SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'AIX - MARSEILLE

Classes de première S • 2013

CLASSES DE PREMIERES GÉNÉRALES
ET TECHNOLOGIQUES

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
Académie d'AIX-MARSEILLE
Session 2013

Durée : 4 heures

Série S

Les calculatrices sont autorisées.

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche qu'il aura développée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte **7 pages** dont celle-ci.
L'annexe 7/7 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : Les nombres Harshad

Un entier naturel non nul est un nombre Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2+4=6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. **a)** Montrer que 364 est un nombre Harshad.

b) Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. **a)** Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.

b) Soit *n* un entier non nul. Donner un nombre Harshad de *n* chiffres.

3. **a)** Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

b) En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. **a)** Soit $\mathrm{A} = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

b) En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. **a)** En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

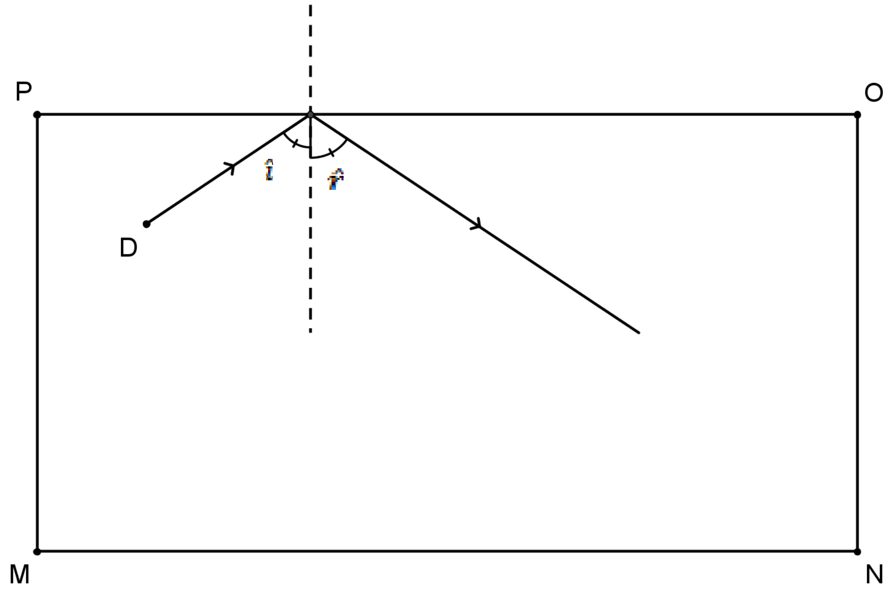
b) Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. **a)** Soit *i* un chiffre compris entre 0 et 8.
Soit *p* un entier dont le chiffre des dizaines est *i* et le chiffre des unités est 9.
Montrer que soit la somme des chiffres du nombre *p* soit celle de $p+2$ est un nombre pair.
En déduire que *p* et $p+2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

b) Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice 2 : Le billard rectangulaire

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{\imath}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\hat{\imath} = \hat{r}$).



1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].

a) Quel point du rail $[PO]$ peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?

b) Quel point du rail $[PO]$ peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail $[NO]$?

c) Quel point du rail $[NO]$ peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?

2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail $[MN]$.

a) Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?

b) Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

Exercice 3 :

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Première partie :

À partir de deux entiers positifs, on construit une liste de nombres où chaque nombre est la somme des deux précédents.

1. Choisir deux nombres entiers positifs inférieurs à 10 et déterminer les dix premiers nombres de la liste définie précédemment.

2. Un mathé-magicien prétend être capable de déterminer rapidement et exactement la somme des dix premiers nombres d'une liste quelconque ainsi construite.
Montrer que, quels que soient les nombres de départ, cette somme est multiple d'un des nombres de la liste dont on déterminera la position.

Deuxième partie

1. On considère l'équation :

$$81a+125b+149c=2013 \quad (E)$$

où *a, b* et *c* sont des entiers positifs.

a) Justifier que a est nécessairement compris entre 0 et 24.
Donner un encadrement possible des valeurs prises respectivement par b puis par c.

b) Écrire un algorithme permettant :
- de tester chacune des valeurs a, b et c prises dans les encadrements précédemment définis afin de vérifier si $81a+125b+149c=2013$;
- d'afficher les valeurs a, b et c, si elles existent, solutions de (E).

c) On fixe $a=15$. En utilisant la méthode de votre choix, déterminer tous les triplets $(15\ ;b\ ;c)$ de nombres entiers positifs, s'il en existe, solutions de (E).

