SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'AIX - MARSEILLE

Classes de première S • 2014

CLASSES DE PREMIERES GÉNÉRALES
ET TECHNOLOGIQUES

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
Académie d'AIX-MARSEILLE
Session 2014

Durée : 4 heures

Série S

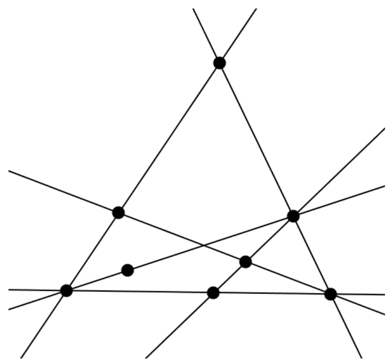
Les calculatrices sont autorisées.

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche qu'il aura développée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte **7 pages** dont celle-ci.

Exercice 1 : Figures équilibrées

La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.

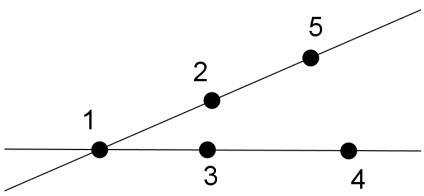


Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.

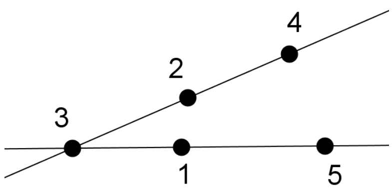
1. Construire une figure équilibrée constituée :
   a) de 7 points marqués et 5 droites ;
   b) de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.
Cette numérotation est alors dite ***magique*** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



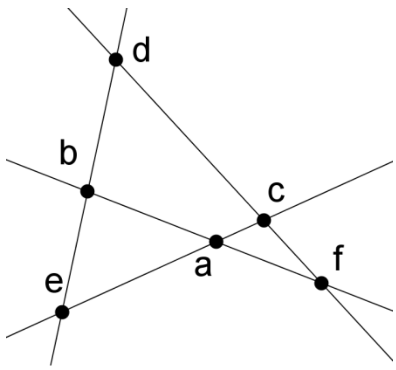
$K = 8$



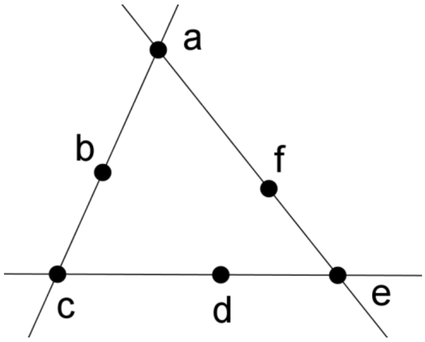
$K = 9$

Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.
   a) Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
   b) Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
   Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.



4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* sur la figure.

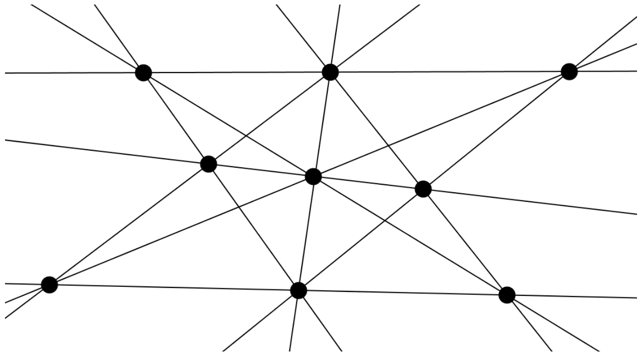


a) Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.

b) Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a+c+e=3(K-7)$.

c) Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.

