

Partie 1 : Classique ou « sleek » ?



Les canettes sont généralement de forme cylindrique. Elles ont des bords légèrement biseautés, mais nous négligerons ici cet aspect et les assimilerons à des cylindres.

La canette classique est le modèle le plus répandu, mais récemment de nouveaux formats sont apparus, notamment la canette « sleek » de forme plus allongée.

1) Une canette classique a une hauteur de 10,3 cm et son disque de base a un diamètre de 6,4 cm.
   Vérifier que la canette classique permet effectivement de contenir 33 cL de liquide.
2) Réaliser à l'échelle 1/2 le patron d'une telle canette, en indiquant clairement les dimensions de chaque élément, arrondies au dixième.
3) Une canette sleek a une hauteur de 12,5 cm.
   Calculer, au mm près, le diamètre minimal d'une canette sleek pour qu'elle puisse contenir 33 cL de liquide.
4) Laquelle de ces deux canettes permet d'utiliser le moins d'aluminium ?

Partie 2 : La canette optimale

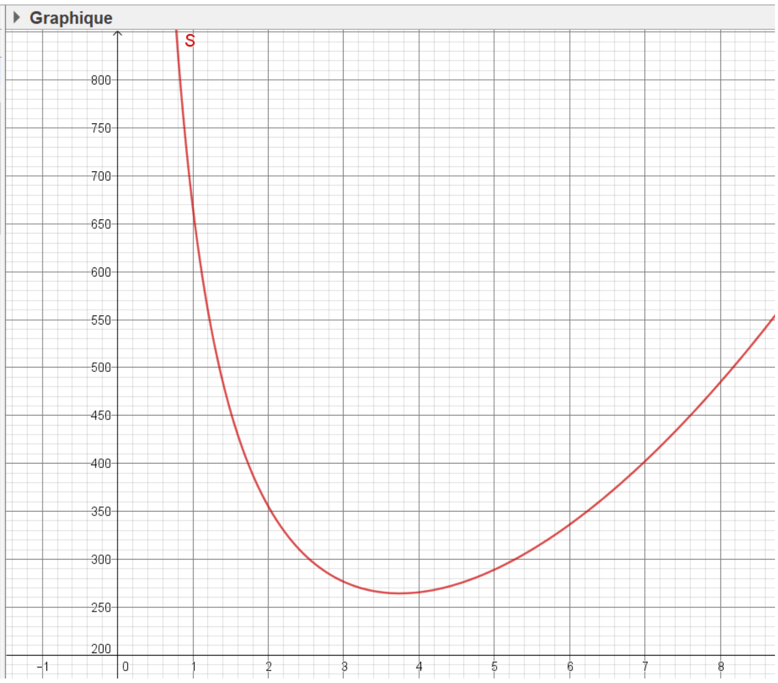
Un fabriquant de canettes souhaite proposer un nouveau modèle cylindrique d'un volume de 33 cL qui minimiserait la quantité d'aluminium nécessaire à sa production.
On note h la hauteur du cylindre et R le rayon du disque de base, en cm.

1) Exprimer h en fonction de R.
2) Démontrer que la surface totale d'aluminium, en cm^2, nécessaire à la confection d'une canette contenant exactement 33 cL est donnée en fonction de R par : $S = 2\pi R^2 + \frac{660}{R}$
3) Pour étudier cette fonction, on a réalisé le graphique et le tableau de valeurs suivants :

Tableur

	A	B
1	R	S(R)
2	3	276.549
3	3.05	274.843
4	3.1	273.285
5	3.15	271.869
6	3.2	270.59
7	3.25	269.443
8	3.3	268.424
9	3.35	267.528
10	3.4	266.751
11	3.45	266.09
12	3.5	265.54
13	3.55	265.099
14	3.6	264.763
15	3.65	264.53
16	3.7	264.395
17	3.75	264.357
18	3.8	264.413
19	3.85	264.561
20	3.9	264.798
21	3.95	265.122
22	4	265.531

