SUJET + CORRIGÉ

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE D'AIX - MARSEILLE

Classes de première S • 2011

CLASSES DE PREMIERES GÉNÉRALES
ET TECHNOLOGIQUES

OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
Académie d'AIX-MARSEILLE
Session 2011

Durée : 4 heures

Série S

Les calculatrices sont autorisées.

Ce sujet comporte 4 exercices indépendants. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche qu'il aura développée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte **7 pages** dont celle-ci.

Exercice 1 : Essuie-glaces

(Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

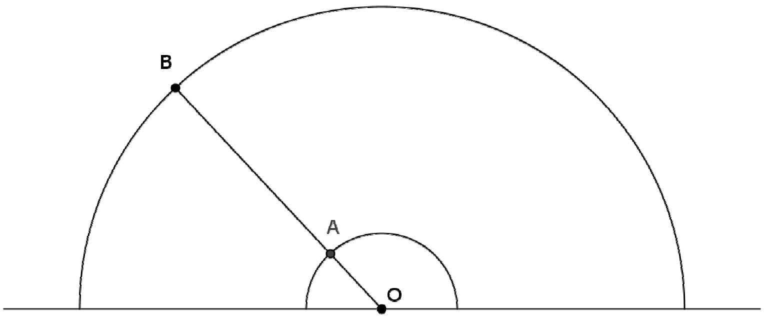


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

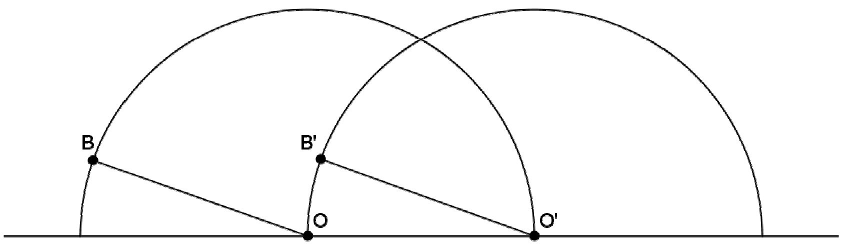


Fig. 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, $CB = 4\ CA$ et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = *a*.

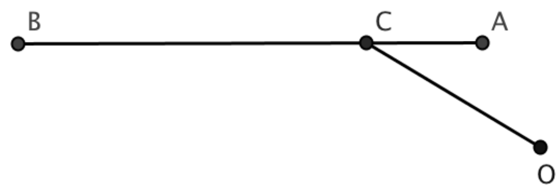


Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de *a* l'aire de la surface essuyée par le balai.

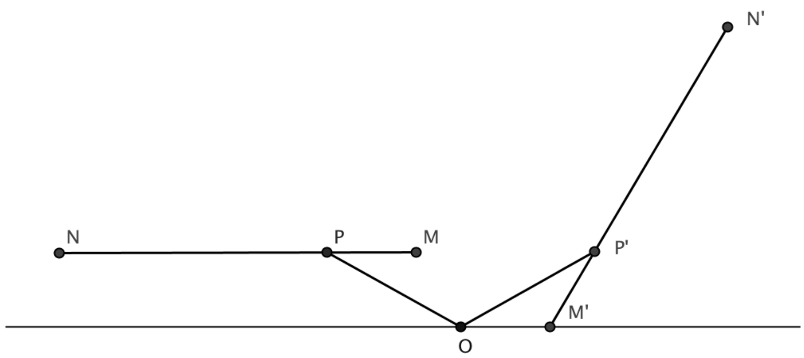


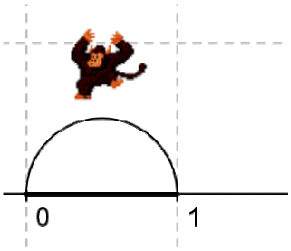
Fig. 4

Exercice 2 : Le singe sauteur

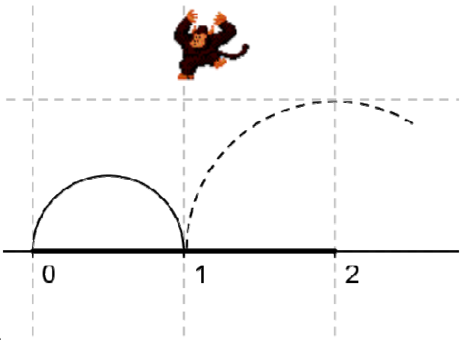
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre *n* est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse *n* en **exactement** *n* bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, *n* (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment [0 ; *n*].