5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.
Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



Exercice 2 : Le plus court possible

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.
La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.
« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.
« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

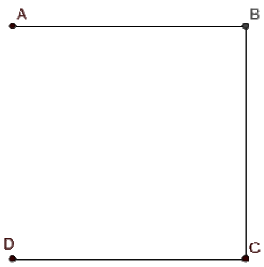


fig. 1
Assistant n°1

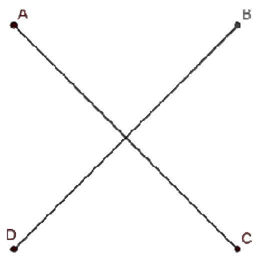


fig. 2
Assistant n°2

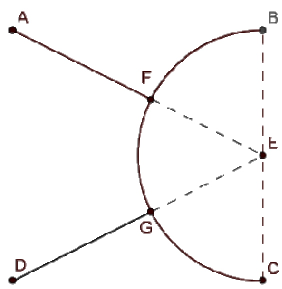


fig. 3
Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :
« On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

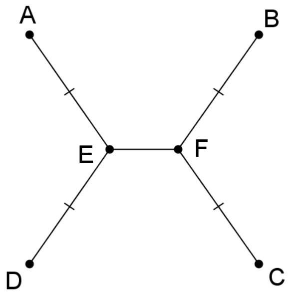


fig. 4

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :
Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :
on a toujours AB + BC ≥ AC ;
on a l'égalité AB + BC = AC si, et seulement si, B appartient au segment [AC].

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.
On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100 km de côté, comme dans le dessin suivant.

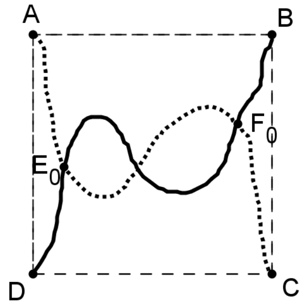


fig. 5

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.
En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).
Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

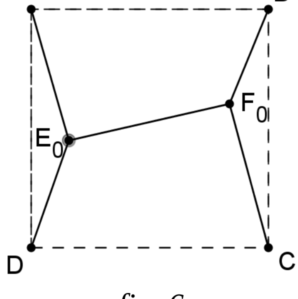


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

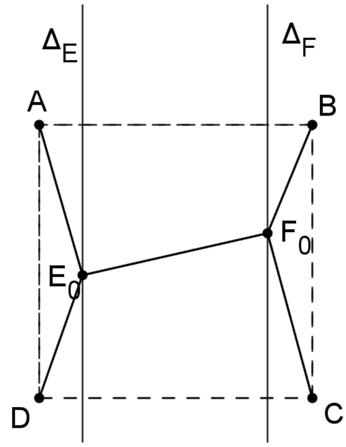


fig. 7

a) Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.
On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b) Montrer que $EF \leq E_0F_0$.

c) Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

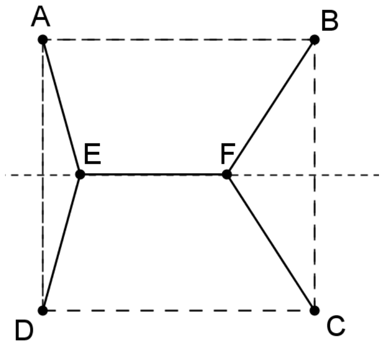


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

a) Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].

b) D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).
Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

c) Quelle est alors la valeur de l'angle DEA ?

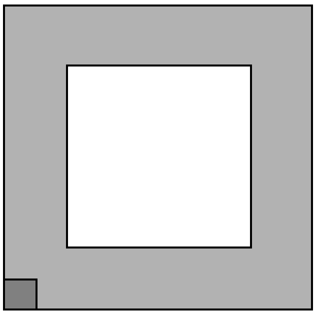
Exercice 3 : Hôtel de luxe

Partie A

Lors de la construction de l'hôtel de luxe l'Olympe, on demande à un carreleur d'orner la mosaïque suivante avec 328 petits carreaux (carrés) de telle façon que :

– tous les carreaux doivent être utilisés sans être cassés/coupés et doivent recouvrir complètement la partie grisée ;
– les bordures intérieures et extérieures forment deux carrés de même centre et de bords parallèles.

Les côtés de chacun de ces deux carrés sont donc constitués d'un nombre entier de carreaux.



L'objectif de cette partie est de déterminer les dimensions des carrés qui délimitent la mosaïque.
Notons n et $n+h$ les nombres de carreaux qui ornent respectivement un côté du carré intérieur et un côté du carré extérieur.