Graphique



a. Quelle formule a été saisie dans la cellule B2 avant d'être recopiée vers le bas ?

b. En utilisant ces données, quel est l'encadrement le plus précis que l'on peut obtenir du rayon R_0 qui donne une surface latérale minimale ?

c. Recopier et compléter les quatre dernières lignes de l'algorithme suivant pour que l'affichage produit donne un encadrement d'amplitude 10^{-3} du rayon R_0 cherché.

```
from math import *
def S(R) :
   S = 2*pi*R**2 + 660/R
   return (S)
p = 0.0005
a = 3
b = 3 + p
while S(b) < S(a) :
   a = ……
   b = ……
print ("borne inférieure = ",......)
print ("borne supérieure = ",......)
```

d. Après exécution de cet algorithme, on obtient l'affichage suivant :

```
borne inférieure =  3.7445
borne supérieure =  3.7455
```

En déduire l'arrondi à 10^{-3} près de R_0.

4) Quel est le pourcentage d'aluminium que permettrait de gagner cette évolution par rapport à une canette classique ?

Partie 3 : D'autres formats

1) On envisage de produire des canettes ayant la forme d'un prisme droit à base carrée, et qui permettent toujours de contenir un volume de 33 cL.

a. Quelles seraient, au mm près, les dimensions qui permettraient de minimiser la surface d'aluminium utilisé ?

b. Que pensez-vous de cette solution par rapport au format cylindrique ?

2) On envisage de produire des canettes ayant la forme d'une sphère.

a. Déterminer, au mm près, le rayon minimum de la sphère permettant de contenir 33cL de liquide.

b. En déduire la surface d'aluminium nécessaire à sa production.

c. Que pensez-vous de cette solution ?

Formulaire :

$$Volume\ d'un\ cylindre\ =\ (Aire\ de\ la\ base) \times hauteur$$

$$Aire\ d'un\ disque = \pi \times rayon^2$$

$$périmètre\ d'un\ cercle = 2\pi \times rayon$$

$$Volume\ d'une\ sphère = \frac{4}{3}\pi \times rayon^3$$

$$Surface\ latérale\ d'une\ sphère\ = 4\pi \times rayon^2$$

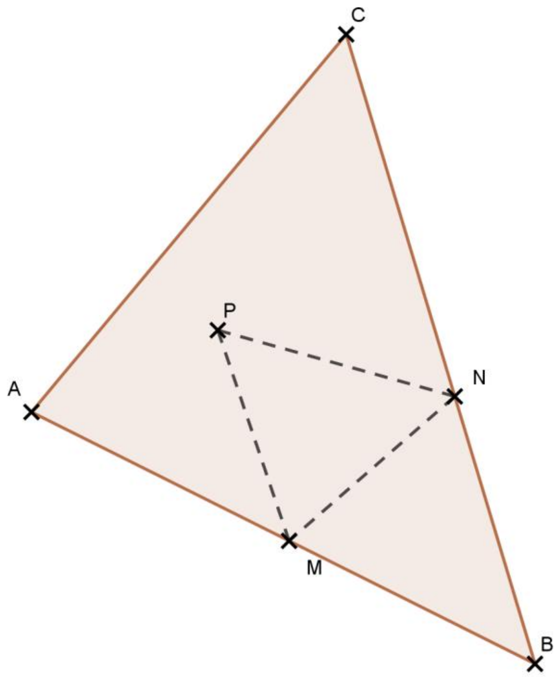
Annexe à rendre avec la copie

NOMS Prénoms des membres du binôme :

–

–

Exercice 2 (à traiter par les candidats de la voie générale ayant choisi la spécialité mathématique) :



OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

CORRECTION !

