SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'AIX - MARSEILLE

Classes de première S • 2018

Olympiades académiques de mathématiques

Académie d'Aix-Marseille

Mercredi 14 mars 2018

Série S

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Cette sous-épreuve comporte deux exercices, à traiter dans le temps imparti.

Pour chaque binôme une seule copie est à rendre, avec le nom des deux élèves ayant composé.

Durée de la composition : 2 heures

Ce sujet comporte 5 pages dont celle-ci.

Exercice 1 : Découpe de plaque d’acier

L’atelier de métallerie d’un chantier naval découpe des pièces de formes diverses dans des plaques d’acier carrées qu’il commande au laminoir.

Pour limiter les pertes de matière et donc les coûts de production, le chef d’atelier doit déterminer au préalable la taille des plaques carrées qu’il doit commander en fonction des pièces à découper.

Il arrive pour certaines commandes, que seules la forme et la surface des pièces à découper leurs soient transmises.

Dans chacune des trois parties suivantes on étudie la découpe de certains types de pièces.

Ces parties peuvent être traitées indépendamment l’une de l’autre.

On arrondira au besoin les longueurs au mm près, et les surfaces au cm² près.

Partie 1 : Découpe de pièces triangulaires

L’atelier doit produire une pièce qui a la forme d’un triangle équilatéral d’une surface de 20 m².

Le chef d’atelier envisage deux solutions de découpe comme illustré sur les schémas suivants :

Schéma n°1

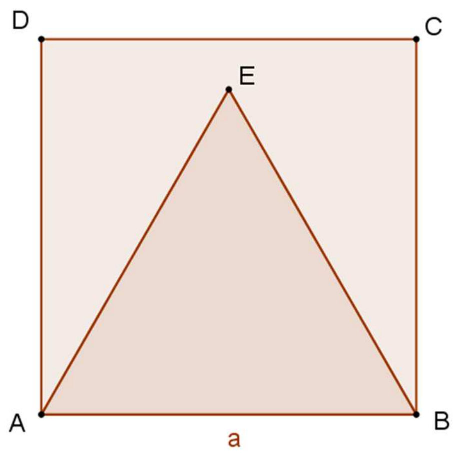
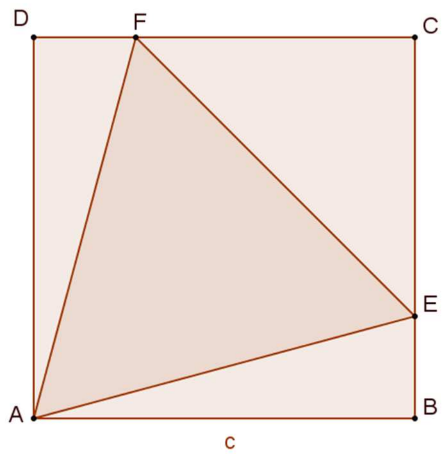


Schéma n°2



On note *a* le côté du triangle et *c* le côté du carré.

1) Schéma n°1 :

a. Exprimer la hauteur *h* du triangle en fonction de *a*.

b. En déduire le côté *a* du carré à construire pour respecter les contraintes.

c. Calculer la surface d’acier perdue avec cette méthode.

2) Schéma n°2 :

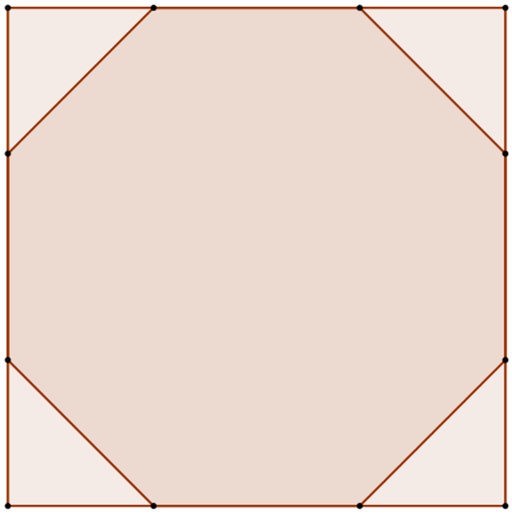
a. Justifier que l’angle $\widehat{BAE}$ mesure 15°.

b. En déduire le côté *c* du carré qu’il doit commander.

c. Calculer la surface d’acier perdue avec cette méthode.

d. Quel est le pourcentage d’acier gagné par rapport à la première proposition de découpe ?

