SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'AIX - MARSEILLE

Classes de première S • 2012

CLASSES DE PREMIERES GÉNÉRALES
ET TECHNOLOGIQUES

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
Académie d'AIX-MARSEILLE
Session 2012

Durée : 4 heures

Série S

Les calculatrices sont autorisées.

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte **6 pages** dont celle-ci.

Exercice 1 :

On dit qu'un nombre entier est ***digisible*** lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

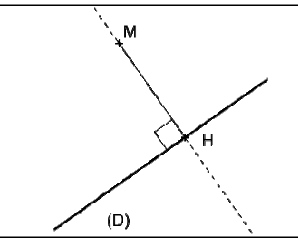
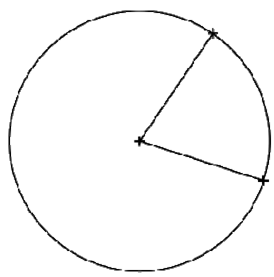
2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
a) Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
b) Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
c) Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
d) Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. Soit n un entier *digisible* quelconque.
a) Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
b) Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
c) Déterminer le plus grand entier *digisible*.

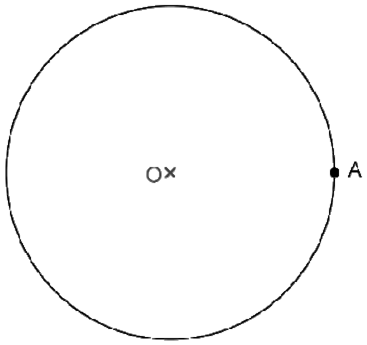
Exercice 2 :

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors* ***l'aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\pi\alpha R^2/360$. *Dans la partie II de l'exercice, on considérera la distance d'un point M à* ***un segment [****BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, A un point de ce cercle et $\mathscr{D}$ le disque délimité par ce cercle.



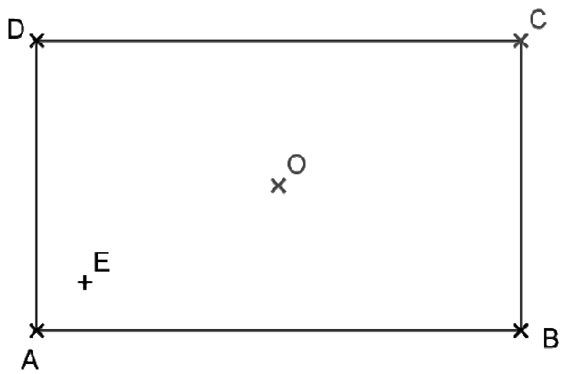
1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque $\mathscr{D}$.
Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

2. **a)** Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
b) Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
c) Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

Exercice 3 :

Un carreleur dispose d'un stock (suffisant) de pavés bleus et ronds, de 10 cm de rayon, pour paver une grande salle. Il hésite entre les deux types de pavages suivants :

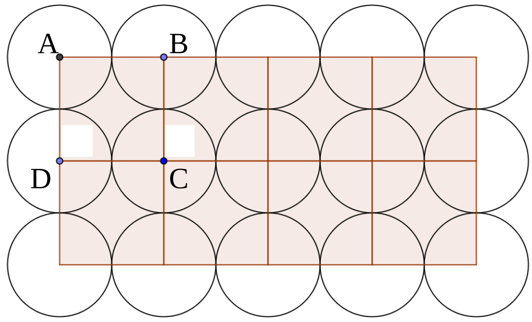


Figure 1: *pavage* P_1

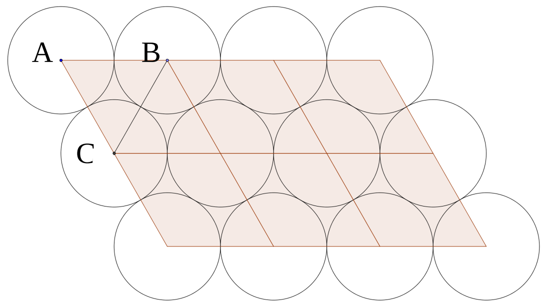


Figure 2: *pavage* P_2

Sur chaque pavage, quand on relie les centres des disques adjacents, on obtient un polygone (appelé **cellule**) qui se reproduit « à l'infini ». Dans le premier pavage cette cellule est un carré et dans le second cette cellule est un triangle équilatéral.