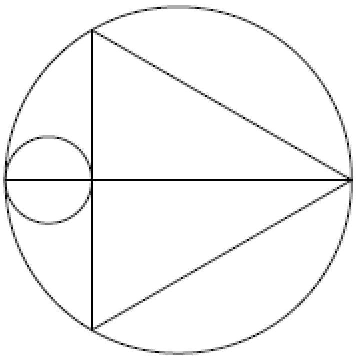
1. Montrer que $h(2n+h)=328$.

2. $328=1\times328$. Donner trois autres décompositions de 328 comme produit de deux nombres entiers (on admettra qu'il n'y en pas d'autres).

3. Donner toutes les valeurs possibles de n et h permettant de carreler cette mosaïque avec 328 carreaux, sans les couper.

Partie B

Lors de la construction de ce même hôtel, on demande à un jardinier d'aménager un parterre de roses dans un jardin circulaire dont on donne le plan ci-dessous :



– Le parterre de roses est représenté par le petit disque ;
– L'aire du jardin est $16\pi\ \text{m}^2$;
– Le triangle est équilatéral ;

Quelle sera la surface au sol du parterre de roses ?

Exercice 4 : Les tas d'allumettes

Règles du jeu : devant les deux joueurs de ce jeu, se trouvent des tas d'allumettes. Chaque joueur joue à tour de rôle et doit prendre, dans un seul tas, une ou plusieurs allumettes.

Le joueur gagnant est celui qui prend la dernière allumette.

Partie A : deux tas

On suppose que **votre adversaire commence**.

1. Dans cette question, on considère deux tas de 2 allumettes.

- **a)** Si votre adversaire prend une seule allumette, que devez-vous jouer pour être sûr de gagner ?
- **b)** Expliquez comment, quel que soit le jeu de votre adversaire, vous êtes sûr de gagner.

2. Dans cette question, on considère un tas de 3 allumettes et un tas de 5 allumettes.
Expliquez pourquoi, si votre adversaire joue bien, vous êtes sûr de perdre.

3. Expliquer pourquoi, si les deux tas comprennent le même nombre d'allumettes, vous êtes sûr de gagner et si les deux tas comprennent des nombres d'allumettes différents vous devriez perdre.

Partie B : trois tas

1. Dans cette question, on considère trois tas de 1, 2 et 3 allumettes.
Vous avez convaincu votre adversaire de commencer.
Comment jouer pour être sûr de gagner ?

2. Dans cette question, on considère trois tas de 4, 5 et 6 allumettes.
Pour être sûr de gagner, devez-vous commencer ou pas ?

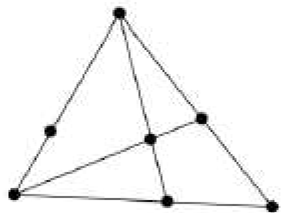
CLASSES DE PREMIERES GÉNÉRALES
ET TECHNOLOGIQUES

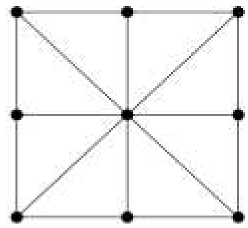
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
Académie d'AIX-MARSEILLE
Session 2014

Série S
CORRIGÉ

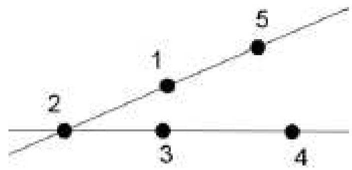
Exercice 1 : Figures équilibrées

1. Voici un graphe équilibré ayant 7 points et 5 segments, puis un graphe équilibré ayant 9 points et 8 segments.

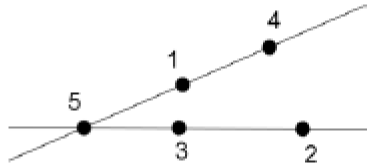




2. Exemple de numérotation non magique :



Exemple de numérotation magique de constante 10 :



On peut montrer que, pour être magique, une numérotation doit avoir au point d'intersection le numéro 1, 3 ou 5 (en raisonnant sur les numéros restants, par couples sur la même droite).

3. **a)** Les quatre segments portent respectivement les sommes a + c + e, a + b + f, b + d + e, c + d + f. La somme de ces quatre sommes est d'une part égale à 4K, et d'autre part : $2(a+b+c+d+e+f)=2(1+2+3+4+5+6)=42$. D'où l'égalité $4K=42$.

b) L'égalité est impossible puisque K est un entier. Donc un tel graphe n'est pas magique.