Partie 2 : Découpe de pièces octogonales



L'atelier doit aussi produire des plaques d'acier qui sont des octogones réguliers, et pour lesquelles la surface doit toujours être de 20 m^2. Il retient le schéma de découpe suivant :

On note *a* le côté de l'octogone et *c* le côté du carré.

1) Démontrer que $ac = 10$

2) Démontrer que $c = a\left(1+\sqrt{2}\right)$

3) En déduire les valeurs exactes de a et c.

4) En déduire la surface d'acier perdue pour la découpe de cette pièce.

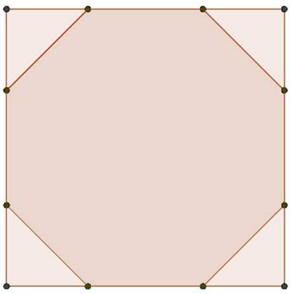
Partie 3 : Découpe d'un disque, ou presque

L'atelier reçoit une nouvelle commande pour un disque de métal de 20 m^2.

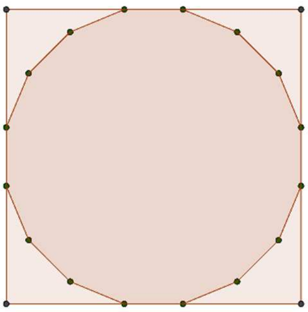
1) Quel devrait être le côté de la plaque carrée que l'atelier doit commander ?

Les outils disponibles à l'atelier ne permettent que des découpes rectilignes.
Un des ouvriers réalise qu'en augmentant le nombre de côtés du polygone, il obtiendra une forme se « rapprochant » d'un disque.

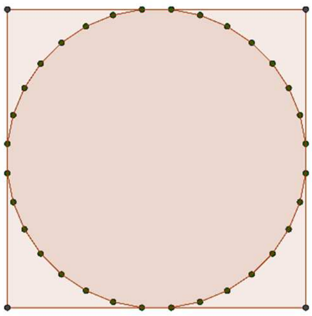
Il doit cependant se limiter à des pièces polygonales de 2^n côtés (avec $n \geq 3$) afin de pouvoir fixer ces dernières entre les étaux de la planche de découpe.



Polygone à 8 côtés



Polygone à 16 côtés



Polygone à 32 côtés

2) Quel est le côté de la plaque carrée qu'il doit commander pour pouvoir y découper un polygone régulier à 16 côtés d'une surface de 20 m^2 ?

3) Le chef d'atelier a déjà passé commande d'une plaque carrée prévue pour y tailler un véritable disque de 20 m^2. C'est dans cette plaque que va être effectuée la découpe d'un polygone régulier à 2^n côtés, comme représenté sur les schémas précédents.
Il est bien conscient qu'il n'obtiendra pas une pièce de 20 m^2 exactement mais souhaite néanmoins que la différence n'excède pas 0,01 m^2.
Quel est le nombre minimal de côtés du polygone à découper pour satisfaire à cette exigence ?

Exercice 2 : Construction d'un jeu de cartes

Manon et Julien veulent construire un jeu de cartes respectant les règles suivantes :

- *R_1 : « Sur chaque carte sont dessinés n symboles différents »*
- *R_2 : « Deux cartes distinctes ont toujours un et un seul symbole en commun »*
- *R_3 : « Aucun symbole n'est commun à toutes les cartes »*
- *R_4 : « Chaque symbole doit apparaître sur au moins deux cartes »*

Pour jouer, on présente deux cartes et le premier qui identifie le symbole commun à ces deux cartes remporte le pli.

On appellera « carte 1 », « carte 2 », …, « carte *c* » les *c* cartes constituant le jeu, et on notera « a », « b », « c », … les différents symboles utilisés.

1) Pour commencer, ils envisagent de réaliser un jeu simplifié qui ne contient que 3 cartes. Manon prétend qu'en dessinant 2 symboles sur chaque carte, 3 symboles différents en tout sont suffisants. Proposer un tel jeu en donnant pour chaque carte les symboles qui y sont dessinés.

2) Ils veulent maintenant réaliser un jeu de 7 cartes, dans lequel chaque symbole n'est partagé que par une seule paire de cartes.

  a. Justifier qu'une carte de ce jeu doit contenir 6 symboles.
  b. Combien de symboles différents seront nécessaires ?
  c. Avec 300 symboles différents, de combien de cartes le jeu aurait-il été constitué ?

3) N'étant pas satisfaits du résultat, ils tentent de construire un jeu de 7 cartes contenant chacune 3 symboles et rajoutent la règle suivante :
R_5 : « Chaque symbole apparaît sur 3 cartes exactement »
Justifier qu'un tel jeu nécessite 7 symboles distincts.