Épreuve ▪ 2020

Nombres abondants, parfaits ou déficients

- **Un nombre est <u>abondant</u> lorsque la somme de ses diviseurs est supérieure à 2 fois ce nombre.**
- **Un nombre est <u>parfait</u> lorsque la somme de ses diviseurs est égale à 2 fois ce nombre.**
- **Un nombre est <u>déficient</u> lorsque la somme de ses diviseurs est inférieure à 2 fois ce nombre.**

<u>PARTIE 1 : Nature des 200 premiers entiers naturels</u>

On note σ (n) la somme des diviseurs d'un entier naturel n non nul.
Par exemple, 4 étant divisible par 1, 2 et 4, on a $\sigma(4) = 1+2+4 = 7$ or $7 < 2 \times 4$ donc 4 est déficient.

1) <u>Nature des entiers 6, 9 et 12.</u>

6 a pour diviseurs 1, 2, 3 et 6. $1+2+3+6 = 12 = 2\times 6$ donc ***6 est un nombre parfait****.*
9 a pour diviseurs 1, 3 et 9. $1+3+9 = 13 < 2\times 9$ donc ***9 est nombre déficient.***
12 a pour diviseurs 1, 2, 3, 4, 6 et 12. $1+2+3+4+6+12 = 28 > 2\times 12$ donc ***12 est nombre abondant****.*

2) <u>Algorithme pour déterminer la nature des 200 premiers entiers à compléter.</u>

```
def sigma(n) :
    somme = 0
    for i in range(1, n+1) :
        if n%i==0 :
            somme = somme+i
    return somme

def nature(n)
    somme = sigma(n)
    if somme < 2*n :
        nature = "deficient"
    elif somme == 2*n :
        nature = "parfait"
    else :
        nature = "abondant"
    return nature
```

<u>PARTIE 2 : Conjectures</u>

1) <u>Conjecture 1 : Tout nombre premier est déficient.</u>

a. *$\sigma(3) = 1+3 = 4 < 2\times 3$ donc* ***3 est déficient****.*
b. *Les seuls diviseurs de n premier sont 1 et n donc* ***σ(n) = 1+n.***
c. *$\sigma(n) = 1+n < 2n$ car $1 < n$, donc n est déficient.* ***La conjecture est vraie.***

2) <u>Conjecture 2 : Tout nombre abondant est pair.</u>

a. ***$945 = 3^3 \times 5 \times 7$***
b. *Les diviseurs de 945 sont* ***1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 27, 35, 45, 63, 105, 135, 189, 315, 945***
c. ***σ (945) =*** *1+3+ 5+ 7+ 9+ 15+ 21+ 27+ 35+ 45+ 63+ 105+ 135+ 189+ 315+ 945 =* ***1920***
d. *$\sigma(945) > 2\times 945$ donc 945 est abondant.* ***La conjecture est fausse.***

3) <u>Conjecture 3 : Tout multiple de 6, excepté 6, est abondant.</u>

a. *$\sigma(12) = 1+2+3+4+6+12 = 28 > 2\times 12$ donc* ***$12 = 2\times 6$ est abondant****.*

b. *Il est facile de voir que 18, 24, 30 et 36 sont aussi des nombres abondants.*
Prenons n un multiple de 6 strictement supérieur 36.
n est divisible par 1, 2, 3 et 6 donc aussi par n, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ et $\frac{n}{6}$, mais il peut y en avoir d'autres
donc $\sigma(\mathbf{n}) \geq \mathbf{1+2+3+6+\frac{n}{6}+\frac{n}{3}+\frac{n}{2}+n}$.

c. $\sigma(\mathbf{n}) \geq 1+2+3+6+\frac{n}{6}+\frac{n}{3}+\frac{n}{2}+n = \mathbf{12+2n}$.

d. *$\sigma(n) \geq 12+2n > 2n$ donc n est abondant.* ***La conjecture est vraie****.*