On appelle **densité du pavage** le rapport entre la surface occupée par les portions de disques contenues dans une cellule et la surface de la cellule elle-même. On définit ainsi un indicateur de compacité du pavage : plus la densité du pavage est grande, plus le pavage est compact...

Partie I

1. Montrer que la densité du pavage P_1 arrondie à 10^{-3} est $D = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$.

2. Calculer la densité du pavage P_2. Quel est le « meilleur » pavage ?

3. Le carreleur choisit finalement le deuxième pavage mais trouve que la surface non recouverte par les pavés est encore trop importante. Il décide de créer des nouveaux pavés ronds, cette fois-ci de couleur marron, qui rentreront exactement dans les interstices. On admet qu'on obtient la figure 3.

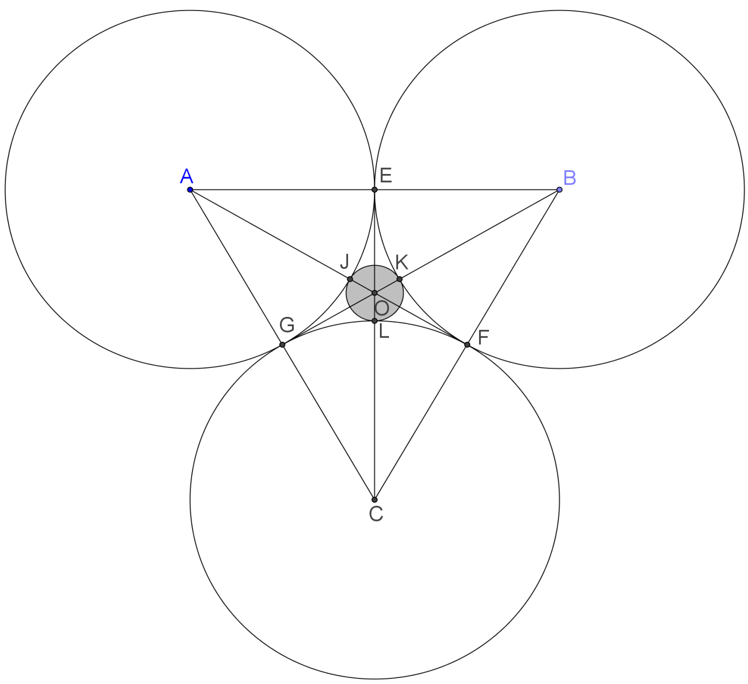


Figure 3 : *des pavés marron dans les interstices*

a) En s'aidant de la figure 3, déterminer le rayon de ces nouveaux pavés.
b) Quelle est la densité de ce pavage ?
c) Le carreleur aurait-il obtenu une meilleure densité à partir de pavés bleus d'un rayon différent de 10 cm ? Justifier.

Partie II

Le carreleur doit maintenant créer un motif ayant la forme d'un triangle équilatéral. Pour cela, il s'inspire du deuxième pavage : voir figure 4.

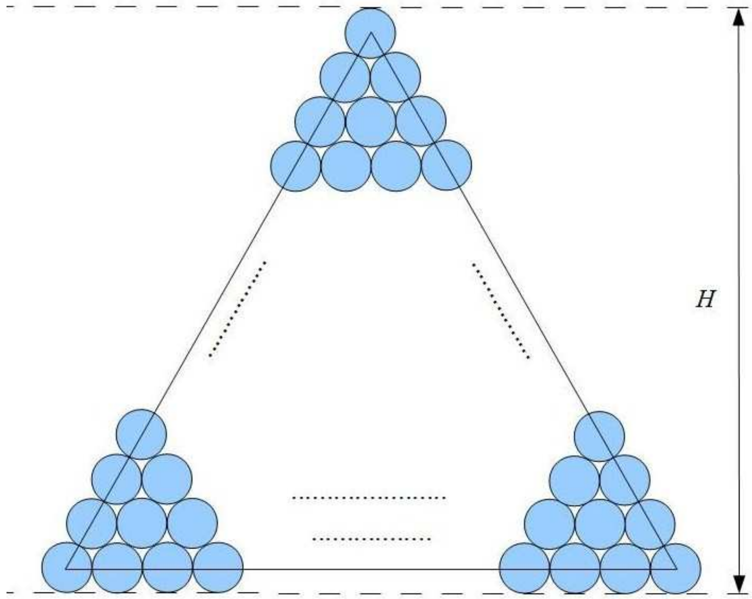
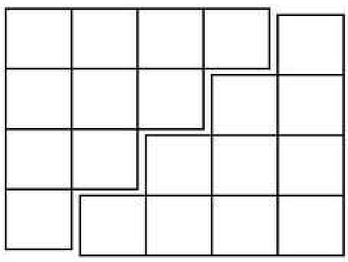