4) Après plusieurs tentatives infructueuses, ils ont finalement réussi à réaliser un tel jeu à l'aide de l'algorithme suivant :

```
Pour i allant de 1 à 7
    Pour j allant de 1 à 7
        Si il y a déjà 3 « 1 » dans la ligne i
        ou il y a déjà 3 « 1 » dans la colonne j,
        ou il existe k < i et l < j tel que il y ait des « 1 » dans les cases (k ; j), (k ; l) et (i ; l ).
            Alors, écrire 0 dans la case (i ; j)
            Sinon, écrire 1 dans la case (i ; j)
        Fin Si-Sinon
    Fin Pour
Fin pour
```

Celui-ci leur a permis de compléter un tableau à 7 lignes et 7 colonnes dans lequel une ligne correspond à une carte et une colonne à un symbole.
la case (i ; j) désigne la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

a. Que signifie l'écriture d'un « 1 » dans la case (i ; j) ?

b. Quelle règle du jeu conduit à écrire « 0 » dans la case (i ; j) s'il y a déjà 3 « 1 » dans la ligne i ?

c. Quelle règle du jeu conduit à écrire « 0 » dans la case (i ; j) s'il y a déjà 3 « 1 » dans la colonne j ?

d. Quelle règle du jeu conduit à écrire « 0 » dans la case (i ; j) s'il existe k < i et l < j tel que il y ait des « 1 » dans les cases (k ; j), (k ; l) et (i ; l) ?

e. Compléter le tableau suivant en appliquant cet algorithme.

		a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**
		1	2	3	4	5	6	7
Carte 1	1	1	1	1	0	0	0	0
Carte 2	2							
Carte 3	3							
Carte 4	4							
Carte 5	5							
Carte 6	6							
Carte 7	7							

5) Ils ont réussi à construire un jeu de 57 cartes dans lequel chaque carte comporte 8 symboles et où chaque symbole apparaît sur 8 cartes différentes.
Ils ont malencontreusement perdu deux cartes. Combien y a-t-il de symboles qui n'apparaissent que 7 fois ?

6) Pour réussir la construction d'un tel jeu, ils avaient généralisé la règle R_5 qui est alors devenue :
« Chaque symbole apparaît sur n cartes exactement ».
On utilisera les notations suivantes :
- *c* le nombre de cartes.
- *n* le nombre de symboles par cartes (qui est aussi le nombre de cartes où apparaît un symbole donné).
- *s* le nombre de symboles différents utilisés dans le jeu.
- *N* le nombre total de symboles apparaissant dans le jeu.

a. En comptant de deux manières différentes le nombre total de symboles dans le jeu, démontrer qu'il y a le même nombre de cartes que de symboles différents dans le jeu.

b. Combien de paires distinctes peut-on réaliser avec les *c* cartes du jeu ?

c. Avec les *n* cartes ayant un symbole commun, combien de paires peut-on réaliser ?

d. Etablir que $c = n(n-1)+1$

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

AIX-MARSEILLE 2018

Exercice 1 : Découpe d'une plaque d'acier

NB. Dans cet exercice, l'unité de mesure d'angle utilisée est le degré.

Partie 1 : Découpe de pièces triangulaires

1. Schéma numéro 1.

Les figures de référence sont celles de l'énoncé (schéma 1 et 2).

1.a. Le triangle *ABE* étant un triangle équilatéral, chacun de ses angles a pour mesure 60° et ses trois hauteurs sont de longueur égale. Soit *E'* le milieu de [*AB*] et pied de la hauteur issue de *E*. Le triangle *AEE'* est un triangle rectangle d'hypoténuse [*AE*] et dont la hauteur [*EE'*] est le côté de l'angle droit opposé au sommet *A* : $EE' = AE\sin 60° = AE \times \frac{\sqrt{3}}{2}$. En employant les notations en usage dans cet exercice : $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.b. La surface du triangle *ABE* s'exprime en fonction de *a* et de *h* : $aire(ABE) = \frac{1}{2} \times h \times a$, puis en fonction de *a* seulement : $aire(ABE) = \frac{1}{2} \times \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times a \; = \; a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Sachant que le triangle *ABE* doit avoir pour surface 20 m^2 : $a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 20$ et donc $a^2 = \frac{80}{\sqrt{3}}$

On en déduit : $a = \sqrt{\frac{80}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$, nombre que nous pouvons aussi bien noter $a = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}$ (la racine quatrième de 3 est le nombre réel dont la puissance quatrième est égale à 3). Le côté du carré permettant de respecter les contraintes est $a = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}$ m, soit 6,80 m à 0,01 m près.

