SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'AIX - MARSEILLE

Classes de première S • 2017

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie d'Aix-Marseille

Mercredi 15 mars 2017

Série S

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Cette sous-épreuve comporte deux exercices, à traiter dans le temps imparti.

Pour les candidats composant en binôme une seule copie est à rendre, avec le nom des deux élèves ayant composé.

Durée de la composition : 2 heures

Ce sujet comporte 3 pages dont celle-ci.

Exercice 1 : les souris goûteuses

Un roi a déjoué un complot visant à l'empoisonner. En effet, il s'avère qu'une et une seule bouteille de vin de sa cave personnelle a été contaminée !
Un dresseur de souris, ami du roi, propose de dénicher cette bouteille en faisant goûter des mélanges des bouteilles à ses petits compagnons.
Lorsqu'une souris goûte du vin empoisonné, elle meurt le lendemain.

Le but de l'exercice est d'étudier deux méthodes permettant d'identifier la bouteille empoisonnée à l'aide de ces souris.

Partie 1

1) Il y a 2 bouteilles suspectes. Prouver qu'une souris suffit à déterminer la bouteille empoisonnée en un jour.

2) Il y a 8 bouteilles suspectes.
Le dresseur propose de les partager équitablement en 2 lots, de déterminer dans quel lot se trouve la bouteille empoisonnée et de recommencer jusqu'à l'identifier avec certitude.
Prouver qu'il suffit de 3 souris au maximum en 3 jours.

3) Il y a 1024 bouteilles suspectes. Le dresseur applique la même méthode.
a. Combien de jours seront nécessaires pour identifier la bouteille empoisonnée ?
b. Calculer la probabilité qu'il y arrive à l'aide d'une seule souris.

4) La cave du roi est en réalité constituée de 1000 bouteilles exactement, toutes suspectes.
Le dresseur décide d'appliquer la méthode décrite précédemment en partageant à chaque fois les bouteilles suspectes en 2 lots, aussi équitablement que possible.
a. Expliquer comment le dresseur peut identifier la bouteille empoisonnée en 9 jours au plus tôt.
b. Calculer la probabilité qu'il détermine la bouteille empoisonnée en 9 jours.

Partie 2

Le roi doit donner un grand banquet le lendemain soir et souhaite donc identifier en un jour seulement la bouteille empoisonnée. Cependant, le dresseur souhaite utiliser le moins de souris possible.

1) Après réflexion, le dresseur affirme qu'avec 2 souris il peut identifier pour le lendemain la bouteille empoisonnée parmi 4 bouteilles suspectes.
Il griffonne alors le tableau suivant :

Bouteille	1	2	3	4
Souris 1	1	0	0	1
Souris 2	0	1	0	1

Prouver que 2 souris suffisent à trouver la bouteille empoisonnée en un jour.

2) Il y a six bouteilles suspectes. Peut-on avec trois souris trouver la bouteille empoisonnée en un jour ? Comment ?

3) Quelle est le nombre maximal de bouteilles pouvant être testées avec 3 souris ?

4) Avec cette stratégie, combien de souris sont nécessaires pour tester les 1000 bouteilles de la cave en en un jour ?

Exercice 2 : saluts mathématiciens

1) Lors d'un séminaire international de mathématiques, les voitures des délégations de trois pays, la France, la Belgique et le Canada, arrivent en même temps sur le parking de l'université.
Il y a 4 Français, 3 Belges et 5 Canadiens.
Lorsqu'ils se rencontrent, les mathématiciens de nationalité différente se serrent la main.
Combien de poignées de mains sont alors échangées ?

2) Ayant apprécié le séminaire, ces mêmes mathématiciens se donnent rendez-vous l'année suivante. Ils se connaissent désormais un peu mieux et quand ils se rencontrent, les mathématiciens de nationalité différente se font la bise. Mais la coutume est différente dans chaque pays : les Français ont l'habitude de faire deux bises, les Belges en font une et les Canadiens en font trois. Lorsque deux personnes se rencontrent, c'est le nombre de bises de celui qui en fait le plus qui est échangé.
En arrivant sur le parking ils sont tous là, sauf un qui est tombé malade, et 106 bises sont échangées.
Quelle est la nationalité du participant qui est tombé malade ?

