OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

EXERCICES NATIONAUX
2022

CORRIGÉS

- Métropole - Europe - Afrique - Orient - Inde
- Amériques - Antilles-Guyane
- Asie - Pacifique - Nouvelle Calédonie - Polynésie

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

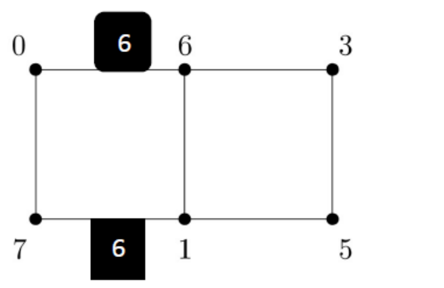
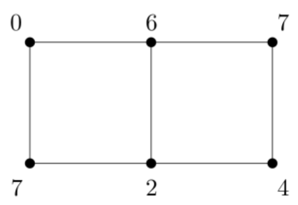
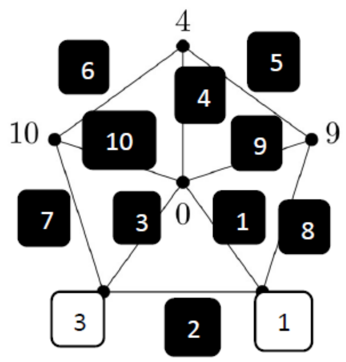
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

Exercice 1

Étiquetage gracieux d'une figure

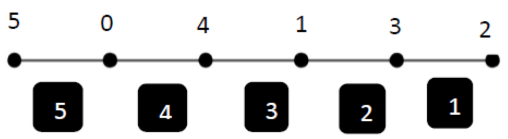
A. Des exemples

1. 		**2.** 
Etiquetage non gracieux (deux pondérations identiques)	Etiquetage non gracieux (étiquetage avec deux « 7 »)	

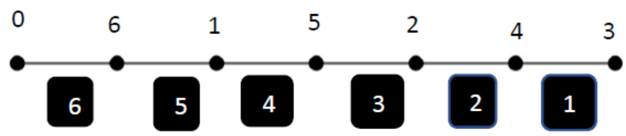
B. Cas des lignes

1.

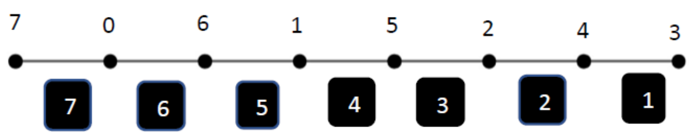
Étiquetage gracieux de L_5 :



Étiquetage gracieux de L_6 :

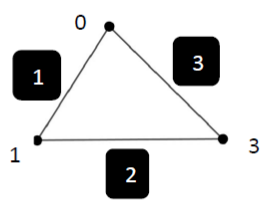
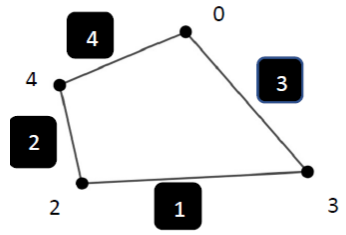
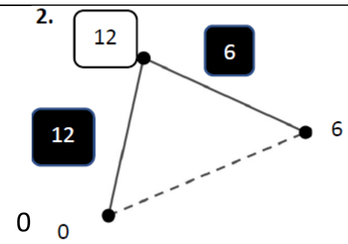


Étiquetage gracieux de L_7 :



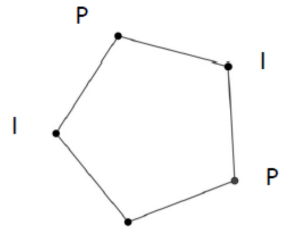
2. En s'appuyant sur la réflexion menée pour les figures L_4 et L_6, on peut étiqueter la figure $L_{2\,022}$ en associant aux points allant de la gauche vers la droite la suite de nombres :
0, 2 022, 1, 2 021, 2, 2 020, 3, 2 018, …, 1 021, 1 017, 1 014, 1012, 1011
Ce qui donne les pondérations successives, de la gauche vers la droite :
2 022, 2 021, 2 020, 2 019, 2 018, 2 017, 2 016, …, 4, 3, 2, 1.

C. Cas des polygones

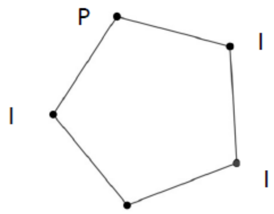
1. 		**2.** 
Étiquetage gracieux d'un triangle	Étiquetage gracieux d'un quadrilatère	Ajout à faire pour obtenir un étiquetage gracieux d'un polygone à 12 côtés.