1.c. La surface de la plaque carrée est $a^2 = \frac{80}{\sqrt{3}} = \frac{80\sqrt{3}}{3}$, soit 46,2 m^2 à 0,1 m^2 près.

La surface réellement utilisée étant égale à 20 m^2, la surface d'acier perdue avec cette méthode est $\frac{80\sqrt{3}}{3} - 20$ soit 26,2 m^2 à 0,1 m^2 près. Plus de la moitié de la surface de la plaque est ainsi perdue.

2. Schéma numéro 2.

2.a. L'angle $B\hat{A}D$ est la somme de trois angles : $B\hat{A}D = B\hat{A}E + E\hat{A}F + D\hat{A}F$. Il s'agit d'un angle droit, de mesure 90°. L'angle $E\hat{A}F$ mesure 60° puisque c'est l'angle de sommet *A* du triangle équilatéral *ABC*. Donc la somme des angles deux autres angles $B\hat{A}E + D\hat{A}F$ a pour mesure 30°.

Les triangles *ABE* et *ADF* sont des triangles rectangles, respectivement en *B* et en *D* ; ils ont deux côtés homologues de même longueur : leurs hypoténuses, $AE = AE = a$, et un de leurs côtés de l'angle droit, $AB = AD = c$. Ils sont donc isométriques. Leurs angles homologues sont égaux, et en particulier : $B\hat{A}E = D\hat{A}F$. Les deux angles $B\hat{A}E$ et $D\hat{A}F$ mesurent chacun 15°.

2.b. Le côté de l'octogone [*AB*] est, dans le triangle rectangle *ABE*, le côté de l'angle droit adjacent à l'angle de sommet *A*. $AB = AE\ \cos 15°$. Ce qui donne la relation : $c = a\cos 15° = \dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}\cos 15°$

Une calculatrice nous donne la valeur exacte de $\cos 15°$: $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Nous obtenons : $c = \dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}} \times \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{10}}{\sqrt[4]{3}}$.

Le côté *c* de la plaque que le chef d'atelier doit commander est $c = \dfrac{\sqrt{30}+\sqrt{10}}{\sqrt[4]{3}}$, soit 6,56 m à 0,01 m près.

2.c. La surface de la plaque carrée utilisée dans cette méthode est $c^2 = \dfrac{40\sqrt{3}}{3} + 20$ m^2 soit 43,1 m^2 à 0,1 m^2 près. La surface d'acier perdue avec cette méthode est $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$ soit 23,1 m^2 à 0,1 m^2 près. La perte de surface est moindre qu'avec la première méthode ; néanmoins, plus de la moitié de la plaque est perdue.

2.d. La surface d'acier perdue avec la première méthode était $\dfrac{80\sqrt{3}}{3} - 20$. La surface d'acier perdue avec la deuxième méthode est maintenant $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$. L'économie de métal réalisée par rapport à la première méthode est $\left(\dfrac{80\sqrt{3}}{3} - 20\right) - \dfrac{40\sqrt{3}}{3} = \dfrac{40\sqrt{3}}{3} - 20$.

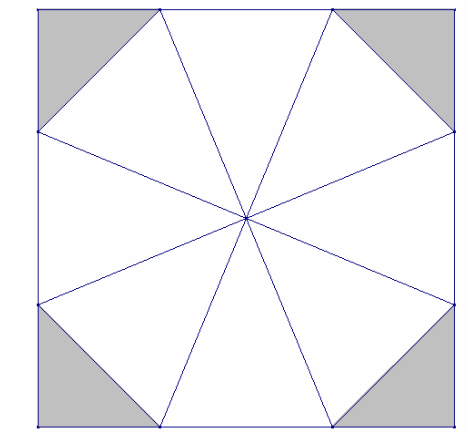
Le pourcentage d'acier gagné par rapport à la première proposition de découpe est : $\dfrac{\dfrac{40\sqrt{3}}{3} - 20}{\dfrac{80\sqrt{3}}{3} - 20} \times 100$, c'est-à-dire 11,81 %

Partie 2 : Découpe de pièces octogonales

1. On note a le côté de l'octogone régulier et c le côté du carré.

L'octogone peut être découpé en huit triangles isocèles isométriques dont le sommet commun est le centre de la plaque et dont la base est le côté a de l'octogone.