3) L'année suivante, pour le grand colloque international, les délégations des trois pays sont élargies et arrivent chacune dans un minibus différent. En arrivant sur le parking de l'université les mathématiciens de nationalité différente se saluent en échangeant des bises comme l'année précédente.
En tout, 648 bises sont échangées, et on compte 27 mathématiciens. L'un d'entre eux fait remarquer que les Canadiens sont deux fois plus nombreux que les Belges.
Déterminer le nombre de mathématiciens de chaque nationalité.

4) Face au succès de ce colloque, il est renouvelé l'année suivante. Le nombre de mathématiciens de chaque pays a changé. Les trois délégations arrivent dans des minibus qui peuvent transporter jusqu'à 12 mathématiciens. Arrivés sur le parking de l'université, ils observent le même rituel de salut que l'année précédente, et 640 bises sont échangées.
On cherche le nombre de participants de chaque nationalité.

a. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche toutes les solutions possibles.

Variables	f, b, c et n sont des nombres entiers

Traitement	Pour f allant de …. à ….
	    Pour b allant de …. à ….
	        Pour c allant de …. à ….
	            n prend la valeur ….
	            Si n = …
	                Afficher « une solution est : » f, b, c
	                    Pause
	            Fin si
	        Fin pour
	    Fin pour
	Fin pour

b. On sait que les français étaient les plus nombreux. Combien y avait-il de mathématiciens de chaque nationalité ?

Les souris goûteuses – corrigé – Série S

Partie 1

1) Il y a 2 bouteilles, numérotées 1 et 2. La souris en goûte une, par exemple la 1. Si elle meurt le lendemain, la bouteille 1 est empoisonnée. Si elle survit, c'est la 2.

2) Les 8 bouteilles sont séparées en 2 lots de 4.
Le premier jour, une souris goûte un mélange du premier lot. Si elle survit, la bouteille empoisonnée est dans le 2ème lot, sinon dans le 1er. Au bout d'un jour, on a donc isolé 4 bouteilles suspectes, et notre souris a soit survécu (elle est prête pour le 2ème jour), soit non (auquel cas on engage une deuxième souris).
Le deuxième jour, on fait goûter 2 des 4 bouteilles suspectes à une souris: si elle meurt, la bouteille empoisonnée est dans ce mélange de 2. Si elle survit, elle est dans les 2 autres. Au bout de deux jours, on n'a plus que 2 bouteilles suspectes, et on a utilisé entre 0 et 2 souris.
Le troisième jour: c'est la question 1: il faut un jour et une souris, qui peut survivre, ou non.
Au final, 3 jours sont nécessaires. Pour être absolument certain de trouver la bouteille, il faut 3 souris. Si on n'a pas de chance, elles meurent toutes. Si par contre on est verni, la même souris goûte chaque jour et peut survivre.

3) a. On remarque que $1024=2^{10}$, on peut donc diviser les bouteilles en lots égaux 10 fois de suite: il faudra donc 10 jours, une division nécessitant une journée de test.
Le nombre de souris nécessaire est 10, sachant qu'elles ne mourront pas forcément toutes (avec beaucoup de chance, elles peuvent toutes survivre, si la souris goûte à chaque fois le lot où ne se trouve pas la bouteille empoisonnée, et dans le cas contraire, elles peuvent toutes mourir).
b. Il peut y arriver avec une seule souris si lors des 9 premiers tests la souris tombe sur le mélange ne contenant pas la bouteille empoisonnée. Au cours de chaque test, la probabilité que cela arrive est de 0,5. Le principe multiplicatif permet donc de calculer la probabilité de cet événement :