3. Si les étiquettes des extrémités d'un segment sont ;
a. de parités différentes, alors la pondération du segment est impaire ;
b. de même parité, alors la pondération du segment est paire.
4. Un pentagone a cinq sommets pouvant être étiquetés par les nombres 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 (autant de nombres impairs que de nombres pairs, d'où une symétrie du problème par rapport à l'étiquetage P ou I) et reliés par cinq segments devant être pondérés par les nombres 1, 2, 3, 4 et 5 pour que l'étiquetage soit gracieux. On doit donc avoir trois pondérations impaires (1, 3 et 5), ce qui nécessite trois alternances de nombres pairs et impairs pour les sommets associés. On a alors deux cas :

- on pondère à la suite trois segments par des nombres impairs et il reste un sommet placé entre deux sommets numérotés par des nombres de parités différentes.
Qu'elle soit paire ou impaire, la numérotation de ce sommet crée une nouvelle pondération impaire, ce qui en fait une de trop.



- on pondère à la suite deux segments pondérés par des nombres impairs puis un segment pondéré par un nombre pair. Il reste alors un sommet placé entre deux sommets numérotés par des nombres de même parité.
Qu'elle soit paire ou impaire, la numérotation de ce sommet crée soit deux nouvelles pondérations impaires soit deux nouvelles pondérations paires, ce qui ne convient pas.



Autre rédaction possible
Supposons par l'absurde qu'il existe un étiquetage gracieux.
Quand on parcourt successivement les sommets du pentagone, on voit sur les arêtes les entiers de 1 à 5, donc trois nombres impairs, donc trois changements de parité du sommet, et deux nombres pairs, sans changement de parité. En tout, trois changements de parité, ce qui équivaut à un changement de parité quand on termine le parcours : contradiction.

D. Une très grande figure
1. Le nombre de segments est le nombre de paires de points distincts, c'est-à-dire la moitié du nombre de couples soit $\frac{1}{2} \times 2\,022 \times 2\,021 = 1\,011 \times 2\,021 = 2\,043\,231$.
2. a. On cherche le nombre d'entiers impairs de l'ensemble $\{1,2,\dots,2\,043\,231\}$ ce qui revient à chercher les entiers k tels que $0 \leq 2k+1 \leq 2\,043\,231$ soit $0 \leq k \leq 1\,021\,615$. On a donc 1 021 616 segments dont la pondération est un nombre impair.
b. Si p est le nombre de points étiquetés avec un nombre pair, alors le nombre de points étiquetés avec un nombre impair est $2\,022 - p$. Le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair est donc égal au nombre de paires de points étiquetés l'un avec un nombre pair et l'autre un nombre impair soit $p(2\,022 - p)$.
3. Si K_{2022} est muni d'un étiquetage gracieux alors il existe un entier p tel que $p(2\,022 - p) = 1\,021\,616$
L'équation du second degré $p^2 - 2\,022p + 1\,021\,616 = 0$, dont le discriminant est 2020, n'a pas de solution entière.

Exercice 2

Nombres sectionnables

Partie A

On remarque qu'un nombre N est sectionnable s'il existe un entier n tel que $\frac{n(n+1)}{2} = N$ ce qui s'écrit $n^2 + n - 2N = 0$

1. a. L'équation $n^2 + n - 2 \times 21 = 0$ a pour discriminant 169 et pour solution entière positive $n = 6$
   L'équation $n^2 + n - 2 \times 136 = 0$ a pour discriminant 1 089 et pour solution entière positive $n = 16$
   21 et 136 sont donc bien sectionnables unitaires.
   b. L'équation $n^2 + n - 2 \times 1\,850 = 0$ a pour discriminant 14 801 qui n'est pas un carré parfait et donc n'a donc pas de solution entière. 1 850 n'est donc pas sectionnable.
   Remarque
   On peut aussi raisonner avec des inégalités. La fonction f définie par $f(x) = x^2 + x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(60) < 1850 < f(61)$.
2. Un entier a supérieur ou égal à 3 est un entier sectionnable unitaire si et seulement si l'équation $n^2 + n - 2a = 0$ admet au moins une solution entière positive.
   Cela signifie que son discriminant $1 + 8a$ est un carré parfait et qu'au moins une des solutions de l'équation, à savoir $\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{1+8a}}{2}$, est un entier positif.
   Ceci équivaut à $\sqrt{1+8a}$ existe et est un entier tel que $\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{2}$ soit un entier (l'autre solution est négative) soit $\sqrt{1+8a}$ existe et est un entier impair.