Figure 4 : *motif ayant la forme d'un triangle équilatéral*

1. Donner une formule donnant la valeur de $1+2+...+n$ en fonction de n.
On pourra s'aider, si nécessaire, du schéma suivant :



2. Le carreleur dispose de 50 paquets de 20 pavés bleus. Il souhaite remplir le motif triangulaire le plus grand possible. Combien de carreaux restera-t-il ?

3. Pour le carreleur, les contraintes porteront en général sur la hauteur du motif.
Par exemple, pour une hauteur maximale de 3,50 m, quel est le nombre de pavés nécessaires pour créer le plus grand motif possible ?

Exercice 4 :

On considère deux points distincts A et B et un nombre réel $0 < p < 1$. On s'intéresse aux marches aléatoires « infinies » sur l'ensemble $\{\mathrm{A}\ ;\ \mathrm{B}\}$ respectant les conditions suivantes :

- On part du sommet A ;
- À chaque étape, on reste au point où l'on est avec la probabilité $(1-p)$ et on change de point avec la probabilité p.

On note S_k le sommet où l'on se trouve à la k-ième étape. On a donc $S_0 = \mathrm{A}$.

1. Écrire en langage naturel un algorithme qui génère une étape de cette marche aléatoire.

2. Montrer que la probabilité de se trouver au point B à la deuxième étape (c'est-à-dire la probabilité que $S_2 = \mathrm{B}$) est $2p(1-p)$.

On admet que la probabilité d'être en B après la k-ième étape est $\dfrac{1-(1-2p)^k}{2}$.

3. Vérifier que cette formule est cohérente avec le résultat de la question précédente.

4. Déterminer l'ensemble des valeurs de p pour lesquelles on a plus de chance d'être en B qu'en A à la 43$^{\text{e}}$ étape.

5. Que peut-on dire des probabilités d'être en A, ou en B, quand le nombre d'étapes est suffisamment grand ?

6. On prend $p = 0{,}1$. Déterminer le nombre d'étapes minimal k_0 à effectuer pour que la probabilité d'être en B à partir de cette étape soit comprise entre 0,49 et 0,51.

**CLASSES DE PREMIERES GÉNÉRALES
ET TECHNOLOGIQUES**

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
Académie d'AIX-MARSEILLE
Session 2012

Série S
CORRECTION

Exercice 1 :

1. 12, 15, 36, sont des exemples de nombres *digisibles* à deux chiffres.

2. 1 248, par exemple, est un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. a) n étant un entier *digisible* s'écrivant avec un 5, n est divisible par 5. Son chiffre des unités est donc soit 0, ce qui est impossible, soit 5.

b) n se terminant par 5, n est impair. Il ne peut donc posséder de diviseur pair. n ne comprend donc que des chiffres impairs.

c) D'après la question précédente, si n s'écrit avec un 5, n s'écrit au plus avec cinq chiffres.
Supposons que n s'écrive avec cinq chiffres. n serait composé des chiffres 1, 3, 5, 7 et 9.
Or la somme de ces chiffres est 25 qui n'est pas divisible par 3.
n ne peut donc s'écrire avec les cinq chiffres impairs.

d) Le nombre s'écrit $xyz5$ (x, y, z étant des chiffres impairs). On cherche le plus grand possible… On essaye $x = 9$. Le plus grand nombre qui puisse être écrit, 9 735 ne convient pas ; 9 715 non plus, 9 375 pas plus. 9 315 est *digisible*.
C'est le plus grand s'écrivant avec un 5.

4. a) La somme des neuf chiffres vaut 45.
S'il y a le 5, l'écriture du nombre ne comporte pas plus de quatre chiffres.
S'il n'y a pas le 5, la somme des huit chiffres restants valant 40, il est alors impossible que le nombre soit divisible par 3.
Finalement, n s'écrit avec au plus sept chiffres.