2. À partir de trois entiers positifs, on construit une liste de nombres où chaque nombre est la somme des trois précédents.

a) Déterminer le 12^{e} nombre de la liste si les trois premiers nombres sont, dans l'ordre, 0, 1 et 1.

b) Comment choisir les trois premiers entiers pour que le 12^{e} nombre de la liste soit 2013 ?

Exercice 4 : L'aiguille de Kakeya

On dispose d'une aiguille de longueur 1. L'objectif de cet exercice est d'étudier certaines surfaces permettant à cette aiguille d'effectuer un demi-tour sans sortir de la surface.
La succession de schémas qui suit montre que c'est possible dans un disque de diamètre 1.

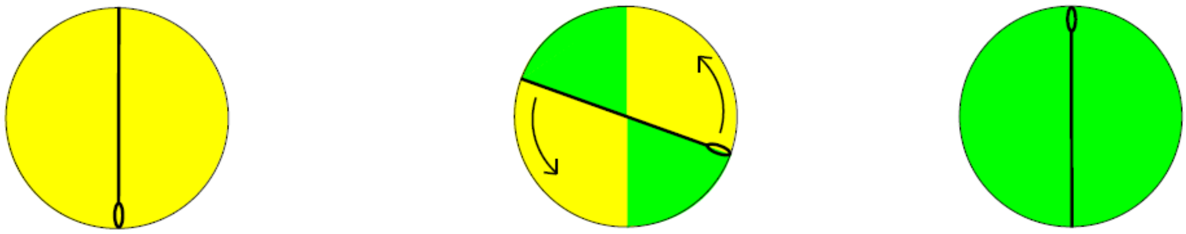


Figure 1 : exemple du disque

I. On considère un triangle équilatéral de hauteur 1. On dispose l'aiguille le long d'une hauteur de ce triangle.

1. Montrer, par une succession de schémas à compléter en annexe à rendre avec la copie, qu'il est possible de faire effectuer un demi-tour à cette aiguille dans ce triangle équilatéral.

2. Calculer l'aire de ce triangle équilatéral.
Montrer qu'elle est inférieure à celle du disque de diamètre 1.

II. On considère une famille de surfaces particulières : les « trisectangles ».
La figure 2 montre quelques éléments de cette famille.

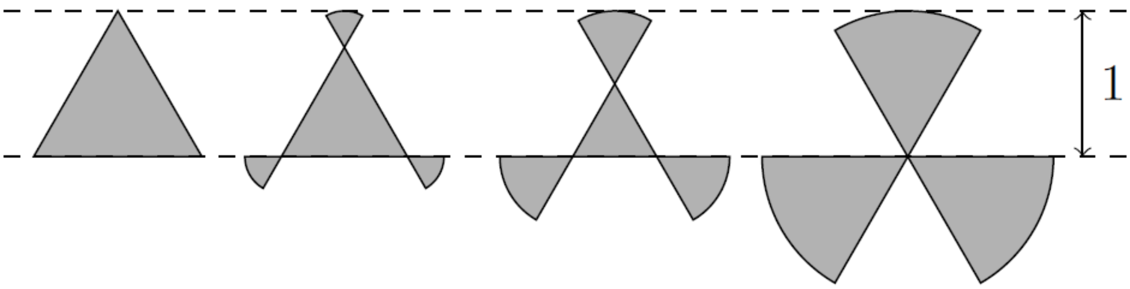


Figure 2 : famille de trisectangles

La figure 3 explique comment les trisectangles sont construits : cette surface est formée d'un triangle équilatéral et d'un secteur angulaire à chacun de ses sommets, chaque côté d'un secteur étant le prolongement d'un côté du triangle. Les trois secteurs sont superposables.