Soit h leur hauteur. L'aire de chacun d'entre eux est égale d'une part au produit $\frac{1}{2} \times a \times h$ et d'autre part au huitième de l'aire de l'octogone, c'est à dire $\frac{20}{8}$. On en déduit : $a\,h = \frac{40}{8} = 5$



Or, ces huit triangles sont deux à deux symétriques par rapport au centre de la plaque. La distance c entre un côté de la plaque et le côté opposé de cette plaque est égale à deux fois la hauteur h d'un des triangles. Donc : $a\,c = 2\,a\,h = 10$

2. Les quatre triangles grisés sur la figure ci-dessus sont des triangles rectangles isocèles isométriques, dont la base est un côté de l'octogone, de longueur a, et dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Un côté du carré peut être subdivisé en trois segments, dont un a pour longueur a et les deux autres ont pour longueur le côté de l'angle droit $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ d'un de ces triangles rectangles isocèles : $c = a + 2 \times \frac{a\sqrt{2}}{2} = a\left(1+\sqrt{2}\right)$

3. Vu que $a\,c = 10$ et que $c = a\left(1+\sqrt{2}\right)$, a vérifie la relation $a^2\left(1+\sqrt{2}\right) = 10$, et donc : $a^2 = \frac{10}{1+\sqrt{2}}$.

On en déduit la valeur exacte de a : $a = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ puis celle de c : $c = \left(1+\sqrt{2}\right).\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} = \sqrt{10}.\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$

Des valeurs approchées de a et de c à 0,01 m près sont, respectivement, 2,04 m et 4,91 m.

4. La surface de la plaque carrée utilisée dans cette circonstance, exprimée en m^2, est : $c^2 = 10\left(1+\sqrt{2}\right)$ soit 24,1 m^2 à 0,1 m^2 près.

La surface de métal perdue est : $c^2 - 20 = 10\left(\sqrt{2}-1\right)$ soit 4,1 m^2 à 0,1 m^2près.

Partie 3 : Découpe d'un disque, ou presque

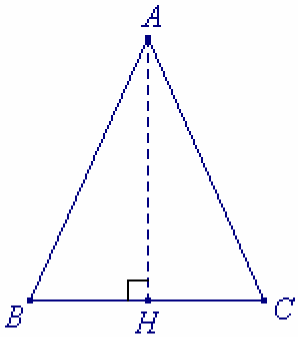
1. Le côté de la plaque carrée doit être supérieur ou égal au diamètre d'un disque d'aire 20, c'est-à-dire de rayon : $\sqrt{\dfrac{20}{\pi}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$. Ce côté doit être supérieur ou égal à $\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$.

Le chef d'atelier devrait commander une plaque de côté $\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$ [1] au minimum. Ainsi, une plaque de côté 5,05 m convient mais une plaque de côté 5,04 m ne convient pas.

2. *Prérequis pour cette question et la suivante* :

Dans un triangle isocèle ABC de sommet A, de base $BC = a$, de hauteur $AH = h$ (où H est le milieu de [AB]) et d'angle au sommet de mesure θ, on dispose de la relation entre ces trois paramètres : $\dfrac{a}{2} = h.\tan\dfrac{\theta}{2}$ (en considérant les relations trigonométriques dans l'un des triangles AHB ou AHC).

La surface de ce triangle s'exprime ainsi en fonction de la hauteur et de la mesure de son angle au sommet : $aire(ABC) = \dfrac{1}{2}\times a\times h = h^2.\tan\dfrac{\theta}{2}$



Le polygone régulier à 16 côtés peut être découpé en 16 triangles isocèles isométriques de sommet commun le centre de la plaque et dont la base est égale au côté a du polygone.

La surface de chacun d'entre eux est égale au seizième de l'aire de l'octogone et l'angle au sommet de chacun d'entre eux a pour mesure $\dfrac{360}{16}$.

Soit h leur hauteur. En utilisant le « prérequis » avec les données dont nous disposons : $h^2.\tan\dfrac{360}{32} = \dfrac{20}{16}$, c'est-à-dire que : $h^2 = \dfrac{20}{16.\tan\dfrac{360}{32}} = \dfrac{5}{4.\tan\dfrac{45}{4}}$

Comme dans la question précédente, ces triangles étant deux à deux symétriques par rapport au centre de la plaque, nous disposons aussi de la relation : $c = 2h$.

On en déduit : $c^2 = 4h^2 = \dfrac{5}{\tan\dfrac{45}{4}}$ et par suite $c = \sqrt{\dfrac{5}{\tan\dfrac{45}{4}}}$.