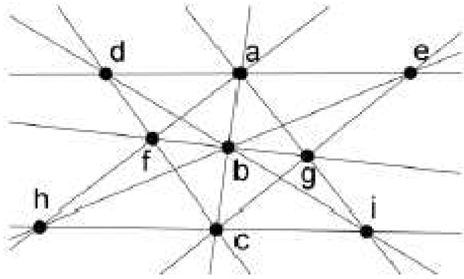
4. **a)** La somme a + c + e est minimale lorsque {a, c, e} = {1, 2, 3}, et cette somme est maximale lorsque {a, c, e} = {4, 5, 6}. D'où $6 \le a+c+e \le 15$.

b) Si le graphe est magique, de constante K, on obtient :
a + b + c = K ; c + d + e = K ; a + f + e = K, d'où, en sommant membre à membre,
(a + b + c + d + e + f) + (a + c + e) = 3K.
Comme a + b + c + d + e + f = 21, on en déduit que (a + c + e) = 3K – 21 = 3(K – 7).

c) On déduit de **a)** et **b)** que $6 \le 3(K-7) \le 15$, d'où $2 \le K-7 \le 5$ et $9 \le K \le 12$.

On vérifie que les quatre valeurs possibles de K donnent effectivement un graphe équilibré magique :
- avec K = 9, on place en tournant depuis un sommet les nombres 1, 5, 3, 4, 2, 6 ;
- avec K = 10, on place en tournant depuis un sommet les nombres 5, 4, 1, 6, 3, 2 ;
- avec K = 11, on place en tournant depuis un sommet les nombres 6, 2, 4, 3, 5, 1 ;
- avec K = 12 , on place en tournant depuis un sommet les nombres 6, 3, 2, 5, 4, 1.

5. On numérote la figure ainsi :



Ces trois sommets a, b, c sont les seuls qui appartiennent à quatre segments, les autres appartenant à trois segments.

On a donc (en additionnant les 10 sommes égales à K) :

$4(a+b+c)+3(d+e+f+g+h+i)=10K$.

On a donc $10K = 3\times(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+(a+b+c)$;

$10K = 3\times 45 + a + b + c$

Comme $1+2+3 \leq a+b+c \leq 7+8+9$, c.-à-d. $6 \leq a+b+c \leq 24$, on trouve que la seule possibilité pour K est K = 15 (et a + b + c = 15).

Selon les cas, le sommet qui porte la valeur 9 appartient à trois ou quatre segments.

Puisque la constante est 15, les deux autres nombres portés sur ces trois ou quatre segments ont pour somme 6. C'est impossible car il n'y a ni trois ni quatre façons d'obtenir une somme égale à 6, mais deux façons seulement : 6 = 1 + 5 = 2 + 4.

Conclusion : le graphe donné n'est pas magique.

Exercice 2 : Le plus court possible

Partie A

1. La longueur du réseau routier de l'assistant n°1 mesure 300 km.

Celle de l'assistant n°2 mesure $200\sqrt{2} \approx 282{,}8$ km (la diagonale d'un carré de côté *a* mesure $a\sqrt{2}$ qui se trouve avec le théorème de Pythagore).

Celle de l'assistant n°3 mesure $100\sqrt{5}-100+50\pi \approx 280{,}7$ km.

ABE est rectangle en B donc $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 12\ 500$ donc $AE = \sqrt{12\ 500} = 50\sqrt{5}$.

Puisque FE est le rayon du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[BC]$ d'où $AF = AE - FE = 50\sqrt{5} - 50$.

D'autre part, le demi-cercle mesure $\dfrac{2\pi\times 50}{2} = 50\pi$. Ce qui donne une longueur totale de $100\sqrt{5}-100+50\pi$.