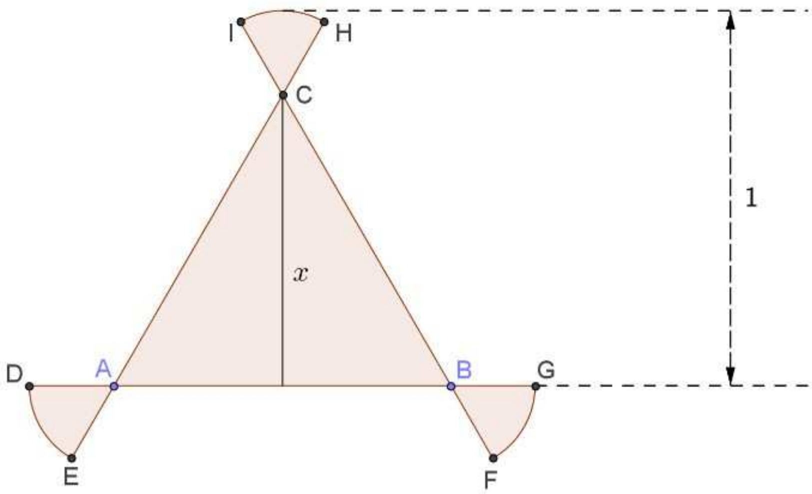


Figure 3 : construction d'un trisectangle

1. Montrer, par une succession de schémas à compléter en annexe à rendre avec la copie, qu'il est possible de faire effectuer un demi-tour à cette aiguille dans un trisectangle.

2. On recherche désormais un trisectangle d'aire minimale.
On note x la hauteur du triangle équilatéral inclus dans le trisectangle.

a) Exprimer l'aire d'un trisectangle en fonction de x.

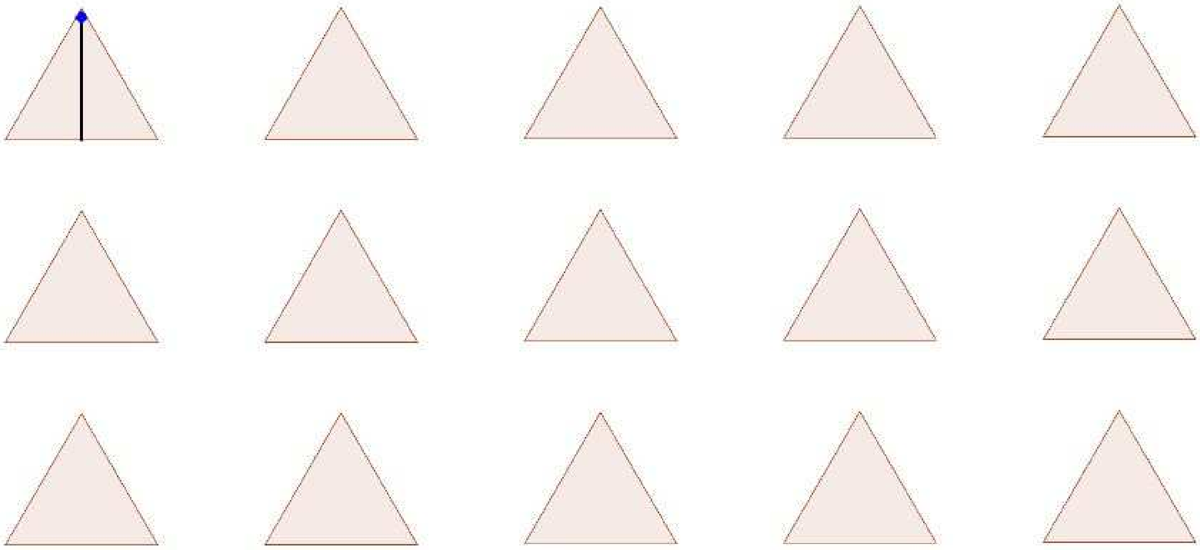
b) En déduire l'aire minimale d'un tel trisectangle.

c) Quel pourcentage de l'aire du disque de diamètre 1 représente l'aire du trisectangle d'aire minimale ?