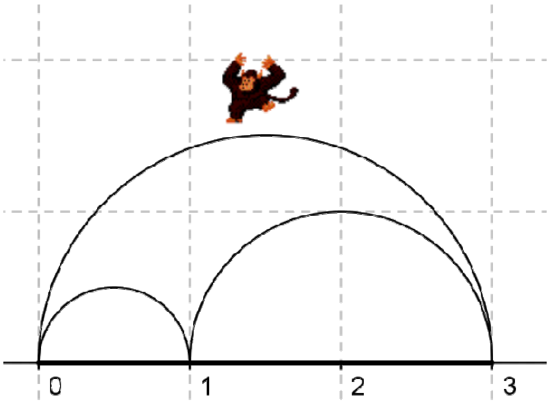
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle [0 ; 2].



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle [0 ; 3]) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.

2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier *m*, on a : $1+2+3+....+m=\frac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5. **a.** Montrer que si le nombre entier n est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier n pour qu'il soit atteignable.

b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose $\mathrm{N}\geq 6$ et atteignable par une séquence qui commence par $1+2+3$ ...
Montrer que $\mathrm{N}+4$ est aussi atteignable.

Exercice 3 : Des travaux coûteux

Voici un énoncé proposé à des lycéens en France :

« Pour 6 kilogrammes de vernis et 4 litres de cire, on paie 95 euros.
Pour 3 kilogrammes de vernis et 3 litres de cire, on paie 55,50 euros.
Combien paie-t-on pour 4 kilogrammes de vernis et 5 litres de cire ? »

Voici un énoncé proposé à des lycéens en Olympie des Mathématiques :

« Pour 3 pots de peinture, 7 rouleaux de papier peint et 2 pots de colle, on paie 95 euros.
Pour 2 pots de peinture, 7 rouleaux de papier peint et 6 pots de colle, on paie 82 euros.
Combien paie-t-on pour 5 pots de peinture, 12 rouleaux de papier peint et 4 pots de colle ? »

Saurez-vous résoudre, tel un Olympien, ces deux exercices ?

Exercice 4 : Le solitaire

Deux configurations du jeu de solitaire sont disponibles dans le commerce. Nous allons montrer que l'une des deux configurations ne permet jamais de gagner la partie !

- ***Opérations sur des dominos à 4 faces***

On appelle dans cet exercice **4-Domino** (ou **4-D**) une pièce de bois carrée séparée en quatre parties égales contenant chacune un nombre égal à 0 ou à 1. On peut multiplier ou additionner les 4-D en utilisant les règles suivantes :

R1)

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline z & t \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|}\hline x' & y' \\ \hline z' & t' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline xx'+yz' & xy'+yt' \\ \hline zx'+tz' & zy'+tt' \\ \hline \end{array}$$

R2)

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline z & t \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline x' & y' \\ \hline z' & t' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline x+x' & y+y' \\ \hline z+z' & t+t' \\ \hline \end{array}$$

R3) Un nombre pair est remplacé par 0 et un nombre impair par 1.

- ***Premiers calculs***

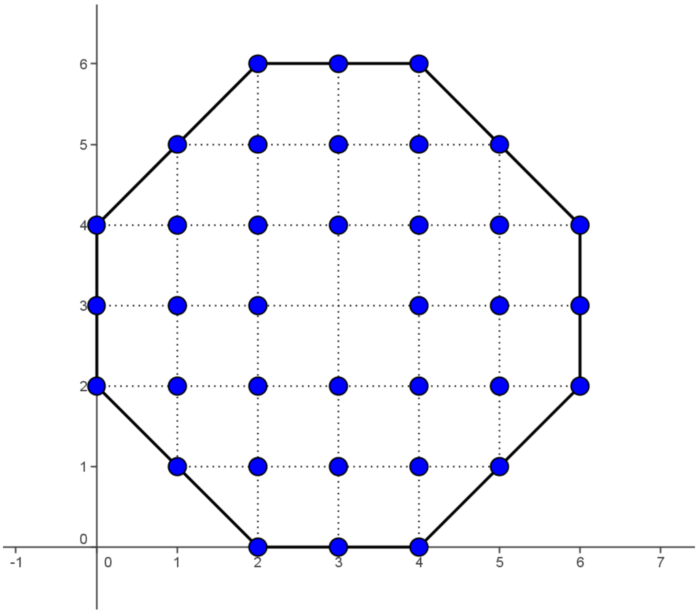
On considère les 4-D nommés $E = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$ et $F = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}$