4) <u>Conjecture 4 : Tout nombre produit de 2 nombres premiers impairs est déficient.</u>

a. *$\sigma(15) = 1+3+5+15=24 < 2\times 15$ donc* ***$15 = 3\times 5$ est déficient****.*

b. *n = pq et cette décomposition en produit de facteurs premiers est unique.*
n est divisible par 1, p, q et pq donc $\sigma(\mathbf{n}) = \mathbf{1+p+q+pq}$.

c. *$1+p+q = q(\frac{1}{q}+\frac{p}{q}+1) < 3q \leq pq$, en effet $\frac{1}{q}+\frac{p}{q}+1 < 3$ et $3 \leq p$ puisque p et q sont deux nombres premiers impairs tels que $p < q$. On a bien* $\mathbf{1+p+q < pq}$.

d. *$\sigma(n) = 1+p+q+pq < pq+pq = 2pq = 2n$ donc n est déficient.* ***La conjecture est vraie****.*

5) <u>Conjecture 5 : Tout carré d'un nombre premier est déficient.</u>

a. *$\sigma(9) = 1+3+9 = 13 < 2\times 9$ donc* ***$9 = 3^2$ est déficient****.*

b. *$n = p^2$ et cette décomposition en produit de facteurs premiers est unique.*
n est divisible par 1, p et p^2 donc $\sigma(\mathbf{n}) = \mathbf{1+p+p^2}$.

c. *$1+p < 2p \leq p^2$, en effet $2 \leq p$ puisque p est un nombre premier. On a bien* $\mathbf{1+p < p^2}$.

d. *$\sigma(n) = 1+p+p^2 < p^2+p^2 = 2p^2 = 2n$ donc n est déficient.* ***La conjecture est vraie****.*

6) <u>Conjecture 6 : Toute puissance de 2 est un nombre déficient.</u>

a. *2^5 a pour diviseurs $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ et $\sigma(2^5) = 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5 = 63 < 2\times 2^5 = 64$, donc* ***$32 = 2^5$ est déficient****.*

b. *$n = 2^p$ et cette décomposition en produit de facteurs premiers est unique.*
n est divisible par $1, 2, 2^2, \dots, 2^p$ donc $\sigma(\mathbf{n}) = 1+2+2^2+\dots+2^p = \frac{1-2^{p+1}}{1-2} = \mathbf{2^{p+1}-1}$,
comme somme des premiers termes d'une série géométrique.

c. *$\sigma(n) = 2^{p+1}-1 = 2\times 2^p - 1 < 2\times 2^p = 2n$ donc n est déficient.* ***La conjecture est vraie****.*

Naufrage sur une île correction

I.

1) On utilise la réciproque du théorème de Pythagore. $4^2 + 3^2 = 25 \; et \; 5^2 = 25$

2) x=AP donc BP = 5 - x.

a. (PN) parallèle à (AB). On peut appliquer le théorème de Thalès :

$PM = \frac{x}{5} \times 4$ $\qquad \frac{PN}{3} = \frac{5-x}{5}$ donc $\qquad PN = \frac{5-x}{5} \times 3$

b. Dans MPN rectangle en P on applique le théorème de Pythagore :

$MN^2 = PN^2 + PM^2$ donc $MN = \sqrt{\frac{9}{25}(5-x)^2 + \frac{16\ x^2}{25}} = \sqrt{\frac{5\,(5\,x^2 - 18x + 45)}{25}}$

C. La fonction racine carrée est strictement croissante sur]0, +∞[, la fonction polynomiale atteint son minimum pour x = 1,8. Donc MN est minimal pour **x= 1,8**

3) CNPM est un rectangle dont [CP] et [MN] sont les diagonales. P est sur [AB] et la distance minimale entre un point et une droite est la distance du point au pied de la perpendiculaire à la droite en ce point. Donc pour minimiser CP donc MN, il faut que

P_0 soit le pied de la hauteur issue de C.