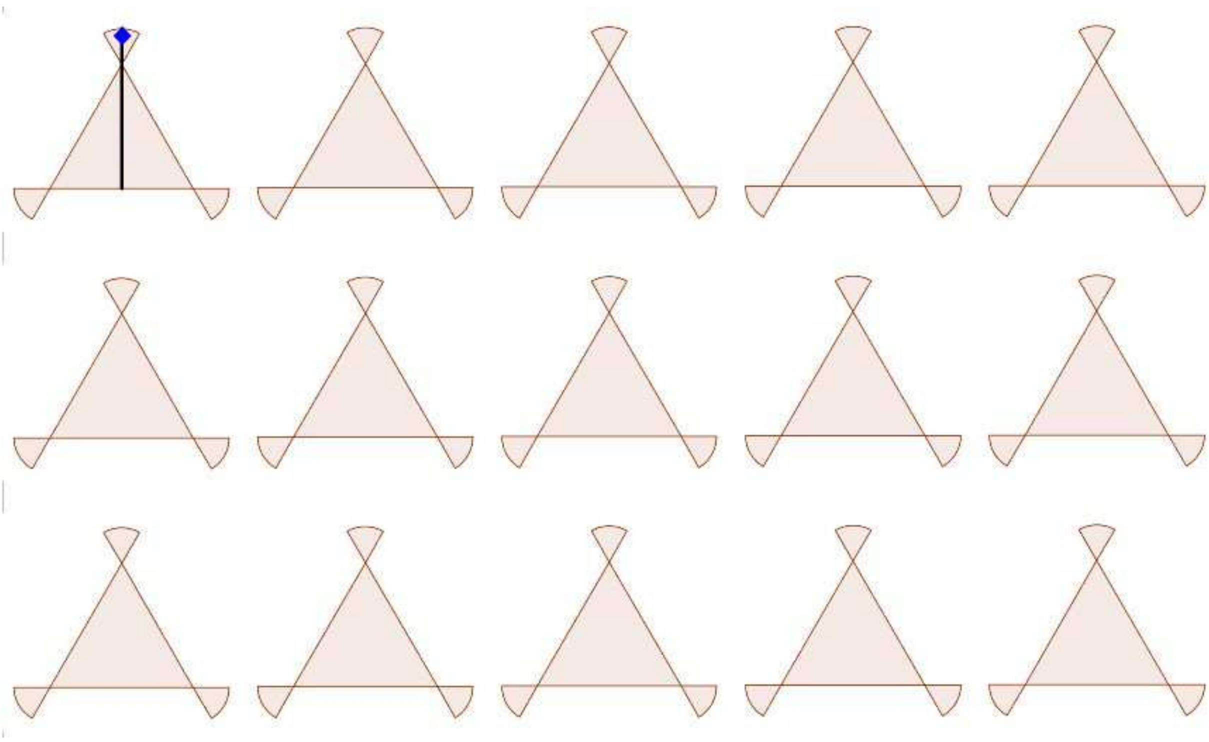
On doit le problème mathématique étudié ici au mathématicien japonais Sôichi Kakeya (1886-1947) qui s'est posé la question suivante au début du XX^e^ siècle : Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ? L'exercice ci-dessus propose une catégorie particulière de surfaces candidates à la solution de ce problème.

Annexe à rendre avec la copie

I. 1.



II. 1.



CLASSES DE PREMIERES GÉNÉRALES
ET TECHNOLOGIQUES

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
Académie d'AIX-MARSEILLE
Session 2013

Série S
CORRIGÉ

Exercice 1 : Les nombres Harshad
Éléments de réponses :

On note $s(n)$ la somme des chiffres d'un nombre *n*.

1. a) 364 est divisible par $3+6+4=s(364)=13$.

b) 11 n'est pas Harshad et c'est le plus petit entier.

2. a) 1 000, par exemple.

b) 10^{n-1}, par exemple.

3. a) évident

b) 1 **0**10 ; 1 **0**11 ; 1 **0**12 sont trois nombres Harshad consécutifs.

c) 1**0…0**10 ; 1**0…0**11 ; 1**0…0**12 sont trois nombres Harshad consécutifs (avec autant de 0 que l'on veut).

4. a) A = 982 080 et $s(\mathrm{A})=27$.

b) $98\ 208\ 030=98\ 208\ 000+30=30(31\times 32\times 33+1)$ est divisible par $s(98\ 208\ 030)=30$.
idem pour les trois suivants.

c) 982080**0…0**30 ; etc. forment une liste de quatre Harshad consécutifs.