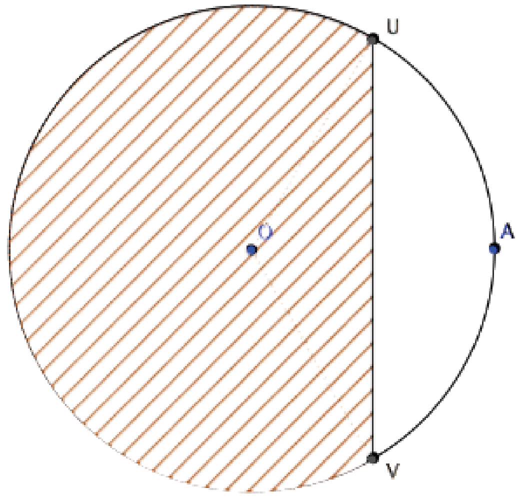
b) n s'écrit avec sept chiffres, il n'y a donc pas le 5 mais il y a le 9.
La somme des huit chiffres restants est 40. Il faut « ôter » un chiffre de façon à ce que la somme des sept chiffres restants soit un multiple de 9. Il faut donc « ôter » le chiffre 4.
Un nombre *digisible* s'écrivant avec sept chiffres dont le 9, comporte exclusivement les chiffres 1, 2, 3, 6, 7, 8 et 9.

c) Le plus grand nombre qui puisse être écrit, 9 876 321, n'est pas pair ; puis le plus grand, 9 876 312, n'est pas divisible par 7… 9 867 312 est divisible par 1, 2, 3, 7, 8, 9.
C'est le plus grand nombre *digisible*.

Exercice 2 :

Partie I

1. & 2.
On représente le segment [UV] intersection avec le disque de la médiatrice du segment [OA].
On hachure… Notons que les points du segment [UV] ne sont pas dans l'ensemble hachuré.



3. La probabilité que M soit plus proche de O que de A est le rapport de l'aire hachurée à celle du disque. L'aire du disque (de rayon R) : est πR^2.

Le secteur angulaire UOV a pour aire le tiers de la précédente. L'aire de la portion hachurée est la somme des deux tiers de l'aire du disque et de l'aire du triangle OUV ; soit : $\frac{2}{3}\pi R^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$.

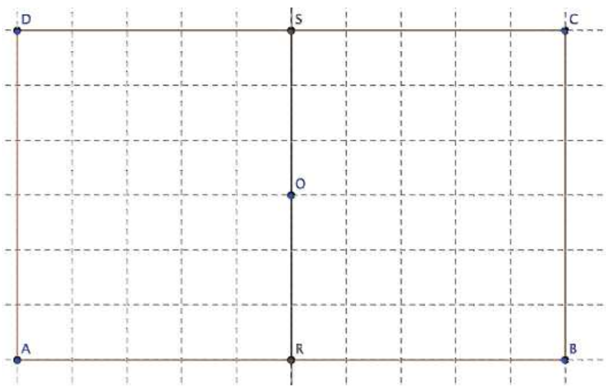
Finalement, la probabilité cherchée est : $\dfrac{\frac{2}{3}\pi R^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}R^2}{\pi R^2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 80,5\ \%$.

Partie II

1. La médiatrice du segment [AB] coupe le segment [AB] en R et le segment [CD] en S. Le segment [RS] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AD].

Le rectangle RBCS est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AD].

Son aire est la moitié de celle du rectangle ABCD. La probabilité cherchée est donc 50 %.

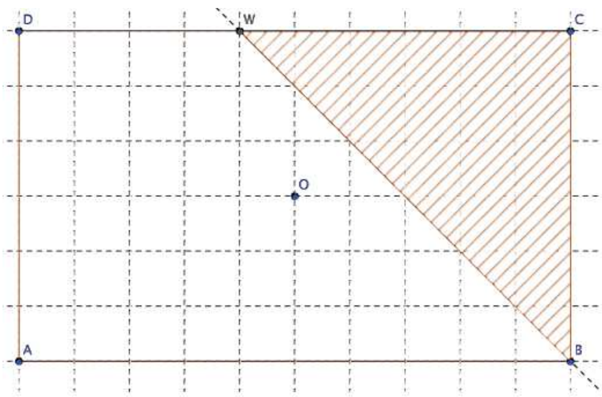


2. La bissectrice de l'angle droit en B coupe le segment [CD] en W. Le segment [BW] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AB].

Le triangle BCW (excepté le segment [BW]) est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AB]. Son aire : $72\,\text{cm}^2$.

Le rapport de celle-ci à celle du rectangle est donc :

$\frac{72}{240} = 0,3 = 30\ \%$.