La valeur exacte du côté que le chef d'atelier doit commander est : $c = \sqrt{\dfrac{5}{\tan\dfrac{45}{4}}}$ .Une calculatrice affiche 5,014 comme valeur approchée de c par excès à 0,001 près.

[1] On note dans l'énoncé un emploi judicieux du conditionnel : « quel *devrait* être le côté … ». Le nombre idéal est un nombre irrationnel qui n'est pas constructible à la règle et au compas. Il est humainement impossible de réaliser matériellement une plaque dont le côté mesure exactement $\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$.

3. Le chef d'atelier a reçu une plaque de côté un peu plus grand qu'il ne faudrait. On remarque en effet que les polygones réguliers découpés dans cette plaque auront une surface plus grande que celle du disque de 20 m^2 puisque les côtés de ces polygones seront tangents extérieurement à ce disque idéal.

Un polygone régulier à 2^n côtés peut être découpé en 2^n triangles isocèles isométriques de sommet commun le centre de la plaque et d'angle au sommet de mesure $\dfrac{360}{2^n}$. Dans cette question, on connaît la hauteur commune à tous ces triangles isocèles, à savoir $h = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$, la moitié du côté de la plaque « idéale » (en imaginant qu'elle existe) prévue pour une découpe circulaire. La surface d'un tel triangle est $h^2 . \tan \dfrac{360}{2^{n+1}}$

La surface du polygone est : $2^n \times \left(h^2 . \tan \dfrac{360}{2^{n+1}} \right) = 2^n \times \left(\dfrac{20}{\pi} . \tan \dfrac{360}{2^{n+1}} \right) = 2^{n+2} . \dfrac{5}{\pi} . \tan \dfrac{360}{2^{n+1}}$.

Il s'agit de trouver la première valeur de n pour laquelle $2^{n+2} . \dfrac{5}{\pi} . \tan \dfrac{360}{2^{n+1}} \leq 20{,}01$

Une tabulation des surfaces des polygones suivant le nombre de ses côtés donne les résultats ci-contre.

Cette tabulation atteste que, pour que la différence avec une découpe circulaire d'exactement 20 m^2 n'excède pas 0,01 m^2, il faut prévoir un polygone à 128 côtés.

	A	B	C	D	E
=	=seq(2^n,n,3,10)	=seq(2^(n+2)*(5/(π))*tan(360/2^(n			
1	8.	21.0957			
2	16.	20.261			
3	32.	20.0645			
4	64.	20.0161			
5	128.	20.004			
6	256.	20.001			
7	512.	20.0003			
8	1024.	20.0001			
9					
10					

B $=\mathrm{seq}\left(2^{n+2} \cdot \frac{5}{\pi} \cdot \tan\left(\frac{360}{2^{n+1}}\right), n, 3, 10\right)$

Exercice 2 : Construction d'un jeu de cartes

1. Codage des trois cartes selon Manon : $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{b, c\}$

2.a. Supposons que l'on souhaite inscrire un troisième symbole sur chacune des cartes. Trois symboles distincts et inédits doivent être utilisés, puisque les symboles *a, b, c* ne peuvent plus être réutilisés. Ces trois symboles coderont une nouvelle carte. On obtient un codage de quatre cartes en utilisant six symboles différents : $\{a, b, d\}$; $\{a, c, e\}$; $\{b, c, f\}$; $\{d, e, f\}$

Si l'on souhaite inscrire sur ces cartes un quatrième symbole, il faudra utiliser quatre symboles distincts et inédits qui coderont une cinquième carte. On obtient un codage de cinq cartes en utilisant dix symboles différents. Il faudra 15 symboles différents dont cinq distincts et inédits pour coder six cartes, chacune avec cinq symboles.

Et ainsi de suite … Nous sommes en droit d'admettre que le codage de *n* cartes $(n \geq 2)$, chacune avec $(n-1)$ symboles, nécessite $s_n = 1 + 2 + ... + (n-1)$ symboles différents.