5. a) $30\times 31\times 32\times 33\times 34=33\ 390\ 720$
3 339 072 030 = 3 339 072 000 + 30 est divisible par 30.
Idem pour les quatre suivants.

b) 33390720**0…0**30 ; etc. forment une liste de cinq Harshad consécutifs.

6. a) $s(p+2)=s(p)-i-9+(i+1)+1=s(p)-7$ donc $s(p)$ et $s(p+2)$ sont de parités différentes.
p et $p+2$ sont tous les deux impairs, donc ne sont pas divisibles par 2.
L'un de ces nombres a une somme de chiffres paire, il ne peut donc pas être Harshad.

b) Les couples de terminaisons incompatibles sont :
09 - 11 ; 19 - 21 ; … ; 89 - 91.
Le plus grand « vide » possible est la série 90 ; 91 ; … ; 09 ; 10 qui a une longueur 21.
Il existe donc au maximum 21 nombres Harshad consécutifs.

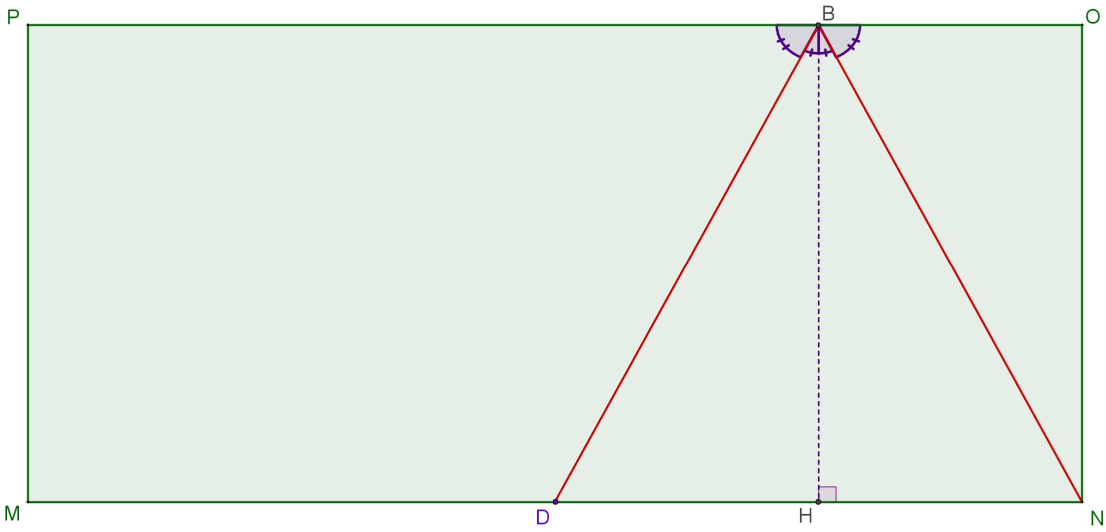
Remarque : le théorème de Grundman ramène ce nombre maximum à 20 (démonstration plus difficile). Grundman a montré l'existence d'une telle liste de 20 Harshad consécutifs ; les nombres de cette liste ont 44 363 342 786 chiffres…

Exercice 2 : Le billard rectangulaire

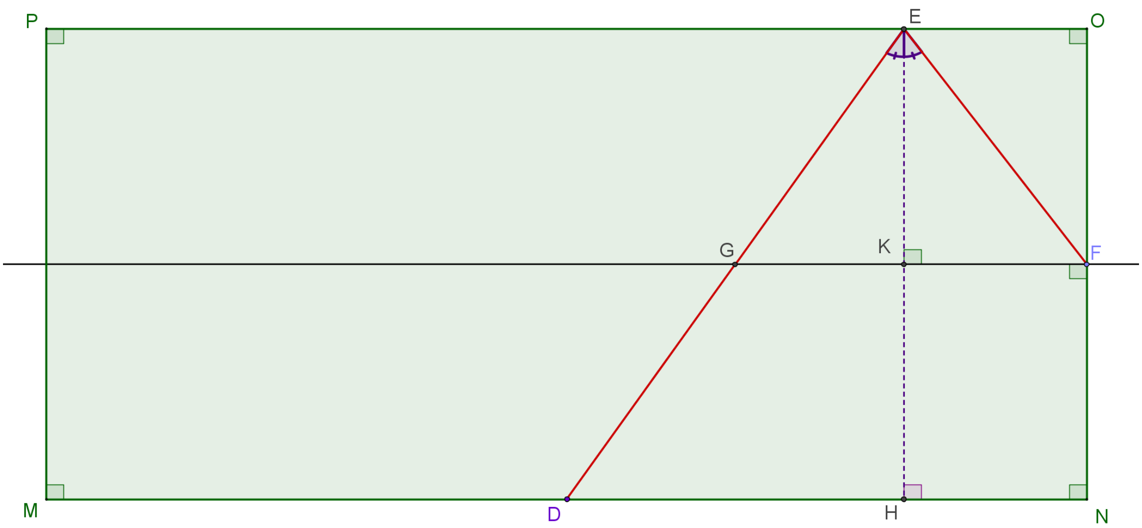
Éléments de réponses :