II. d = PM + PN + PR

1) P centre de gravité du triangle équilatéral. Donc P se trouve au tiers de la médiane. Donc $CP = \frac{1}{3} CM$. Par ailleurs la médiane est aussi la hauteur car le triangle est équilatéral. Donc CMA est rectangle en M. On applique le théorème de Pythagore

$AC^2 = CM^2 + AM^2 \; donc \quad CM = \frac{\sqrt{3}}{2} 5 \; et \quad \frac{1}{3} CM = \frac{5}{2\sqrt{3}}$.

De même on calcule PN et PR et au final $\boldsymbol{d = \frac{5\sqrt{3}}{2}}$

2)

a.

Aire APB = $\frac{5\,PM}{2}$ $\qquad$ Aire APC = $\frac{5\,PR}{2}$ $\qquad$ Aire CPB = $\frac{5\,PN}{2}$

Donc l'aire totale est égale Aire APBx3 = $\frac{5\,PM}{2} \times 3 = \boldsymbol{\frac{5d}{2}}$

b. Par ailleurs, l'aire totale A vaut : $\frac{5\,CM}{2}$ donc A = $\frac{5\,\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{25\,\sqrt{3}}{4}$

Des deux égalités on déduit que $\frac{5d}{2} = \frac{25\,\sqrt{3}}{4}$ et donc $d = \frac{5\,\sqrt{3}}{4}$ <u>qui ne dépend pas de la position de P.</u>

III.

1) AP = 3 $\qquad$ BT = 2 $\qquad$ Le triangle ABC est équilatéral donc ses angles mesurent 60°.

Les triangles APH et BTH' sont rectangles respectivement en H et H'. Donc on peut appliquer les formules de trigonométrie

$cos\ 60 = \frac{AH}{3} \; donc \; \boldsymbol{AH} = 3 \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$ et $cos\ 60 = \frac{BH\prime}{2}$

$donc\ \boldsymbol{BH'} = 2\times\frac{1}{2} = \mathbf{1}$ et $\boldsymbol{H'H} = 5 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

2) On note HS = x. On calcule PS et ST

<u>Calcul de PS</u>

On calcule d'abord PH $\quad sin\ 60 = \frac{PH}{3}\ donc\ PH = 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$PS^2 = PH^2 + HS^2$ donc $PS^2 = \frac{27}{4} + x^2$

<u>Calcul de ST</u>

On calcule d'abord TH' $\quad sin\ 60 = \frac{TH'}{2}\ donc\ TH' = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$ST^2 = H'T^2 + H'S^2$ donc $ST^2 = (HH' - x)^2 + \sqrt{3}^2 = (\frac{5}{2} - x)^2 - 3$

Finalement $l(x) = PS + ST = \sqrt{\frac{27}{4} + x^2} + \sqrt{(\frac{5}{2} - x)^2 + 3}$

3) A la calculatrice, la valeur de x qui minimise l(x) est **1,5**. Et **l(1,5) = 5**

4) P' est le symétrique de P par rapport à (AB).

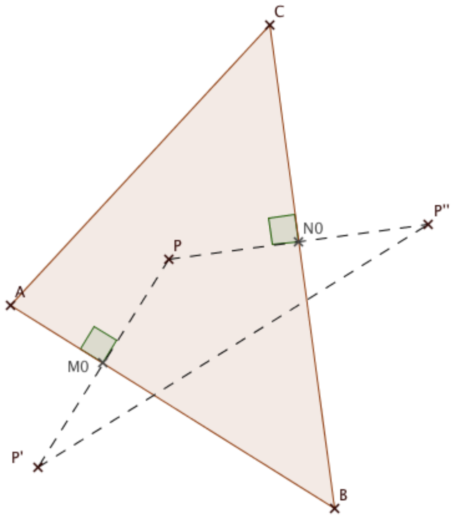
a. Notons S_0le point d'intersection de (PT) et (AB)
PTP' est isocèle en S et (SH) est sa médiatrice. Donc les angles $\widehat{PSH}\ et\ \widehat{P'SH}$ ont même mesure. On notera cette mesure ∝. Par ailleurs $\widehat{TSH'}\ et\ \widehat{P'SH}$ sont opposés par le sommet donc égaux.

$$tan \propto = \frac{TH'}{SH'} = \frac{PH}{HS}\ donc\ \frac{\sqrt{3}}{\frac{5}{2} - x} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}\ ce\ qui\ donne\ après\ simplification\ x = 1,5$$

b. Le trajet minimal correspond à un passage par le point S_0 qui est l'intersection des droites (P'T) et (AB).