La démonstration rigoureuse de ce résultat nécessite une forme de raisonnement qui relève du programme de Terminale, le « raisonnement par récurrence ». Ce raisonnement consiste à vérifier qu'une formule déjà testée et reconnue exacte pour au moins un entier possède en outre la propriété « d'hérédité » c'est-à-dire que son exactitude pour entier n implique son exactitude pour l'entier suivant $(n+1)$. *Cette « hérédité », lorsqu'elle est vérifiée, assure l'exactitude de la formule en cause à partir de l'entier ayant servi pour le test :*

Supposons codées *n* cartes $(n \geq 3)$, chacune avec $(n-1)$ symboles, en utilisant $s_n = 1 + 2 + ... + (n-1)$ symboles différents. Si l'on souhaite coder avec un symbole supplémentaire, il sera nécessaire d'utiliser *n* nouveaux symboles, qui devront coder une nouvelle carte. On obtient un codage de $(n+1)$ cartes, chacune avec *n* symboles, en utilisant $s_{n+1} = 1 + 2 + ... + (n-1) + n$ symboles différents. Si la formule conjecturée est exacte pour le codage de *n* cartes, alors elle est encore exacte pour le codage de $(n+1)$ cartes : cette formule est effectivement « héréditaire ».
Le plus petit entier pour lequel nous avons établi que la formule $s_n = 1 + 2 + ... + (n-1)$ donnant le nombre de symboles différents est exacte est l'entier 3. Nous pouvons conclure qu'elle est exacte pour tout entier $n \geq 3$.

2.b. Le codage de 7 cartes nécessite six symboles pour chacune et $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ symboles différents.

2.c. D'après la formule donnant la somme des $(n-1)$ premiers entiers : $s_n = 1 + 2 + ... + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Il s'agit de déterminer s'il existe une valeur entière positive de *n* telle que $\dfrac{n(n-1)}{2} = 300$, ce qui amène à résoudre l'équation : $n^2 - n - 600 = 0$. Cette équation a deux solutions, -24 et 25.

Avec 300 symboles, on peut coder un jeu de 25 cartes.

3. Notons 1, 2 et 3 les trois cartes où figure le symbole a_1.
Ces trois cartes étant codées $\{a_1, a_2, a_3\}$; $\{a_1, a_4, a_5\}$; $\{a_1, a_6, a_7\}$, les symboles a_i, $2 \leq i \leq 7$ sont tous distincts, sinon deux des cartes auraient au moins deux symboles en commun. Le codage des sept cartes nécessite au moins sept symboles.

Sans diminuer la généralité, on peut supposer que la carte numéro 4 est codée $\{a_2,\ a_4,\ a_6\}$ (elle a en effet un symbole commun autre que a_1 avec chacune des cartes 1, 2 et 3) Le symbole a_2 code encore une carte, qu'on numérote carte 5. Cette carte est nécessairement codée $\{a_2,\ a_5,\ a_7\}$, sinon elle aurait deux symboles communs avec la carte 4. Il reste deux cartes, codées nécessairement avec a_3. Leur codage complet est nécessairement $\{a_3,\ a_4,\ a_7\}$; $\{a_3,\ a_5,\ a_5\}$ sinon ces cartes auraient deux symboles communs avec l'une des cartes 3 ou 4. Par conséquent, sept symboles suffisent à coder les sept cartes.

Le choix de sept symboles est nécessaire et suffisant.

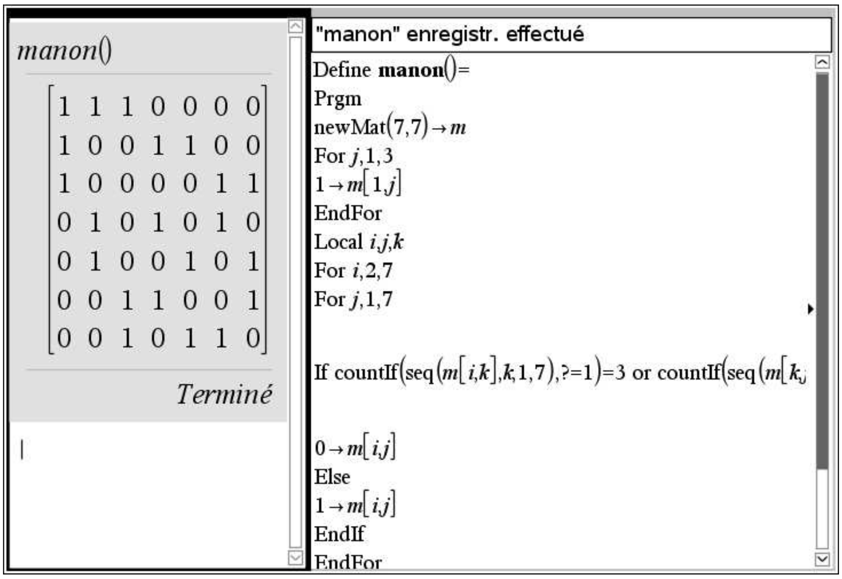
4.a. L'écriture d'un « 1 » dans la case $(i,\ j)$ signifie que sur la carte numéro i figure le symbole numéro j.