Partie B

1. $9 = 4 + 5$ et $15 = 7 + 8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ donc 9 et 15 sont sectionnables.
   En revanche, $1+2+3+4+5 < 16 < 1+2+3+4+5+6$, $2+3+4+5 < 16 < 2+3+4+5+6$, $3+4+5 < 16 < 3+4+5+6$, $4+5+6 < 16 < 4+5+6+7$, $5+6 < 16 < 5+6+7$, $6+7 < 16 < 6+7+8$, $7+8 < 16 < 7+8+9$ et $8+9 > 16$ donc 16 n'est pas sectionnable.
2. Si n est un entier impair supérieur ou égal à 3, alors il existe un entier k non nul tel que $n = 2k + 1$ soit $n = k + (k+1)$ ce qui prouve que n est sectionnable.
3. $S = (q+1) + (q+2) + \cdots + (q+k) = kq + (1 + 2 + 3 + \cdots + k) = kq + \frac{k(k+1)}{2}$
   Soit $2S = 2kq + k(k+1) = k(k+1+2q)$
4. Pour tout entier p, $p \geq 1$, si $N = 2^p$ alors $2N = 2^{p+1}$est aussi une puissance de 2. Or, quelle que soit la parité de l'entier k, le nombre $k(k+1+2q)$ est le produit d'un entier pair par un entier impair puisque $1 + 2q$ est un entier impair. Il ne peut donc être une puissance de 2.
5. **a.** $56 = 2^3 \times 7$ et $2 \times 56 = 2^4 \times 7 = 7(7+1+8) = 7(7+1+2\times 4)$ et on peut écrire, en posant $k = 7$ et $q = 4$, $56 = 5+6+7+8+9+10+11$.
   b. $2 \times 44 = 8 \times 11 = 8(8+1+2\times 1)$ et $44 = 2+3+4+5+6+7+8+9$.
   c. Soit n un nombre entier positif pair qui n'est pas une puissance de 2. Alors il existe un unique couple d'entiers (r, m) où m est un entier impair supérieur ou égal à 3 et r un entier supérieur ou égal à 1, tel que $n = 2^r \times m$ et $2n = 2^{r+1} \times m$
   On considère deux cas :
   Si $m > 2^{r+1}$ alors $m \geq 2^{r+1} + 1$ et il existe un entier $q \geq 0$ tel que $2n = 2^{r+1}(2^{r+1} + 1 + 2q)$. On peut alors écrire $n = (q+1) + (q+2) + \cdots + (q + 2^{r+1})$.
   Si $m < 2^{r+1}$ alors $m + 1 \leq 2^{r+1}$ et il existe un entier $q \geq 0$ tel que $2n = m(m+1=2q)$. On peut alors écrire $n = (q+1) + (q+2) + \cdots + (q+m)$.
6. En regroupant les résultats de la question 2 et de la question 5, l'ensemble des nombres sectionnables est constitué des nombres entiers impairs et des nombres positifs pairs qui ne sont pas une puissance de 2.

Partie C

1. $2 \times 13 = 26 = 2(2 + 1 + 2 \times 5)$ ce qui donne $13 = 6 + 17$ et il n'y a pas d'autres décompositions possibles car, 13 étant un nombre premier, il n'y a qu'un produit de deux entiers p et q supérieurs ou égaux à 2 et tels que $pq = 13$ et $q \geq p + 1$.
   En revanche, $50 = 5(5 + 1 + 2 \times 2) = 2(2 + 1 + 2 \times 11)$ ce qui donne $25 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ mais aussi $25 + 12 + 13$.
2. **a**. Si $n = (q + 1) + (q + 2) + \cdots + (q + k) = kq + \frac{k(k+1)}{2}$ où $k \geqslant 3$
   Si k est pair, alors il existe un entier k' tel que $k = 2k'$ et $n = k'(2q + k'(2k' + 1))$ et comme $k \geq 3$, $k' \geq 2$ et n n'est pas premier puisqu'il est le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
   Si k est impair, alors il existe un entier k' tel que $k = 2k' + 1$ et $n = kq + k(k' + 1) = k(q + k' + 1)$ et, comme $k \geq 3$, n n'est pas premier puisqu'il est le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2.
   b. Si n est un nombre premier supérieur ou égal à 3, alors il est impair et donc sectionnable d'après la partie B. De plus, en reprenant le résultat et les notations de la question précédente, la décomposition $n = (q + 1) + (q + 2) + \cdots + (q + k)$ ne peut comporter que deux termes.
   On a alors $n = (q + 1) + (q + 2)$ où $q = \frac{n-3}{2}$ qui est bien un entier positif ou nul puisque n est un entier impair supérieur ou égal à 3 et n est bien uniquement sectionnable.

Remarque : On peut aussi raisonner directement comme cela a été fait pour l'entier 13. En effet, si p est un nombre premier supérieur ou égal à 3, $2 \times p$ est la seule décomposition de l'entier $2p$ en produit de deux nombres supérieurs ou égaux à 2 où l'un est strictement supérieur à l'autre.
Alors $2p = 2(2 + 1 + 2q)$ où $q = \frac{p-3}{2}$ qui est bien un entier positif ou nul puisque p est un entier impair supérieur ou égal à 3.