$$p=\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{512}\approx 0,002$$

4) a. On procède comme précédemment mais on ne va pas pouvoir toujours diviser en 2 lots égaux.
Il est difficile de prouver l'optimalité de la solution mais on peut accepter une solution comme:
- La stratégie fonctionne comme auparavant pendant 3 jours: le premier jour, on a 2 lots de 500 bouteilles, le deuxième, 2 lots de 250, le troisième, 2 lots de 125. Au bout de 3 jours, on a donc isolé 125 bouteilles suspectes et consommé jusqu'à 3 souris.
- Le jour 4 on fait un lot de 62 et un lot de 63 bouteilles.
- Le jour 5, on fait 2 lots de 31 (si c'est le lot de 62 qui est suspect), ou un lot de 31 et un lot de 32.
- Le jour 6, si on part d'un lot de 31, on fait un lot de 15 et un de 16; si c'est un lot de 32, deux lots de 16. Les lots de 16 sont "remis sur les rails" des puissances de 2 et nécessitent 4 jours, soit 10 au total. On peut gagner un jour si on a de la chance et que la bouteille suspecte est dans le lot de 15.
- Dans ce cas, le jour 7 on divise en 7 et 8. On aura de la chance si c'est dans le lot de 7 (le lot de 8 nécessitant 3 jours).
- Dans ce cas, le jour 8 on a un lot de 3 et un lot de 4. On aura de la chance si c'est dans le lot de 3.
- Dans ce cas, le jour 9 on a un lot de 1 et un lot de 2. Si la bouteille incriminée est dans le lot de 1, c'est gagné en 9 jours.

b. Un arbre permet de mettre en évidence deux chemins permettant d'aboutir en 9 étapes. On peut les décrire en donnant le nombre de bouteilles successifs parmi lesquelles se trouve la bouteille empoisonnée :
1000 – 500 – 250 – 125 – 63 – 31 – 15 – 7 – 3 – 1

de probabilité : $p_1 = \frac{63}{125} \times \frac{31}{63} \times \frac{15}{31} \times \frac{7}{15} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{125}$

et 1000 – 500 – 250 – 125 – 62 – 31 – 15 – 7 – 3 – 1

de probabilité : $p_2 = \frac{62}{125} \times \frac{31}{62} \times \frac{15}{31} \times \frac{7}{15} \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{125}$

La probabilité d'un événement étant la somme des probabilités des chemins qui le réalisent, on obtient donc $p = p_1 + p_2 = \frac{2}{125} = 0{,}16$

Bon, cette méthode est tout de même peu satisfaisante: on peut supposer que la cave du roi est constituée de grands crus exceptionnels, et c'est un peu dommage de les laisser s'éventer ouverts pendant 10 jours ! D'où la nécessité de la partie 2.

Partie 2

1) On peut remarquer que le tableau nous donne directement quelles souris meurent en fonction de la bouteille empoisonnée: il suffit de lire les colonnes, s'il y a un 1, la souris correspondante meurt. Ainsi: si c'est la bouteille 1, la souris 1 meurt et l'autre vit. Si c'est la bouteille 2, la souris 1 meurt et la 2 vit. Si c'est la 3, les deux vivent. Si c'est la 4, les 2 meurent. Ce sont 4 résultats différents qui permettent donc de conclure à coup sûr en un jour, en utilisant 2 souris. Le nombre de souris mortes sera 0 (bouteille 3) 1 (bouteilles 1 et 2) ou 2 (bouteille 4).

2) On dessine de même un tableau en se débrouillant pour que les combinaisons de 0 et de 1 soient différentes dans chaque colonne. (attention: plusieurs solutions sont possibles!)

Bouteille	1	2	3	4	5	6
Souris 1	0	1	0	0	1	0
Souris 2	1	1	0	1	0	0
Souris 3	1	0	1	0	0	0

Dans ce tableau j'ai choisi de ne pas utiliser la possibilité de faire goûter une bouteille par toutes les souris pour maximiser le nombre de souris survivantes.
Ainsi:
bouteille 1 empoisonnée: la souris 1 vit, les 2 et 3 meurent, etc etc. On constate que tous les résultats sont différents et permettent de conclure.