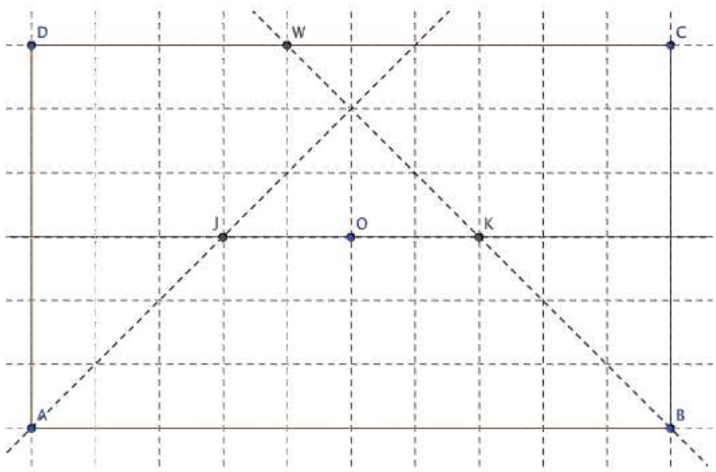


3. Les bissectrices de l'angle droit en B, de l'angle droit en A, la médiatrice du segment [BC] déterminent le quadrilatère ABKJ qui est l'ensemble des points plus proches du côté [AB] que des trois autres côtés du rectangle (exception faite des côtés [BK], [KJ], [JA]).

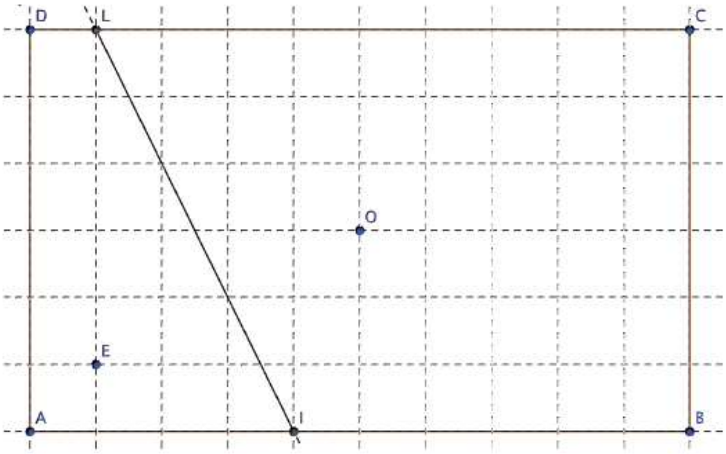
Son aire : $84\,\text{cm}^2$.

La probabilité cherchée est donc :

$\frac{84}{240} = 0,35 = 35\ \%$.



4. La médiatrice du segment [OE] détermine les points I et L respectivement sur les côtés [AB] et [CD]. Il semble que la longueur AI vaille 8 ; un triangle rectangle (6 sur 2) extrait du quadrillage sur l'hypoténuse EI ainsi que de même sur OI confirme que le point de [AB] à cette distance de A est équidistant de O et de E.

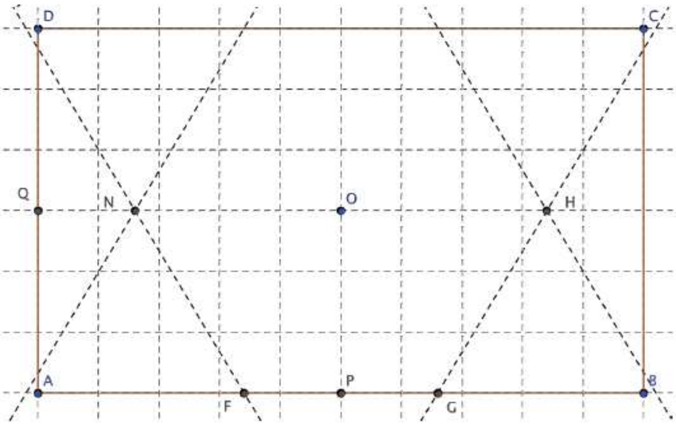


De même DL = 2.

L'aire du trapèze AILD (ensemble des points plus proches de E que de O , exception faite du segment [IL], vaut : $60\,\text{cm}^2$.

Finalement, la probabilité est : $\frac{180}{240} = \frac{3}{4} = 75\ \%$.

5. On considère les médiatrices des segments [OA], [OB], [OC] et [OD] qui déterminent un hexagone ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D.