Exercice 3

Trois

1. Le tableau suivant montre les étapes suivies pour parvenir à chacun des entiers compris entre 1 et 12 .

1	Diviser par 2, diviser par 2
2	Diviser par 2
3	Diviser par 2, multiplier par 3, diviser par 2
4	Ne rien faire
5	Diviser par 2, diviser par 2, multiplier par 3 et ajouter 2
6	Diviser par 2, multiplier par 3
7	Multiplier par 3 puis ajouter 2, diviser par 2
8	Diviser par 2, multiplier par 3 et ajouter 2
9	Diviser par 2, diviser par 2, multiplier par 3, multiplier par 3
10	Diviser par 2, multiplier par 3, multiplier par 3 puis ajouter 2, diviser par 2
11	Multiplier par 3, diviser par 2, diviser par 2, multiplier par 3 puis ajouter 2
12	Multiplier par 3.

2. On peut atteindre 8. On multiplie par 3, cela donne 24. On multiplie par 3 et on ajoute 2, voilà 74. On multiplie par 3 et on ajoute 2, voilà 224. On multiplie par 3 et on ajoute 2, voilà 674. On multiplie par 3, et on obtient $2\ 022$

3.

a. Montrons que tous les multiples non nuls de 3 sont atteignables. Le plus petit d'entre eux, m est tel qu'il existe un entier non nul a tel que $m = 3a$. Mais cela signifie qu'il existe une opération autorisée permettant de passer de a à m. Dire que m n'est pas atteignable, c'est dire que a ne l'est pas, mais a est plus petit que m. Contradiction.

b. Si $m - 2$ est un multiple de 3, alors il existe un entier b tel que $m - 2 = 3b$ et donc $m = 3b + 2$, d'où on voit que m peut être atteint à partir de b, qui est plus petit que m. Contradiction.

c. Si $m - 1$ est un multiple de 3, il existe un entier c tel que $m - 1 = 3c$ et donc $m = 3c + 1$. Mais alors $2m = 3 \times 2c + 2$ et donc $2m$ peut être atteint à partir de c, et m à partir de $2m$. Nouvelle contradiction.

d. De trois entiers consécutifs, un est un multiple de 3. Donc l'hypothèse de départ est fausse : il n'y a pas d'entier non nul non atteignable.

Éléments de solution

Exercice 1

Pas mal de têtes

Étude préliminaire

1. ***a.*** Clara coupe la moitié des têtes encore en place, plus une, donc elle en coupe $x + 1$ et il en reste $x - 1$.
b. Noémie coupe le tiers des têtes encore en place, plus deux, donc elle en coupe $x + 2$ et il en reste $2x - 2$.
c. Violette coupe le quart des têtes encore en place, plus trois, donc elle en coupe $x + 3$ et il en reste $3x - 3$.
d. Dans le cas d'un assaut de Violette suivi d'un assaut de Noémie, on passe de $4x$ à $3x - 3$ puis à
$2x - 2 - 2 = 2x - 4$
2. On suppose que $N = 12$. Violette commence, et coupe $3 + 3 = 6$ têtes. Il en reste 6. Noémie en coupe 4 et il en reste 2 et Clara en coupe $1 + 1 = 2$ et c'est fini.
3. Dans le cas $N = 2\,023$, nombre qui n'est ni pair ni multiple de 3 ($2\,023 = 7 \times 17^2$), aucune de chevalières ne peut commencer l'étêtage.

Autres situations

1. ***a.*** On suppose que le dragon possède $8k$ têtes. Cet effectif est un multiple de 4. Violette mène l'assaut et ramène cet effectif à $6k - 3$. Noémie peut lui succéder et le nombre de têtes devient $4k - 4 = 4(k - 1)$.
b. Si l'effectif initial est $4(4k + 1)$, Violette en coupe $4k + 1 + 3 = 4k + 4$ et il en reste … $12k$.
c. Si l'effectif initial est $4(4k + 3)$, on lance Violette qui coupe $4k + 3 + 3$ têtes et il en reste $12k + 6$. On lance Noémie qui en coupe $4k + 2 + 2 = 4k + 4$ et il en reste $8k + 2$. Clara arrive et coupe $4k + 1 + 1 = 4k + 2$. Il reste alors $4k$ têtes au dragon.

Quelques conclusions

1. ***a.*** On suppose que N est un multiple de 4. La question précédente examine tous les types de multiples de 4 :
Les produits de 4 par des nombres pairs s'écrivent $8k$, les produits de 4 par des nombres impairs s'écrivent $4(4k + 1)$ ou $4(4k + 3)$. Dans ces trois situations, on a montré qu'on pouvait passer d'un multiple de 4 à un autre multiple de 4, plus petit. Le plus petit multiple de 4 non nul est 4, et alors c'est Violette qui agit.
b. On suppose que N est pair. La question précédente règle le cas des multiples de 4, il reste à examiner les multiples impairs de 2. Si $N = 2(2k + 1)$, on fait intervenir Clara, qui ramène l'effectif à … $2k$, c'est-à-dire à un effectif pair plus petit que le précédent. Le plus petit effectif pair est 2 et c'est Clara qui agit.
c. Si N est un multiple de 3, ou bien c'est le produit de 3 par un nombre pair, il est pair et on utilise la démarche précédente, ou bien $N = 3(2k + 1)$. Noémie coupe $2k + 1 + 2 = 2k + 3$ têtes et il en reste $4k$ et le problème est résolu.
2. Dans le cas où N n'est ni pair ni multiple de 3, aucune des chevalières ne peut intervenir. Elles ont échoué.