3) Le nombre de bouteilles que l'on peut tester avec 3 souris correspond à toutes les manières d'écrire un nombre de 3 chiffres binaires: 111, 110, 101, 011, 100, 010, 001, 000, c'est à dire 2^3=8 bouteilles. Le tableau peut ressembler à cela (encore une fois, de nombreuses permutations sont possibles et le tableau n'est pas demandé sur cette question):

Bouteille	1	2	3	4	5	6	7	8
Souris 1	1	1	1	0	1	0	0	0
Souris 2	1	1	0	1	0	1	0	0
Souris 3	1	0	1	1	0	0	1	0

4) 1024=2^{10} bouteilles, on peut écrire 1024 nombres différents de 10 bits, 10 souris sont donc nécessaires et permettent de trouver la bouteille en un jour. Evidemment, écrire quelles bouteilles doivent être goutées par chaque souris est un peu fastidieux, mais n'a rien d'impossible, il suffit d'être méthodique.
NB: si on considère 1000 bouteilles, il faut toujours 10 souris, 9 souris ne permettant de tester que 2^9=512 bouteilles. On peut juste maximiser les chances de survie en éliminant les 24 nombres les plus chargés en 1 de la solution.

Le mot du correcteur : tout ceci n'explique pas comment on peut introduire du poison dans une bouteille de vin fermée sans que cela ne se voit sur le bouchon !

Saluts mathématiciens – Corrigé (Série S)

1) Chacun des 4 Français serrera la main des 3 Belges. Il y aura donc $3\times 4=12$ poignées de main entre Français et Belges.
De même, il y en aura $4\times 5=20$ entre Français et Canadiens, et $3\times 5=15$ entre Belges et Canadiens.
En tout, c'est donc $12+15+20=47$ poignées de main qui seront échangées.

2) En notant f le nombre de Français, b le nombre de Belges et c le nombre de canadiens, le nombre N de bises échangées est donné par : N = 2bf + 3bc + 3fc.
Il y a 3 solutions à tester :

- Si c'est un Français qui est malade, on a alors f = 3, b = 3 et c = 5. On calcule N = 108.
- Si c'est un Belge qui est malade, on a alors f = 4, b = 2 et c = 5. On calcule N = 106.
- Si c'est un Canadien qui est malade, on a alors f = 4, b = 3 et c = 4. On calcule N = 108.

C'est donc un mathématicien Belge qui est tombé malade.

3) Les données du problème permettent d'écrire le système de 3 équations à 3 inconnues suivant :

$$\begin{cases} 2bf+3bc+3fc=648 \\ f+b+c=27 \\ c=2b \end{cases}$$

En procédant par substitution, on obtient l'équation du second degré en b suivante :
$-18b^2+216b-648=0$ ou encore, en simplifiant par 18 : $-b^2+12b-36=0$
Son discriminant est nul et elle ne possède donc qu'une solution qui est $b=6$.
On trouve ensuite $c=2b=2\times 6=12$ et enfin $f=27-12-6=9$
Il y avait donc 9 Français, 6 Belges et 12 Canadiens.

4)

a.

Variables	f, b, c et n sont des nombres entiers

Traitement	Pour f allant de **0** à **12**
	    Pour b allant de **0** à **12**
	        Pour c allant de **0** à **12**
	            n prend la valeur **2fb + 3fc + 3bc**
	            Si n = **640**
	                Afficher « une solution est : » f, b, c
	                Pause
	            Fin si
	        Fin pour
	    Fin pour
	Fin pour

b. L'exécution du programme donne 4 solutions possibles :
f = 5 , b = 10 , c = 12
f = 7 , b = 11 , c = 9
f = 10 , b = 5 , c = 12
f = 11 , b = 7 , c = 9

Seul la dernière donne un nombre de français supérieur aux autres, c'est donc la solution :
Il y avait 11 Français, 7 Belges et 9 Canadiens.