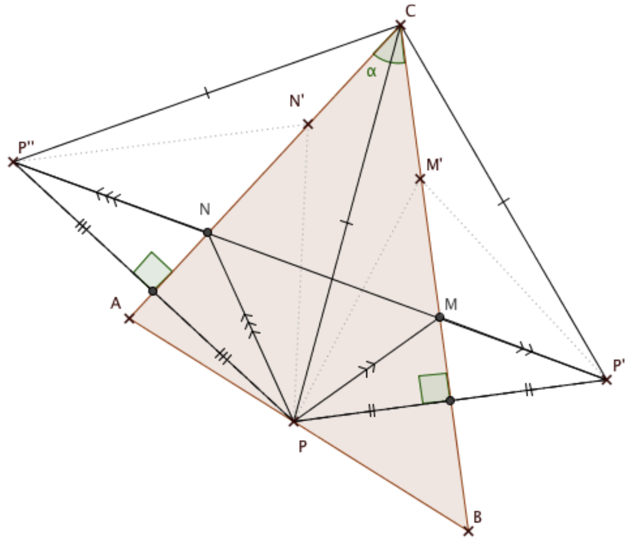
IV.

1)



En utilisant la question III 4), on peut construire $M_0 et\ N_0$ comme indiqué ci-contre. Ces positons de M et N sont celles qui minimisent le trajet.

2)



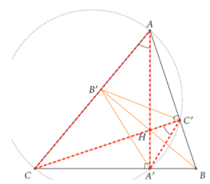
On notera $\propto$ $l'angle\ \widehat{ACB}$
On place le point P sur [AB]

Et en utilisant la question précédente on place les points M et N en utilisant les symétries donnant P' et P''.
Le périmètre du triangle MNP est égal à la longueur P'P'' (égalités de longueur apparaissant sur le tracé).
Quels que soient M' sur [AB] et N' sur [AC] distincts de M et N, le triangle N'PM' a pour périmètre la longueur de la ligne brisée c'est à dire P''N' + N'M'+M'P' qui est nécessairement plus grand que la longueur de [P'P''] qui est un segment donc plus court que la ligne brisée qui rejoint ses deux extrémités.
Par ailleurs, $l'angle\ \widehat{P'CP''} = 2 \propto$

Il faut maintenant trouver la position de P sur [AB] qui va minimiser P'P''. Il faut donc minimiser CP. Or la distance minimale de C au segment [AB] est la distance de C à son projeté orthogonal sur [AB].
Donc p doit être le pied de la hauteur issue de C.

Nous allons maintenant montrer que M et N doivent être les pieds des hauteurs issues de A et de B.
Notons M'' le pied de la hauteur issue de A et N'' le pied de la hauteur issue de B.

$\widehat{BM''P} = \widehat{BCA} = \propto \quad et\ \widehat{BCA} = \widehat{AM''N''}$



Ces égalités utilisent les propriétés des cercles inscrits dans un cercle

Or PM''P' est isocèle en M''. Donc $\widehat{P''M''B} = \widehat{BM''P} = \widehat{BCA} = \propto = \widehat{AM''N''}$.
Donc M'', N'' et P' sont alignés.
On fait la même démonstration dans le triangle AN''P'.
Donc M'' et N'' sont sur la droite (P'P''). Donc M est confondu avec M'' et N est confondu avec N''.