Exercice 2

Le bal des tangentes

1. On obtient l'égalité en développant le membre de droite.
2. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse α a pour pente $f'(\alpha)$, c'est-à-dire $3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$. Dire qu'elle passe par le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse β, c'est dire que :

$$a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d - (a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d) = (3a\alpha^2 + 2b\alpha + c)(\beta - \alpha)$$

$$a(\beta^3 - \alpha^3) + b(\beta^2 - \alpha^2) + c(\beta - \alpha) = (\beta - \alpha)(3a\alpha^2 + 2b\alpha + c)$$

Comme α et β sont distincts, cette égalité fournit :

$$a(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + b(\alpha + \beta) + c = 3a\alpha^2 + 2b\alpha + c$$

Ou encore :

$$a(\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha^2) + b(\beta - \alpha) = 0$$

On met $(\beta - \alpha)$ en facteur là où on peut :

$$a(\beta - \alpha)(\beta + 2\alpha) + b(\beta - \alpha) = 0$$

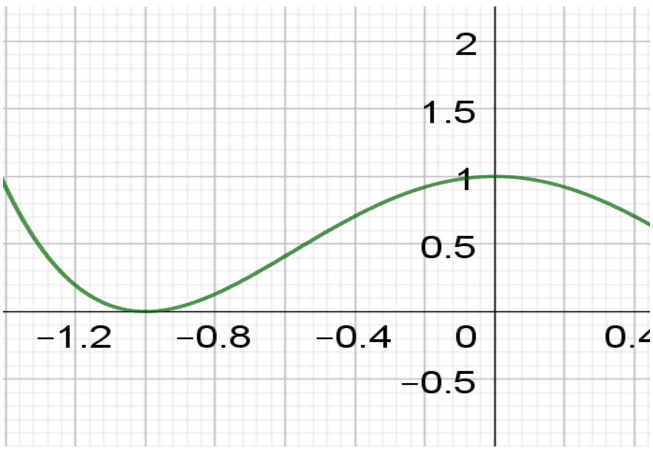
Et on obtient après simplification la relation demandée.

3. La condition proposée se traduit par les trois égalités, simultanément réalisées :

$$\begin{cases} a(2\beta + \alpha) + b = 0 \\ a(2\beta + \gamma) + b = 0 \\ a(2\gamma + \alpha) + b = 0 \end{cases}$$

Si cela a lieu, alors $2\alpha + \beta = 2\beta + \gamma = 2\gamma + \alpha$.
Ces égalités s'écrivent aussi : $2\alpha = \beta + \gamma, 2\beta = \gamma + \alpha, 2\gamma = \alpha + \beta$.
De trois nombres réels, chacun est la moyenne des deux autres. Ils sont donc égaux. Mais cela contredit l'hypothèse qui les prenait distincts.

4. Il se trouve que, dans le cas qui nous occupe, deux tangentes à la courbe représentative de la fonction sont confondues et on peut par conséquent « tourner » sur les points de la courbe d'abscisses -1 et 1 pour en faire une liste de quatre points (pas distincts).

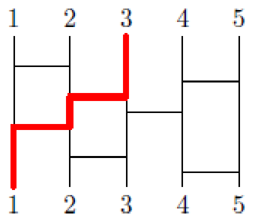


Exercice 3

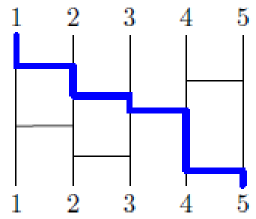
Amidakujis

1.

a.



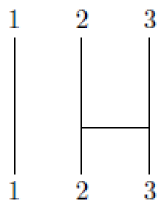
b.



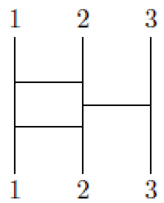
c. On a déjà déterminé que 5 est attribué à 1 et que 1 est attribué à 3. On détermine de même que 2 est attribué à 5, 3 est attribué à 2, et 4 est attribué à 4. D'où : $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&4&2\end{pmatrix}$.

2.

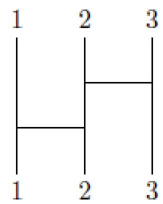
a.



b.



c.



3. En appliquant le même principe de parcours dans un amidakuji mais en partant d'un numéro du bas et en remontant, on aboutit à un numéro du haut donc toutes les tâches sont attribuées.