2. Oui, car il fait $20+4\times\sqrt{50^2+40^2} = 20+40\sqrt{41} \approx 276{,}1$ cm.

Partie B

1. Comme admis au début de l'énoncé : si on trace une courbe quelconque entre deux points sa longueur est toujours au moins égale à celle du segment entre ces deux points.
Donc ici, le premier réseau dessiné par l'énoncé est de longueur supérieure ou égale à celui dessiné avec des segments, en remplaçant en outre les deux courbes entre E_0 et F_0 par un seul segment.

2. a) Notons A' le symétrique de A par rapport à Δ_E. La symétrie conserve les longueurs, on a : $DE_0 + E_0A = DE_0 + E_0A'$. D'après l'inégalité triangulaire, cette somme est toujours supérieure ou égale à DA'. Et il y a égalité si, et seulement si, E_0 appartient au segment $[DA']$. Ainsi, $DE_0 + E_0A$ sera minimale lorsque E_0 sera sur le segment $[DA']$ c'est-à-dire lorsque E_0 est sur la médiatrice de $[DA]$, qu'on appellera médiatrice horizontale du carré.

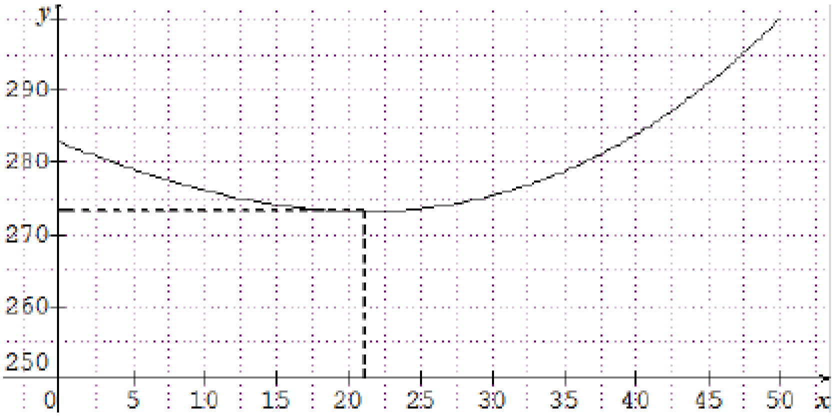
b) La distance minimale entre un point de Δ_E et un point de Δ_F est obtenue lorsque (EF) est perpendiculaire à Δ_E (et donc aussi à Δ_F). En effet, dans le cas contraire, notons G l'intersection de Δ_E et de la perpendiculaire à Δ_E passant par F. Le triangle EFG est alors rectangle en G donc son hypoténuse EF est supérieure à GF (théorème de Pythagore) ce qui ne donnerait pas une longueur minimale.

c) Les droites Δ_E et Δ_F étant fixées, pour tout réseau où E_0 est sur Δ_E et F_0 sur Δ_F, la longueur totale est $L + L' + L''$ où $L = DE_0 + E_0A$; L' est la distance entre les deux droites et $L'' = L = CF_0 + F_0B$.
Or d'après a) et b) il existe un réseau qui réalise le minimum de chacune de ces composantes, celui passant par E et F.
Conclusion (en considérant toutes les droites Δ_E et Δ_F possibles) : un réseau minimisant est bien de la forme de la figure.

3. a) On note O le point d'intersection de [EF] avec la médiatrice verticale (la médiatrice de [AB]).
Si E et F ne sont pas symétriques, on considère les longueurs DE+EA+EO d'un côté et CF+FB+FO de l'autre. Si par exemple CF+FB+FO est plus grand ou égal à DE+EA+EO on remplace F par E' symétrique de E par rapport à O. On obtient alors une configuration symétrique de longueur inférieure ou égale.

b) Si on note $2x = \mathrm{EF}$ où $x \in [0 ; 50]$ alors le réseau mesure $f(x) = 2x + 4\sqrt{(50-x)^2 + 50^2}$.

On représente cette fonction à l'aide de la calculatrice graphique et on essaie de chercher une valeur approchée du minimum :



On obtient un minimum d'environ 275 km atteint en $x \approx 21{,}13$ d'où $\mathrm{EF} \approx 42{,}26$ km.

c) On peut d'abord chercher EAD :

$$\tan(\mathrm{EAD}) = \frac{\frac{1}{2}(100 - \mathrm{EF}_{\min})}{50} \approx 0{,}577 \text{ d'où } \widehat{\mathrm{EAD}} \approx 30° \text{ et } \widehat{\mathrm{AED}} \approx 120°.$$

Remarque : la valeur exacte de $\tan(\mathrm{EAD}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$: on a donc $\widehat{\mathrm{EAD}} = 30°$ et $\widehat{\mathrm{AED}} = 120°$.