La médiatrice du segment [AO] détermine le point F sur le segment [AB].

Les médiatrices des segments [AO] et [OD] déterminent le point N… situé aussi sur l'axe médian du rectangle (par symétrie du rectangle appliquée aux segments générant les médiatrices …).

Le quadrilatère AFON dont les diagonales ont pour milieu le pied de la médiatrice est un parallélogramme (c'est un losange). Ce losange a même centre de symétrie que le rectangle APOQ (P et Q milieux respectifs de [AB] et [AD]).

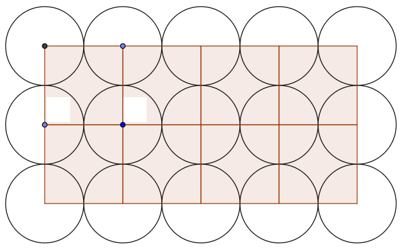
Dans cette symétrie centrale : PFNO et NQAF se correspondent.

L'hexagone, portion du rectangle ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D, a pour aire la moitié de celle du rectangle ABCD.

La probabilité cherchée est donc 50 %.

Ce résultat est indépendant de la longueur des côtés du rectangle.

Exercice 3 :

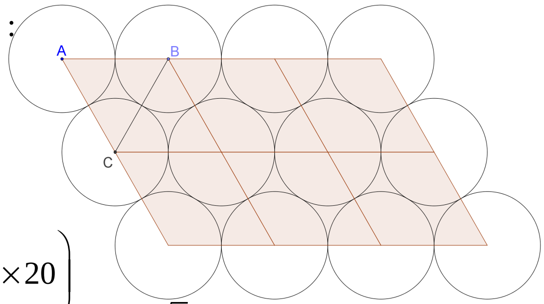


Partie I

1. Raisonnons dans le carré ABCD de la figure 1 (les aires sont exprimées en cm²) : ce carré possède un côté de 20 cm et son intérieur contient 4 quarts de disque de rayon 10 cm.

On obtient : $D_1 = \frac{4\times\left(\frac{\pi\times 10^2}{4}\right)}{20^2} = \frac{\pi\times 100}{400} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$.

2. Raisonnons dans le triangle équilatéral ABC de la figure 2 : ce triangle a 20 cm de côté et son intérieur contient trois portions de disque correspondant chacune à un secteur angulaire d'angle $\frac{\pi}{3}$ ce qui donne $A_S = 3\times\frac{\pi}{6}\times 10^2 = 50\pi$.



D'autre part l'aire de ce triangle est $A_T = \frac{b\times h}{2} = \frac{20\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 20\right)}{2} = 100\sqrt{3}$.

On obtient donc : $D_2 = \frac{50\pi}{100\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0{,}907$.

On constate que $D_2 > D_1$ donc le « meilleur » pavage est le second.

3. a) Le point O, intersection des médianes du triangle équilatéral ABC, est le centre de gravité de ce triangle. Donc $\text{AO} = \frac{2}{3}\text{AF} = \frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 20 = \frac{20\sqrt{3}}{3}$. Par suite, $\text{OJ} = \text{AO} - \text{AJ} = \frac{20\sqrt{3}}{3} - 10$.

b) En se servant des résultats de la question **2.**, on obtient : $D_3 = \frac{50\pi + \pi\times\text{OJ}^2}{100\sqrt{3}} \approx 0{,}950$.

c) Les rapports d'aire, et donc les densités, ne sont pas modifiés par agrandissement-réduction. Le carreleur n'aurait pas obtenu une meilleure densité avec des pavés bleus de rayons différent de 10 cm.

Partie II

1. $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Il s'agit de déterminer la valeur maximale entière de *n* vérifiant $\frac{n(n+1)}{2} \leq 1\,000$. La valeur cherchée est $n = 44$. Le nombre de pavés non utilisés est alors $1\,000 - \frac{44\times 45}{2} = 10$.

3. L'unité choisie est le cm. Exprimons la hauteur *H* du motif en fonction du nombre *n* de pavés disposés sur le côté du triangle. Ce triangle équilatéral a un côté égal à $20(n-1)$. Sa hauteur « intérieure » est donc $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 20(n-1) = 10\sqrt{3}(n-1)$ et la hauteur totale du motif est $H = 10\sqrt{3}(n-1) + 20$.