4. a. D'après la question précédente chaque personne réalise une tâche et chaque tâche est réalisée par une personne. Le nombre d'attributions des tâches est donc le nombre de triplets formés avec les trois numéros 1, 2 et 3 c'est-à-dire $3 \times 2 \times 1 = 6$.

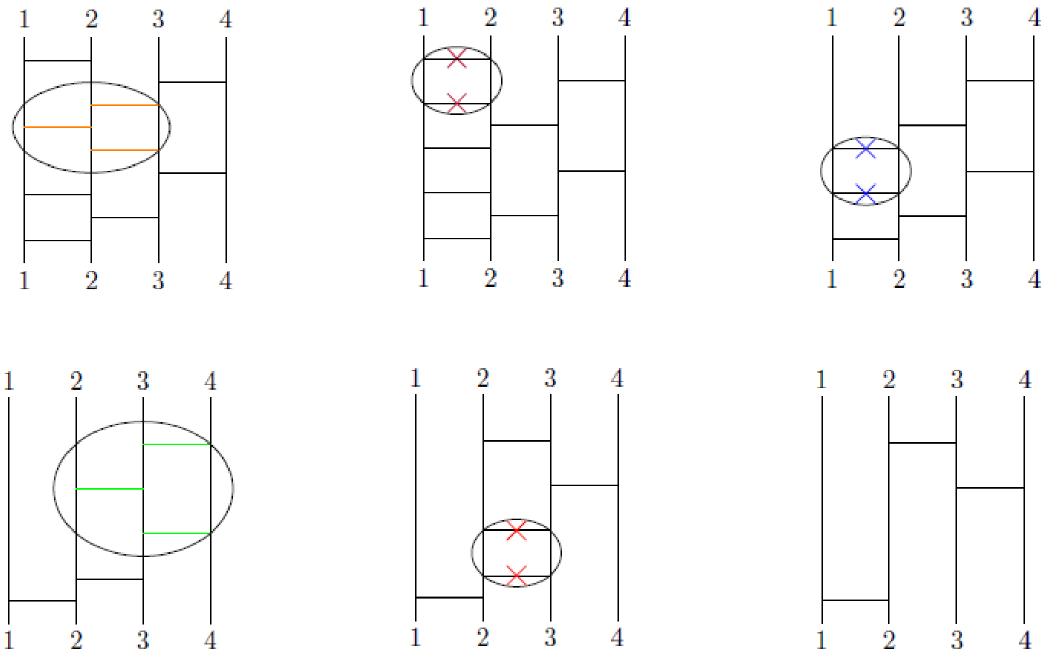
b. Il y a trois barres verticales délimitant deux bandes verticales qu'on va appeler G(gauche) et D(droite).
Sans barre horizontale, on ne peut faire qu'un seul amidakuji.
Avec une seule barre horizontale, il y a deux possibilités de placement de cette barre : dans G ou dans D. On a donc alors 2 amidakujis.
Avec deux barres horizontales, il y a toujours pour chaque barre deux hauteurs possibles : B (basse) ou H (haute) et deux bandes possibles (G ou D) d'où $2 \times 2 = 4$ amidakujis dans ce cas.
Avec trois barres horizontales, on reprend le même raisonnement mais avec cette fois-ci trois hauteurs possibles : B, M (moyenne) et H et, pour chaque hauteur deux bandes possibles (G ou D) d'où $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$ amidakujis dans ce cas.
Au total, on obtient $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ amidakujis différents.

5. Les amikadujis *a*, *b*, et *d* correspondent à $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$, tandis que *c* correspond à $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$. L'amikaduji recherché est donc celui du c.

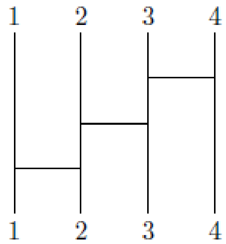
6. a. En cherchant le chemin d'attribution d'une tâche, la première barre horizontale fait changer de barre verticale, tandis que la seconde barre horizontale rencontrée fait revenir à la barre verticale initiale. Ces barres horizontales non séparées par une autre barre horizontale dans un intervalle voisin sont donc superflues.

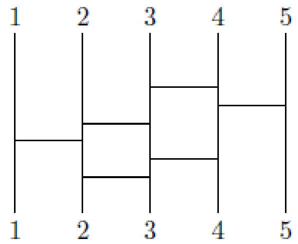
b. On constate que les deux configurations (elles-mêmes amidakujis) correspondent à la même permutation, donc ils peuvent être échangés, à condition qu'il n'y ait pas de barre horizontale s'intercalant avec ce morceau d'amidakuji, avant ou après échange.

c. Voici les étapes :


1 2 3 4
1 2 3 4
1 2 3 4
1 2 3 4
1 2 3 4
1 2 3 4
1 2 3 4
1 2 3 4
1 2 3 4
1 2 3 4
1 2 3 4
1 2 3 4

7.