1. La bille est placée initialement en D, milieu de $[MN]$.

a) Si on vise un point B du rail $[PO]$ et que la bille atteint N, suivant les règles de la réflexion, on démontre que le triangle DBN est isocèle en B. Il faut donc viser le point B du segment $[PO]$ situé à 75 cm de O.

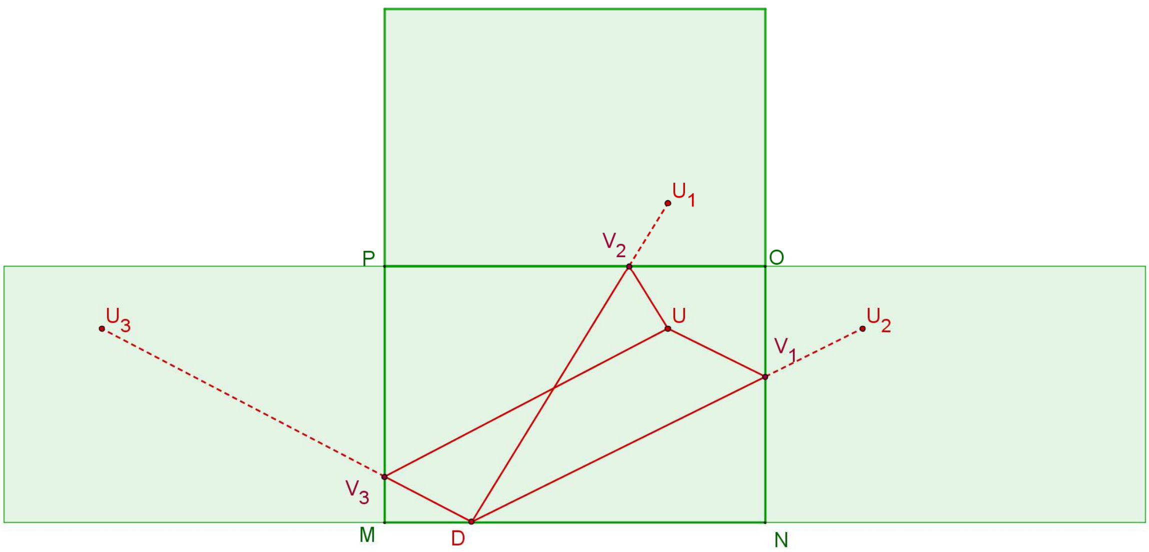


b) EGF est isocèle en E. Donc GK = KF.
Dans le triangle EDH, K est le milieu de $[EH]$ (car F est le milieu de $[ON]$) et $(GK)//(DH)$. Donc $DH = 2\times GK$. Par suite $DN = 3\times EO$. Il faut donc viser le point E du segment $[PO]$ situé à 50 cm de O.