1. Montrer que $F^2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array}$

2. Montrer que $E = F^3$, que $EF = FE = F$ et que $E + F = F^2$.

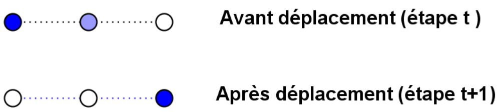
3. En déduire que $F^2 + F^3 = F^4$ et que $F^4 + F^5 = F^3$.

- ***Une application au jeu du solitaire***



On considère la configuration ci-contre du jeu du solitaire, où chaque disque représente une bille (il n'y a pas de bille en $(3\,;\,3)$).

L'objectif du jeu est de « manger » les billes les une après les autres en utilisant uniquement des déplacements horizontaux ou verticaux: on présente sur la figure ci-dessous un déplacement horizontal (où on dira que la bille centrale grisée a été « **mangée** »).



Appelons **configuration** la donnée d'un ensemble de cases qui sont occupées par une bille. Cet ensemble est donc constitué d'un certain nombre de points de coordonnées respectives $(x_1\,;\,y_1)$, …, $(x_n\,;\,y_n)$. **<u>On associe alors à chaque configuration le 4-D</u>**

$$G = F^{x_1+y_1} + \ldots + F^{x_n+y_n}$$

À chaque étape t du jeu nous pouvons donc considérer l'ensemble des cases occupées et calculer le 4-D noté G_t. L'étape initiale $(t=0)$ correspond à la figure donnée ci-dessus où toutes les cases (sauf la case centrale $(3\,;\,3)$) sont occupées.

On dira que la partie est **gagnée** quand le joueur arrive, étape après étape, à manger toutes les billes et termine avec une seule bille sur le plateau.

4. Quand le joueur passe de l'étape t à l'étape $(t+1)$ combien de cases modifie-t-il exactement ?

5. On suppose que le joueur a déjà effectué t étapes avec succès et que la $(t+1)$-ième étape consistera à manger la bille placée dans la case $(x\,;\,y)$.

- **a.** On étudie tout d'abord le cas où $(x\,;\,y)=(2\,;\,2)$.
  - **i)** On suppose que le coup réalisé se fait horizontalement. Montrer que $G_{t+1}=G_t$.
  - **ii)** On suppose que le coup réalisé se fait verticalement. Montrer que $G_{t+1}=G_t$.
- **b.** **i)** Examiner les différentes situations correspondant à $x \leq 3$ et $y \leq x$.
  On admettra que toute configuration peut se ramener à un de ces cas.
  - **ii)** Que peut-on en déduire sur l'évolution du 4-D G_t pendant la durée du jeu ?

6. Peut-on gagner ?
(On pourra utiliser le fait que la somme de trois puissances consécutives de F s'annule)

CLASSES DE PREMIERES GÉNÉRALES
ET TECHNOLOGIQUES

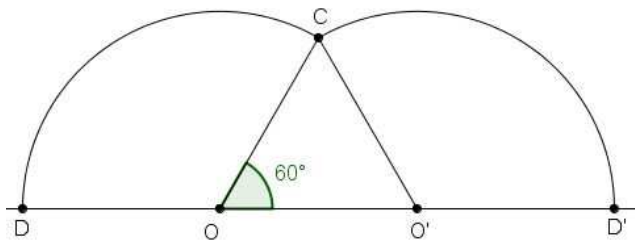
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
Académie d'AIX-MARSEILLE
Session 2011

Série S
CORRECTION

Exercice 1 : Essuie-glaces

1. L'aire demandée en cm^2 est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(\pi.60^2 - \pi.15^2\right) = \frac{\pi}{2}15^2\left(4^2 - 1\right) = \frac{\pi}{2}.15^3 = 3375.\frac{\pi}{2}$ soit en valeur approchée 5301 cm^2.

2. Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons l'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$:



$A_1 = \frac{1}{2}\left(R \times \frac{\sqrt{3}}{2}R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{COD}$ de mesure $\frac{2\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{D'O'C}$:

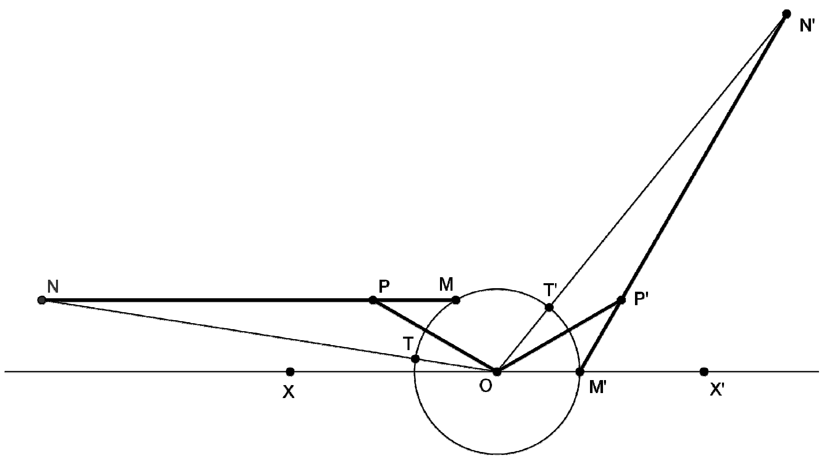
$A_2 = \frac{\pi R^2}{3}$.

L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc

$\mathcal{A} = 2 \times A_2 + A_1 = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. $\boxed{\mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2}$

3. a) Soit H le projeté orthogonal de A sur (OC). Dans le triangle ACH rectangle en H, on a : $CH = AC\sin\widehat{OCA} = a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}OC$. H est donc le milieu de $[OC]$ et la hauteur (AH) issue de A est donc aussi médiatrice de $[OC]$. Ainsi le triangle ACO admet (AH) comme axe de symétrie, et ACO est isocèle en A.

b) L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180 - \widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin ci-dessous. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes-internes, et le triangle MOP est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX} = 2 \times 30 = 60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure $180 - 60 = 120°$.



La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments $[\mathrm{MN}]$ et $[\mathrm{M'N'}]$ et les arcs $\overset{\frown}{\mathrm{MM'}}$ et $\overset{\frown}{\mathrm{NN'}}$. Soient T et $\mathrm{T'}$ les intersections du cercle de centre O passant par M et les segments $[\mathrm{ON}]$ et $[\mathrm{ON'}]$. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment $[\mathrm{ON}]$ ayant pour image $[\mathrm{ON'}]$, T a donc pour image $\mathrm{T'}$. Les points M, T, N ont respectivement pour images $\mathrm{M'}$, $\mathrm{T'}$ et $\mathrm{N'}$, et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par $[\mathrm{MN}]$, $[\mathrm{NT}]$ et l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{MT}}$ a la même aire que celle limitée par $[\mathrm{M'N'}]$, $[\mathrm{N'T'}]$ et l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{M'T'}}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMP et $\mathrm{OM'P'}$ sont isométriques.

Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments $[\mathrm{NT}]$ et $[\mathrm{N'T'}]$ et les arc de cercle $\overset{\frown}{\mathrm{NN'}}$ et $\overset{\frown}{\mathrm{TT'}}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $\mathcal{A} = \dfrac{1}{3}\left(\pi\cdot\mathrm{ON}^2 - \pi\cdot\mathrm{OT}^2\right) = \dfrac{\pi}{3}\left(\mathrm{OB}^2 - \mathrm{OA}^2\right)$

Or, $\mathrm{OA}^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$\mathrm{OB}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HB}^2 = \mathrm{OH}^2 + (\mathrm{HC}+\mathrm{CB})^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}+4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4}+\frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \dfrac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = \dfrac{\pi}{3}\times 30a^2 = 10\pi a^2$ $\boxed{\mathcal{A} = 10\pi a^2}$

Exercice 2 : Le singe sauteur

1. Le nombre 4 est atteignable car $1+2-3+4=4$.

2. Le singe n'a le choix : $1+2-3+4$ et … il est bloqué !!

3. Le nombre 9 est atteignable car on a $1+2+3-4+5-6+7-8+9=9$, sans jamais sortir de l'intervalle $[0\ ;\ 9]$.

4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner $1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16$, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle $[0\ ;\ 16]$. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$$1+2+3+.....+n\overbrace{-(n+1)+(n+2)-(n+3)+(n+4)..........-(n^2-1)+n^2}^{n^2-n\ \text{termes}} =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \underbrace{1+1+1+.................+1}_{\frac{n^2-n}{2}\ \text{termes}} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2-n}{2} = n^2$$

d'où n^2 est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle $\left[0\ ;\ n^2\right]$.