Ce sont donc ces positions des points M et N qui minimisent le périmètre du triangle PMN.

Exercice non-spécialiste : Optimisation d'un emballage aluminium.

Corrigé.

Partie 1 : Classique ou « sleek » ?

1) $V = \pi \times 3{,}2^2 \times 10{,}3 \approx 331{,}35\ cm^3$ soit environ $33{,}1\ cL > 33\ cL$.
Donc la canette classique permet effectivement de contenir 33 cL de liquide.

2) Il faut calculer la longueur du rectangle.
Celle-ci correspond au périmètre du cercle de base, soit $L = 2\pi \times 3{,}2 \approx 20{,}1\ cm$
On peut alors réaliser la construction attendue.

3) $\pi \times R^2 \times 12{,}5 = 330 \ \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{330}{12{,}5\pi}} \approx 2{,}9$ et donc $D = 2 \times R \approx 5{,}8$

4) On calcule les surfaces latérales de ces deux cylindres :

$$S = 2S_{disque} + S_{rectangle} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R(R+h)$$

- Canette classique : $S_1 \approx 271{,}4\ cm^2$
- Canette sleek : $S_2 \approx 280{,}6\ cm^2$

$S_1 < S_2$: La canette classique permet donc d'utiliser moins d'aluminium.

Partie 2 : La canette optimale

1) $V = \pi R^2 h = 330 \ \Leftrightarrow h = \frac{330}{\pi R^2}$

2) $S = 2\pi R(R+h) = 2\pi R\left(R + \frac{330}{\pi R^2}\right) = 2\pi R^2 + \frac{660}{R}$

3)

a. On a saisi la formule : « $=2 * \pi * A1^2 + 660/A1$ »

b. Le meilleur encadrement que l'on puisse donner avec certitude est $3{,}7 < R_0 < 3{,}8$

c.

```
print("borne inférieur= ", a - p)
print("borne supérieure= ", b)
```

d. On en déduit $R_0 \approx 3{,}745$ (arrondi à 10^{-3})

4) On calcule la surface latérale alors obtenue : $S(R_0) = 2\pi R_0^2 + \frac{660}{R_0} \approx 264{,}4$
On compare avec une canette classique : $\frac{S_1 - S_0}{S_1} = \frac{264{,}4 - 280{,}6}{280{,}6} \approx -0{,}057$.
Cette solution permet donc d'économiser environ 5,7% d'aluminium.

Partie 3 : Et avec d'autres formats

1) On utilise une méthode similaire à ce qui a été fait dans la partie 2 :

a.

- Connaissant le volume, on exprime la hauteur h en fonction du côté c du carré de base :

$$V = c^2 h = 330 \Leftrightarrow h = \frac{330}{c^2}$$

- On en déduit l'expression de la surfacce latérale en fonction de c :

$$S = 4ch + 2c^2 = 4 \times \frac{330}{c} + 2c^2$$

- A l'aide de la calculatrice, on peut déterminer une valeur approchée de c_0 permettant d'obtenir une surface minimum : $c_0 \approx 6{,}9$
  On peut calculer la hauteur correspondante : $h_0 = 330/c_0^2 \approx 6{,}9$

- On obtient donc finalement un cube de côté $c_0 \approx 6{,}9$

b. On calcule la surface latérale : $S_c \approx 286\ cm^2 > S_0$. Donc ce format nécessite une plus grande quantité d'aluminium.

2) On envisage de produire des canettes ayant la forme d'une sphère.

a. On cherche r tel que $\frac{4}{3}\pi \times r^3 \geq 330$ sur la table de la calculatrice.
$r = 4{,}3$ convient.

b. La surface de la sphère est alors $S_s \approx 4\pi r^2 \approx 232\ cm^2$.

c. $S_s < S_0$, c'est donc la solution la plus économique en aluminium parmi celles étudiées. On peut démontrer que c'est la solution optimale.