1 2 3 4
1 2 3 4


1 2 3 4 5
1 2 3 4 5

Éléments de solution Asie

Supercarrés

1. Liste des carrés des entiers de 1 à 20 :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	121	144	169	194	225	256	289	324	361	400

2. ***a.*** 7 est impair, $7 < 24$ et $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$ et $625 = 25^2$.
b. 3 est impair, $3 < 4$ et $3^2 + 4^2 = 5^2$ donc $(3,4)$ est bien un supercarré d'ordre 2. Si $(3, n)$est un supercarré d'ordre 2, alors $n > 3$. Posons $9 + n^2 = p^2$. On a alors $9 = (p - n)(p + n)$, ce qui conduit à $p = n + 1$ et $2n + 1 = 9$, et donc à $p = 5$ et $n = 4$.
c. Si $(5, a)$ est un supercarré d'ordre 2, alors $a > 5$ et $25 + a^2$ est un carré parfait. La liste ci-dessus nous fournit une solution $a = 12$. Si $25 + a^2 = p^2$, alors $(p - a)(p + a) = 25$, ce qui conduit à $p = a + 1$ et $2a + 1 = 25$, c'est-à-dire $a = 12$.
Si $(13, b)$ est un supercarré d'ordre 2, alors $b > 13$ et $169 + b^2$ est un carré, que nous appelons m^2.
De $(m - b)(m + b) = 169$ on déduit comme précédemment que $m = b + 1$ et $2b + 1 = 169$ (en effet, les seuls produits d'entiers égaux à 169 sont 1×169 et 13×13). Ce qui conduit à $b = 84$.
d. Dans tout triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit. Dans le cas où ces trois longueurs sont entières, on parle de *triplets pythagoriciens.*

3. $(5,12,84)$ vérifie les conditions imposées : il y a trois termes, le premier est impair, $5 < 13 < 84$, $5^2 + 12^2 = 13^2$, vu précédemment, et $5^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$, vu précédemment.
4. Un supercarré d'ordre 5 commençant par 3 contient pour commencer un supercarré d'ordre 2 commençant par 3, le seul possible est $(3, 4)$, puis un supercarré d'ordre 3 commençant par $(3, 4)$. On en a vu un en passant, $(3, 4, 12)$. On peut le faire suivre par $(3, 4, 12, 84)$. La somme des carrés de ces quatre nombres est 85^2. En observant que $85 = 5 \times 17$, on cherche un triplet pythagoricien commençant par 5. On a trouvé précédemment $(5, 12, 13)$ et donc $(5 \times 17)^2 + (12 \times 17)^2 = (13 \times 17)^2$. On complète notre liste par $12 \times 17 = 204$ et on obtient un supercarré d'ordre 5 : $(3,4,12,84, 204)$. On peut vérifier que : $3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + 204^2 = 221^2$
En reprenant la méthode de la question 2c, on peut aussi chercher n et p tels que $84^2 + n^2 = p^2$ en choisissant $p = n + 1$ et $2n + 1 = 84^2 + 1$ ce qui donne $n = 3\,612$ et $p = 3\,613$.
5. On peut chercher un triplet (x_1, x_2, x_3) en s'inspirant de la question précédente car $48\,985^2 - 48\,984^2 = 313^2$ et $313^2 - 312^2 = 625 = 25^2 = 7^2 + 24^2$ donc $(7,24, 312, 48\,984)$ est un supercarré.

Alternances

1. ***a.*** Chacun des deux sous-ensembles proposés contient 250 paires d'entiers de somme 1 001.
b. On calcule la somme des entiers compris entre 1 et 700 : $S_{700} = \frac{700\times701}{2} = 245\,350$. Chacun des deux sous-ensembles à construire doit voir la somme de ses éléments égale à 250 250. Pour réaliser les 4 900 manquants, on peut adjoindre à $\{1, 2, 3, \dots\dots, 698, 699, 700\}$ les nombres $1\,000, 999, 998, 997, 906$.

2. Observation préalable : deux alternances successives sont toujours de sens contraire (passage de A vers B puis de B vers A) ?
Ainsi si on note N le nombre d'alternances :
Si N pair, on a N/2 alternances de chaque sorte
Si N impair, on a (N-1)/2 d'une sorte et (N+1)/2 de l'autre
a. Examinons les diverses situations pour les sous-ensembles A et B et les possibilités d'action (pour obtenir l'ensemble des situations possibles, intervertir les rôles de A et B) :

Composition de A	Composition de B	Action possible
Entiers de somme S Entiers a, b, c, d	Entiers de somme S Entiers $a+1, b+1, c-1, d-1$	Ôter a et d de A Ôter $a+1$ et $d-1$ de B
Entiers de somme S Entiers a, b, c, d	Entiers de somme $S-2$ Entiers $a+1, b+1, c+1, d-1$	Ôter a et d de A Ôter $a+1$ et $d-1$ de B On peut remarquer que cette configuration conduit à au minimum 5 alternances.
Entiers de somme S Entiers a, b, c, d	Entiers de somme $S-4$ Entiers $a+1, b+1, c+1, d+1$	Il existe dans B un élément x tel que $x+1$ appartienne à A (*). Ôter a et $x+1$ de A, $a+1$ et x de B. On peut remarquer que cette configuration conduit à au minimum 7 alternances.