5. Si le nombre n est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou –1 telles que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_-. On a alors : $S_+=S_-$.
On calcule ensuite : $1+2+3+.......+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$.
On en déduit que : $\frac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit $n(n-1)$. Donc n est de la forme $4k$ ou $4k+1$. Par exemple 18 n'est pas atteignable.
La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

6. L'idée est de transformer une configuration de signes + – en – +, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite $-(N+1)+(N+2)-(N+3)+(N+4)$ et l'on trouve $N+4$. On note $S(i)$ la somme partielle des i-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par $-(N+1)+N$. La séquence commence par $1+2+3$ et le premier signe – apparaît en position $i+1$. Alors $S(i-1)\geq i$, car $S(3)\geq 4$. On change alors la sous-séquence $i-(i+1)$ en $-i+(i+1)$, ce qui est possible. On ajoute la séquence $-(N+1)+(N+2)-(N+3)+(N+4)$, ce qui assure que $N+4$ est atteignable.
Question subsidiaire : est-il vrai que les nombres de la forme $N=4k$ ou $4k+1$, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

Exercice 3 : Des travaux coûteux

Le premier exercice est, bien entendu, très classique.
Soit x est le prix d'un kilogramme de vernis, et si y est le prix d'un litre de cire, il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} 6x+4y=95 \\ 3x+3y=55,5 \end{cases}.$$

Le système admet une solution unique : $x=10,5$ et $y=8$.
Ainsi, 4 kilogrammes de vernis et 5 litres de cire coûtent $4\times 10,5+5\times 8=$ **<u>82 euros</u>**.

Considérons le deuxième énoncé.
Soit a le prix d'un pot de peinture, b le prix d'un rouleau de papier peint et c le prix d'un pot de colle.

Il s'agit de trouver $5a+12b+4c$ sachant que $\begin{cases} 3a+7b+2c=95 \\ 2a+7b+6c=82 \end{cases}$.

Par différence, on a $a-4c=13$, c'est-à-dire $a=13+4c$.
Le système s'écrit alors :
$\begin{cases} 3(13+4c)+7b+2c=95 \\ 2(13+4c)+7b+6c=82 \end{cases}$, ou encore $7b+14c=56$ (les deux équations sont les mêmes).
On a donc $7b=56-14c$, c'est-à-dire $b=8-2c$.

Dès lors, $5a+12b+4c=5(13+4c)+12(8-2c)+4c=65+20c+96-24c+4c=161$.

Ainsi, 5 pots de colle, 12 pots de peinture et 4 rouleaux de papier peint coûtent **<u>161 euros</u>**.

Dominos :

1. $F^2 = F \times F = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$

2.
   - $F^3 = F^2 \times F = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} = E$
   - $E \times F = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} = F$ et $F \times E = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} = F$
   - $E + F = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$. Ainsi on a $\boxed{E + F = F^2}$.

3. *On n'admet que les règles usuelles de distributivité et d'associativité sont valables...*
   Remarquons tout d'abord que si n est un entier strictement supérieur à 0, alors $E \times F^n = F^n$. En effet il suffit d'écrire par exemple $E \times F^n = (E \times F) \times F^{n-1} = F \times F^{n-1} = F^n$.
   - Alors on peut calculer F^4 de la façon suivante :
   $$F^4 = F^2 \times F^2 = (E + F) \times F^2 = E \times F^2 + F \times F^2 = F^2 + F^3$$
   - En multipliant cette égalité par F il vient :
   $$\boxed{F^5 = F^3 + F^4}$$
   Puis en multipliant à nouveau cette égalité on obtient $F^6 = F^4 + F^5$.
   Or $F^6 = F^3 \times F^3 = E \times F^3 = F^3$. On obtient donc
   $$\boxed{F^3 = F^4 + F^5}$$

Application au solitaire :

4. D'après le schéma explicatif, on voit qu'à chaque étape, 3 cases exactement changent de couleur. On modifie donc exactement 3 cases à chaque étape.