<u>Solution physique qui répond aux deux questions :</u> le réseau passe par A, D, O (le centre). On peut imaginer que les points sont placés sur une plaque percée en A, D, O et que l'on attache 3 fils en E. On fait passer les fils par les 3 trous et aux extrémités desquels on suspend des masses identiques. Le système prend une position d'équilibre. L'énergie potentielle doit être minimale, c'est-à-dire que la longueur des fils sous la plaque doit être la plus grande. Donc la longueur des fils au-dessus de la plaque est minimale. C'est donc la solution de notre problème. On fait le bilan des forces au point M. La somme des tensions (qui sont identiques en intensité) est nulle. Donc on a la somme de 3 vecteurs de même longueur qui est nulle. Cela n'est possible que si les angles valent 120°. En effet si l'un des trois angles est inférieur à 120°, la longueur du troisième vecteur qui est l'opposé de la somme (à l'intensité près) serait inférieure à 2 cos(60°) = 1.

Exercice 3 : Hôtel de luxe

Partie A

1. Le nombre de carreaux recouvrant la partie grisée est égal à :

$(n+h)^2 - n^2 = n^2 + 2nh + h^2 - n^2 = 2nh + h^2 = h(2n+h)$.

On a donc $h(2n+h) = 328$.

2. À l'ordre près des facteurs, $328 = 1\times 328 = 2\times 164 = 4\times 82 = 8\times 41$.

3. $2n+h$ étant supérieur à *h*, *n* et *h* peuvent donc être, *a priori*, solutions des seuls systèmes :

$\begin{cases} 2n+h=328 \\ h=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2n+h=164 \\ h=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 2n+h=82 \\ h=4 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2n+h=41 \\ h=8 \end{cases}$

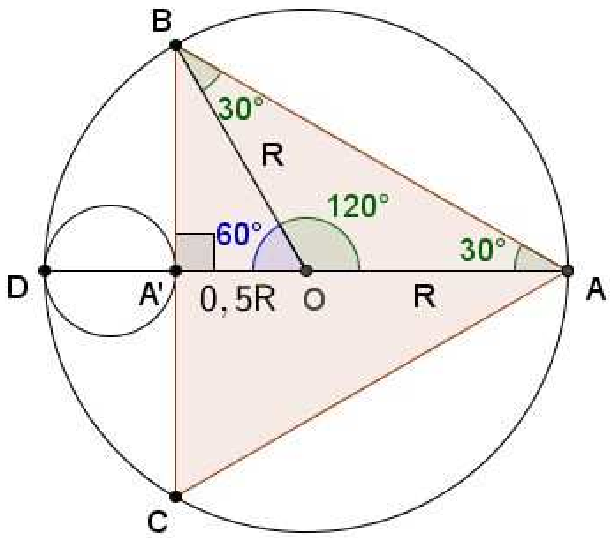
Dont les solutions sont :

$\begin{cases} n=163,5 \\ h=1 \end{cases}$; $\begin{cases} n=81 \\ h=2 \end{cases}$; $\begin{cases} n=39 \\ h=4 \end{cases}$ et $\begin{cases} n=16,5 \\ h=8 \end{cases}$

n et *h* étant entiers, les valeurs possibles de $(n\ ;\ h)$ sont $(81\ ;\ 2)$ et $(39\ ;\ 4)$.

Partie B

Soit R le rayon du jardin. On a $\pi \mathrm{R}^2 = 16\pi$, d'où $\mathrm{R} = 4$.



Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle.
Montrons que le parterre de roses a un diamètre de longueur 2 m.
1[e] méthode :

(AO) est la médiatrice issue de A du triangle équilatéral ABC. (AO) est donc également la bissectrice issue de A de ce même triangle. On en déduit $\widehat{\mathrm{BAO}} = 30°$.