(*) Il existe nécessairement une alternance dans l'autre sens, un élément de B ayant pour successeur un élément de A. Sinon, seul le plus petit de a, b, c, d pourrait avoir un successeur dans B.

b. Examinons les diverses situations pour les sous-ensembles A et B et les possibilités d'action (pour obtenir l'ensemble des situations possibles, intervertir les rôles de A et B) :

Composition de A	Composition de B	Action possible
Entiers de somme S Entiers a, b, c	Entiers de somme $S-1$ Entiers $a+1, b+1, c-1$	Ôter a et c de A Ôter $a+1$ et $c-1$ de B
Entiers de somme S Entiers a, b, c	Entiers de somme $S-3$ Entiers $a+1, b+1, c+1$	Même action qu'en **2. *a.*** avec le même argument (*)

Observons que ce cas ne peut se produire car il conduit à 5 alternances car si on suppose $a < b < c$ on en déduit que $a < a+1 < b < b+1 < c < c+1$, chaque changement de couleur indique qu'il y a un changement d'ensemble donc l'existence d'une alternance.

Le schéma de 3 alternances donne si on suppose la première alternance de A vers B :
éléments de A, éléments de B, éléments de A , éléments de B
donc si dans A on a : $a < b < c$ alors dans B, on a : $a+1 < b-1 < c+1$

Remarque : si on pense à utiliser un axe pour matérialiser qu'on est dans A ou dans B, alors on voit tout bien et beaucoup plus facilement
Voilà ce que cela donne pour exactement 4 alternances :

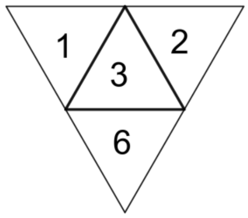
c. Comme précédemment, deux alternances de sens contraire se compensent, et deux alternances – les seules – de même sens ne peuvent se produire.

d. Le cas où on ne rencontrerait qu'une seule alternance est celui où il existerait un entier p tel que tous les entiers inférieurs ou égaux à p seraient dans le même sous-ensemble et tous les entiers supérieur à p seraient dans l'autre. Ce qui est possible si l'équation $\frac{p(p+1)}{2} = \frac{1\,000 \times 1\,001}{4}$ a des solutions entières, ce qui n'est pas le cas.

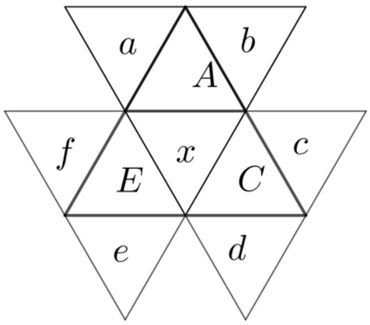
3. Les deux sous-ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ et $B = \{15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ ont des « sommes » identiques, 105. Comme les éléments de A sont tous inférieurs strictement aux éléments de B, toute somme réalisée avec deux éléments de A est inférieure à toute somme réalisée avec deux éléments de B.

N.B. Une telle circonstance peut se produire si des entiers p et q ($p < q$) sont tels que :
$\frac{p(p+1)}{2} = \frac{q(q+1)}{4}$. Elle se produit par exemple si $p = 2$ et $q = 3$, mais alors l'un des deux sous-ensembles n'a qu'un élément, on ne peut lui en ôter 2.

Triangles de Dirichlet



1. La moyenne arithmétique de 1, 2 et 6 est 3.
2. ***a.*** Nommons les nombres contenus dans les petits triangles comme sur la figure ci-dessous

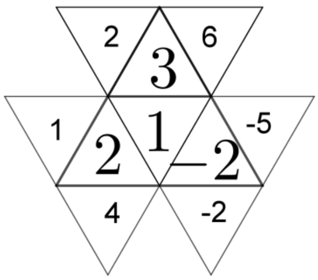


Le caractère magique du triangle impose les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 3A = a + b + x \\ 3C = c + d + x \\ 3E = e + f + x \end{cases}$$

Et $9x = 3A + 3C + 3E = a + b + c + d + e + f + 3x$
D'où le résultat.

b. On commencera par déterminer le contenu du triangle central, ce nombre est la moyenne des six nombres « extérieurs » puis on déterminera les contenus des triangles intérieurs autres que le triangle central en calculant les moyennes, par exemple $A = \frac{1}{3}(a + b + x)$. La solution est unique, il n'y a que des calculs directs.
c. Voici la figure complétée



3. Il s'agit simplement de rappeler que la moyenne de la somme de deux suites ayant le même nombre de termes est la somme de leurs moyennes (c'est la *linéarité de la moyenne arithmétique*)