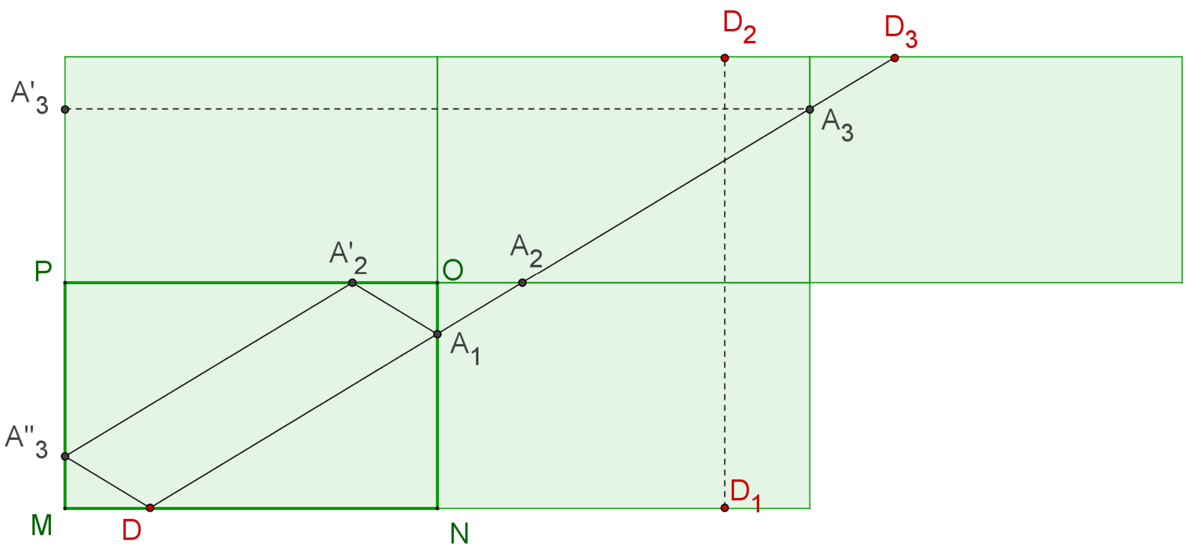
c) Il est assez aisé de deviner que la ligne brisée joignant les milieux des trois rails répond à la question, on viserait donc le milieu du rail [NO], puis de vérifier que cette trajectoire convient.

2. a) On note D la position initiale de la bille, et U le point à atteindre.

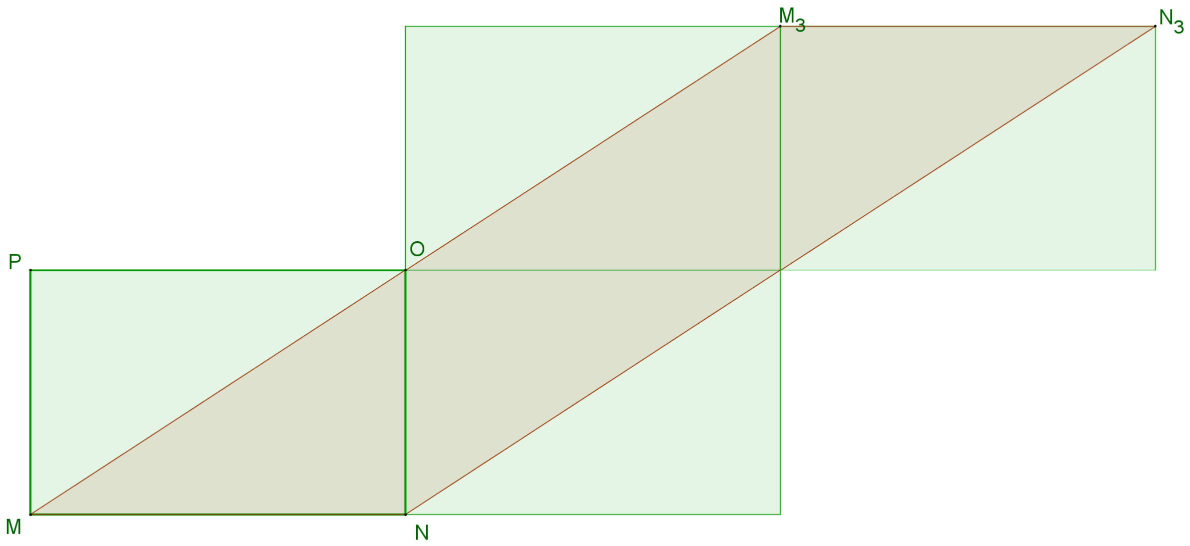


Sur la figure ci-dessus, où l'on a placé les points U_1, U_2, U_3 symétriques respectifs du point U à atteindre par rapport aux rails [NO], [OP] et [PM], atteindre le point U en une bande sur l'un de ces rails, revient à atteindre l'un des symétriques U_1, U_2, U_3 par une trajectoire rectiligne rencontrant le rail par rapport auquel le symétrique est construit.
Où que soit situé le point D le long du rail [MN], il est donc possible d'atteindre tout point U de la surface de jeu en une bande.