Dans le triangle AOB isocèle en O, $\widehat{\mathrm{OBA}} = 30°$ et $\widehat{\mathrm{AOB}} = 180° - 30° - 30° = 120°$.

Les angles $\widehat{\mathrm{AOB}}$ et $\widehat{\mathrm{BOA'}}$ étant supplémentaires, $\widehat{\mathrm{BOA'}} = 180° - 120° = 60°$.

Dans le triangle $\mathrm{OBA'}$ rectangle en $\mathrm{A'}$, $\mathrm{OA'} = \mathrm{OB}\cos(60°) = 0,5\mathrm{R}$.

$\mathrm{A'} \in [\mathrm{DO}]$ donc $\mathrm{DA'} = \mathrm{DO} - \mathrm{OA'} = \mathrm{R} - 0,5\mathrm{R} = 0,5\mathrm{R} = 2$ m.

2^e^ méthode :

O est également le centre de gravité du triangle ABC. On a donc $AO = \frac{2}{3}AA'$. D'où $AA' = \frac{3}{2}R$.

$A' \in [DA]$ donc $DA' = DA - A'A = 2R - 1,5R = 0,5R = 2$ m.

Finalement, la surface au sol du parterre de roses est $\pi \times \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \pi \text{ m}^2$.

Exercice 4 : Les tas d'allumettes

Partie A : deux tas

1. a) Si mon adversaire prend une allumette dans un tas, il suffit que je prenne une allumette dans l'autre tas. Il reste deux tas à une allumette. Mon adversaire en prend alors une et il ne me reste plus qu'à prendre la dernière.

b) Il n'y a que deux possibilités de jeu :
- soit mon adversaire choisit de prendre une seule allumette et d'après la question précédente, je gagne.
- soit il choisit de prendre les deux allumettes d'un des deux tas et il ne me reste plus qu'à prendre les deux allumettes du second.

2. Si mon adversaire prend deux allumettes dans le tas à 5 allumettes, on se retrouve dans la configuration (3,3).
Il y a alors trois possibilités :
- Je prends une allumette : configuration (3,2). Il lui suffit de se ramener à la configuration (2,2) et je perds d'après la question précédente.
- Je prends deux allumettes : configuration (3,1). Il se ramène donc à la configuration (1,1) qui est perdante pour moi.
- Je prends 3 allumettes : configuration (3,0). Il prend les 3 dernières allumettes et gagne.

Dans tous les cas, je perds.

3. Supposons que les deux tas comprennent le même nombre d'allumettes. Mon adversaire prend un certain nombre d'allumettes dans un des deux tas. Je choisis alors d'égaliser les deux. Ce processus va se répéter jusqu'à ce que l'on se ramène à une configuration du type (3,3) (2,2) (1,1) dont je sais par les questions précédentes qu'elles sont gagnantes pour moi.
Supposons que les deux tas comprennent un nombre différent d'allumettes. Il suffit à mon adversaire d'égaliser pour retomber dans la situation précédente, et donc l'emporter.

Partie B : trois tas

1. Étudions les différentes configurations possibles après que mon adversaire ait joué :
(0,2,3) ; (1,1,3) ; (1,0,3) ; (1,2,2) ; (1,2,1) ; (1,2,0).
Dans tous les cas je peux me ramener à une situation avec deux tas identiques et mon adversaire doit jouer. Je l'emporte donc d'après ce que l'on a vu en **partie A**.

2. Je choisis de commencer en prenant 5 allumettes sur le tas de 6 : On arrive donc à la configuration (4;5;1). Mon adversaire ne doit surtout pas égaliser deux des trois tas car sinon il me suffit de prendre toutes les allumettes du troisième et me ramener à une situation gagnante. De même il ne faut surtout pas qu'il vide un des trois tas car sinon je vais pouvoir en égaliser deux et l'emporter.
Que reste-il comme options à mon adversaire ?
Il peut donc se ramener à deux ou trois allumettes sur les tas 4 ou 5.
Traitons le cas où il décide de prendre 2 allumettes sur le tas 4 : on obtient (2;5;1) et il me suffit de me ramener à la configuration (1,2,3) pour être sûr de l'emporter d'après la question précédente. Les trois autres cas sont analogues.