Il s'agit donc de déterminer la valeur maximale entière de *n* telle que :

$10\sqrt{3}(n-1) + 20 \leq 350 \Leftrightarrow n \leq \frac{33}{\sqrt{3}} + 1 \approx 20{,}05$.

Donc $n = 20$. Le nombre total de pavés est égal à $\frac{20\times 21}{2} = 210$.

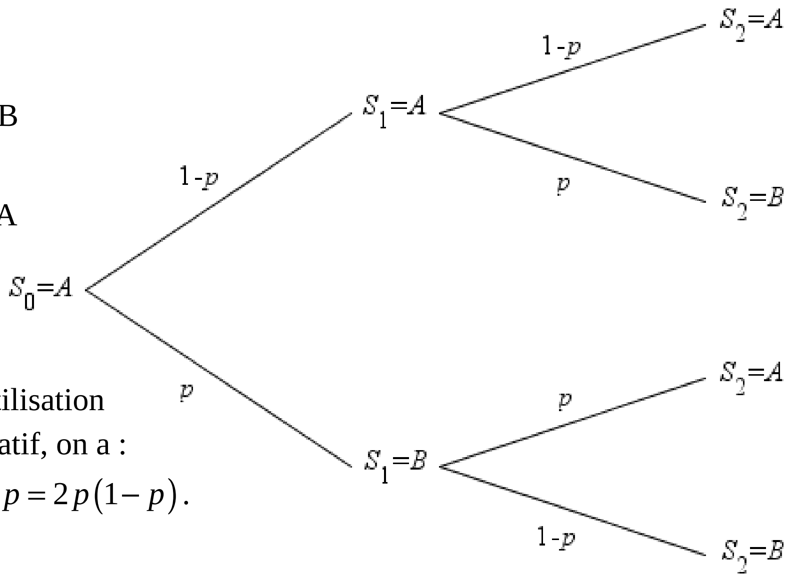
Pour réaliser le plus grand motif possible n'excédant pas une hauteur de 3,50 m le carreleur aura besoin de 210 pavés.

Exercice 4 :

1. On propose la solution suivante :

- Soit a un nombre réel aléatoire dans l'intervalle $[0\ ;1[$
- Si $a > p$ alors $S_{k+1} = S_k$
  Sinon
    - Si $S_k = \mathrm{A}$ alors $S_{k+1} = \mathrm{B}$
    - FinSi
    - Si $S_k = \mathrm{B}$ alors $S_{k+1} = \mathrm{A}$
    - FinSi
- FinSi

2. On fait un arbre pondéré et, par utilisation de l'arbre et du principe multiplicatif, on a :
$\mathrm{P}(S_2 = \mathrm{B}) = p \times (1-p) + (1-p) \times p = 2p(1-p)$.



3. On observe que l'on a bien :

$$\frac{1-(1-2p)^2}{2} = \frac{1-\left(1-4p+4p^2\right)}{2} = \frac{4p-4p^2}{2} = 2p-2p^2 = 2p(1-p).$$

4. Le fait d'avoir plus de chance d'être en B qu'en A à la 43e étape se traduit par :

$$\mathrm{P}(S_{43} = \mathrm{B}) > \mathrm{P}(S_{43} = \mathrm{A}) = 1 - \mathrm{P}(S_{43} = \mathrm{B}),$$

c'est-à-dire :

$$2 \cdot \mathrm{P}(S_{43} = \mathrm{B}) > 1 \Leftrightarrow \mathrm{P}(S_{43} = \mathrm{B}) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-(1-2p)^{43}}{2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1-2p)^{43} < 0.$$

43 étant un nombre impair, la dernière condition équivaut à $1-2p<0$ c'est-à-dire $p > \frac{1}{2}$.

Conclusion : l'ensemble des valeurs de p cherchées est l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;1\right]$.

5. Quand k augmente, la quantité $(1-2p)^k$ se rapproche de 0. On en déduit donc que, si k est très grand, la probabilité d'être en A est très proche de la probabilité d'être en B, ces deux probabilités étant elles-mêmes très proches de $\frac{1}{2}$.

6. On doit donc déterminer les valeurs de k telles que :

$$0{,}49 < \frac{1-(1-0{,}2)^k}{2} < 0{,}51 \Leftrightarrow 0{,}49 < \frac{1-0{,}8^k}{2} < 0{,}51 \Leftrightarrow -0{,}02 < 0{,}8^k < 0{,}02.$$

D'après la calculatrice, le plus petit entier k qui convient est 18.