4.b. S'il y a déjà trois « 1 » sur la ligne i , la carte numéro i est complètement codée. Il ne peut pas y avoir d'autre symbole sur cette carte.

4.c. S'il y a déjà trois « 1 » sur la colonne j, le symbole carte numéro j a déjà été utilisé trois fois. Il ne peut plus être utilisé pour coder une autre carte.

4.d. La règle en question est que deux cartes distinctes ont un et un seul symbole en commun. Si un « 1 » était inscrit dans les quatre cases $(k,\ j)$; $(k,\ l)$; $(i,\ l)$; $(i,\ j)$, cela voudrait dire que les cartes numéros i et k auraient en commun les deux symboles numéros j et l.

4.e. Il semble que cette répartition convienne. Comparer avec la discussion de la question **3**.



5. Deux cartes distinctes ont en commun un symbole et un seul. Les sept autres symboles qui apparaissent sur l'une des cartes n'apparaissent pas sur l'autre : 14 symboles différents apparaissent sur une et une seule des deux cartes, sept sur l'une et sept sur l'autre.
Puisque chaque symbole apparaît sur 8 cartes, si ces deux cartes ont été égarées :

- 14 symboles n'apparaissent que sur 7 des 55 cartes restantes.
- Un symbole (le symbole commun aux deux cartes égarées) n'apparaît que sur 6 des 55 cartes restantes.

6.a. D'une part, il y a s symboles différents, chacun apparaissant sur n cartes. Le nombre total N de symboles apparaissant dans le jeu est : $N = n \times s$

D'autre part, il y a c cartes, chacune codée avec n symboles. Le nombre total N de symboles apparaissant dans le jeu est : $N = n \times c$

Par conséquent : $N = n \times c = n \times s$, ce qui implique que $c = s$. Le nombre de cartes est égal au nombre de symboles différents.

*Prérequis pour les questions **6.b** et **6.c***

Soit $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ un ensemble de n éléments, n étant un entier tel que $n \geq 2$. On appelle « paire » d'éléments de E toute partie de E possédant exactement deux éléments.

Théorème : Le nombre de paires d'éléments de E est égal à : $\dfrac{n(n-1)}{2}$

En effet, considérons d'abord le nombre de couples d'éléments distincts (e_i, e_j) où $i \neq j$. Pour construire un tel couple, il y a n façons différentes de choisir son premier élément e_i et il y a $(n-1)$ façons de choisir son second élément e_j (on ne peut pas choisir le même élément que celui choisi en premier). Il y a donc $n \times (n-1)$ couples d'éléments distincts (e_i, e_j) où $i \neq j$.

Or, à chaque paire $\{e_i, e_j\}$ d'éléments de E correspond exactement deux couples d'éléments distincts, le couple (e_i, e_j) et le couple (e_j, e_i) (l'ordre compte pour définir un couple, il ne compte pas pour définir une paire). Le nombre de paires est égal à la moitié du nombre de couples.

L'analogie avec la somme des premiers entiers n'est pas une coïncidence. Il est possible en effet de classer les paires selon leur élément de plus petit indice : $(n-1)$ paires dont l'élément de plus petit indice est e_1, $(n-2)$ paires dont l'élément de plus petit indice est e_2, $(n-3)$ paires dont l'élément de plus petit indice est e_3, …, une paire dont l'élément de plus petit indice est e_{n-1}. Ce qui fait en tout $(n-1)+(n-2)+...+2+1$ paires.

6.b. Compte tenu du prérequis, avec les c cartes du jeu, on peut réaliser $\dfrac{c(c-1)}{2}$ paires distinctes.

6.c. Compte tenu du prérequis, avec les n cartes du jeu ayant en commun un même symbole, on peut réaliser $\dfrac{n(n-1)}{2}$ paires distinctes.

6.d. Les paires de cartes distinctes que l'on peut réaliser avec les cartes du jeu peuvent être triées suivant le symbole commun à deux cartes. $\dfrac{n(n-1)}{2}$ paires partagent un même symbole commun et il y a $s = c$ symboles différents. Le nombre de paires de cartes distinctes que l'on peut réaliser est donc égal à $\dfrac{n(n-1)}{2} \times c$

On en déduit l'égalité : $\dfrac{n(n-1)}{2} \times c = \dfrac{c(c-1)}{2}$, égalité qui donne la relation $c-1 = n(n-1)$ puisque c est supposé non nul, et ensuite la relation : $c = n(n-1)+1$.

(Lorsque $n = 8$, comme c'était le cas dans la question **5** : $c = 57$).