b) S'il s'agit de revenir au point initial en trois bandes, on cherche des solutions en étudiant la possibilité de trajectoires rectilignes traversant trois symétriques de la surface de jeu par rapport à des rails et atteignant l'image de D par la composée de ces trois symétries.
Ci-dessous la façon de revenir en un point D du rail [MO] en trois bandes avec rebonds en A_1, A'_2 et A''_3 :



La même construction est possible à partir de tout point D situé le long du rail [MN], puisque le parallélogramme NN_3M_3M est inclus dans la surface de jeu et les trois surfaces symétriques à considérer, et pour tout point D du rail [MN], le point D_3 construit comme ci-dessus par composition de trois symétries est tel que le segment $[DD_3]$ est inclus dans ce parallélogramme :



Exercice 3 :

Première partie :

1. Par exemple, à partir de 1 et 1, on construit la suite de nombres suivante :
1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55.

2. À partir de deux nombres quelconques *a* et *b*, on construit la suite de nombre suivante :
$a - b - a+b - a+2b - 2a+3b - 3a+5b - 5a+8b - 8a+13b - 13a+21b - 21a+34b$.
La somme de ces 10 nombres est : $55a+88b=11(5a+8b)$.
Cette somme égale à 11 fois le 7e nombre de la liste.

Deuxième partie

1. a) *a* est un entier positif et $81a \leq 2013 \Leftrightarrow a \leq 24$.
b est un entier positif et $125b \leq 2013 \Leftrightarrow b \leq 16$.
c est un entier positif et $149c \leq 2013 \Leftrightarrow c \leq 13$.

b) Pour *a* allant de 0 à 24 :
    Pour *b* allant de 0 à 16 :
        Pour *c* allant de 0 à 13 :
            Si $81a+125b+149c=2013$:
                Afficher *a*, *b*, *c*

c) $(15 ; 4 ; 2)$ est la seule solution de (E).

2. a) La liste de nombres ainsi obtenue est :
0 – 1 – 1 – 2 – 4 – 7 – 13 – 24 – 44 – 81 – 149 – 274

b) Si les trois premiers nombres sont *a*, *b*, *c*, la liste de nombres obtenue est :
a – b – c – $a+b+c$ – $a+2b+2c$ – $2a+3b+4c$ – $4a+6b+7c$ – $7a+11b+13c$ – $13a+20b+24c$ – $24a+37b+44c$ – $44a+68b+81c$ – $81a+125b+149c$.
D'après la question 1.c), on doit choisir $a=15$, $b=4$ et $c=2$.

Exercice 4 : L'aiguille de Kakeya

I. 2. Le côté du triangle a pour longueur $\frac{2}{\sqrt{3}}$. L'aire de ce triangle équilatéral est donc $\frac{1}{\sqrt{3}}$, et $\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{\pi}{4}$.

II. 2. a) Par construction, $x\in[0\ ;1]$.
L'aire d'un trisectangle est la somme de l'aire d'un triangle équilatéral de hauteur x (donc de côté $\frac{2x}{\sqrt{3}}$) et des aires de trois secteurs angulaires identiques de rayon $1-x$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. L'aire d'un trisectangle est donc :

$$A(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{\sqrt{3}}\times x+3\times\frac{1}{6}\times\pi\times(1-x)^2=\frac{x^2}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{2}(1-x)^2\ ;$$

$$A(x)=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)x^2-\pi x+\frac{\pi}{2}.$$

b) $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}>0$. La courbe représentative de A est une parabole orientée vers le haut.

L'abscisse de son sommet est $\dfrac{\pi}{\pi+\frac{2}{\sqrt{3}}}\approx 0,731$.

L'aire minimale est donc $A\left(\dfrac{\pi}{\pi+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)=\dfrac{\pi}{\pi\sqrt{3}+2}\approx 0,422$.

c) Cela représente un pourcentage de $\dfrac{\pi}{\pi\sqrt{3}+2}\times\dfrac{4}{\pi}=\dfrac{4}{\pi\sqrt{3}+2}\approx 53,75\%$.