5. (a) i. Dans ce premier cas, les seules cases qui changent sont : $(1, 2)$, $(2, 2)$ et $(3, 2)$.
   Si le coup se fait **de la gauche vers la droite** on a (en posant K un 4D qui n'évolue pas entre les étapes t et $t + 1$ puisque calculé à partir de cases qui ne changent pas) :
   $$G_t = F^{1+2} + F^{2+2} + K = F^3 + F^4 + K$$
   $$G_{t+1} = F^{3+2} + K = F^5 + K$$
   Or on a vu dans la première partie que $F^3 + F^4 = F^5$. On conclut donc que $G_t = G_{t+1}$.
   De même si le coup se fait **de la droite vers la gauche**, on a :
   $$G_t = F^{2+2} + F^{3+2} + K' = F^4 + F^5 + K'$$
   $$G_{t+1} = F^{1+2} + K' = F^3 + K'$$
   Or là encore on a vu dans la première partie que $F^3 = F^4 + F^5$ et donc $G_t = G_{t+1}$.

ii. Cette fois-ci les cases qui changent sont : $(2,3)$, $(2,2)$ et $(2,1)$.
Si le coup se fait vers le bas, on a :

$$G_t = F^{2+3} + F^{2+2} + K = F^5 + F^4 + K$$

$$G_{t+1} = F^{2+1} + K = F^3 + K$$

Or on a vu dans la première partie que $F^4 + F^5 = F^3$. On conclut donc que $G_t = G_{t+1}$.
De même si le coup se fait vers le haut, on a :

$$G_t = F^{2+1} + F^{2+2} + K' = F^3 + F^4 + K'$$

$$G_{t+1} = F^{2+3} + K' = F^5 + K'$$

Or là encore on a vu dans la première partie que $F^3 + F^4 = F^5$ et donc $G_t = G_{t+1}$.

(b) Remarquons que lorsqu'une bille de coordonnées (x, y) se fait manger, la partie du 4D qui change passe de $G_t = F^{x+y} + F^{x+y+a} + \ldots$ à $G_{t+1} = F^{x+y-a} + \ldots$ avec $a = \pm 1$.

i. Envisageons dans cette question une bille de coordonnées (x, y) qui sera mangée en distinguant deux cas :
Premier cas : si le déplacement se fait **vers la gauche ou vers le bas**, c'est-à-dire si $a = +1$. Alors on peut écrire les lignes suivantes :

$$\begin{aligned} F^{x+y} + F^{x+y+1} &= F^{x+y-1}\left(F + F^2\right) \\ &= F^{x+y-1}(F + E + F) \\ &= F^{x+y-1}(2 \times F + E) \\ &= F^{x+y-1}(0 + E) \\ &= F^{x+y-1} \end{aligned}$$

Ainsi on a dans ce premier cas $G_t = G_{t+1}$.
Deuxième cas : si le déplacement se fait **vers la droite ou vers le haut**, c'est-à-dire si $a = -1$. Alors voici le raisonnement :

$$\begin{aligned} F^{x+y+1} &= F^{x+y-1} \times F^2 \\ &= F^{x+y-1}(E + F) \\ &= F^{x+y-1} + F^{x+y} \end{aligned}$$

On a donc aussi dans ce deuxième cas $G_t = G_{t+1}$.

ii. Ainsi, quel que soit le coup joué, le 4D G_t reste invariant (égal à G_0) au cours de la partie.

6. On peut gagner à la condition nécessaire (mais pas forcément suffisante) que G_0 soit égal à G_{final}. Calculons donc ces deux quantités et comparons les :

• Pour G_0 : on peut remarquer que pour chacune des billes de coordonnées (x, y) avec $x > y$, il y a une autre bille ayant pour coordonnées (y, x). Ainsi, puisque $F^{x+y} + F^{y+x} = 2 \times F^{x+y} = 0$, il reste à prendre en compte dans le calcul de G_0 uniquement les billes situées sur la diagonale. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} G_0 &= F^2 + F^4 + F^8 + F^{10} \\ &= F^2 + F \times F^3 + F^2 \times F^6 + F \times F^9 \\ &= F^2 + F + F^2 + F = 0 \end{aligned}$$

- Pour G_{final} : si la bille restante se situe aux coordonnées (x, y), on a $G_{final} = F^{x+y}$. Or cette quantité ne peut être nulle puisque qu'elle vaut soit E, soit F, soit F^2.

Conclusion : si on part dans la configuration avec la bille du milieu manquante, la victoire est impossible...