www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

EXERCICES NATIONAUX
2021

CORRIGÉS

- Métropole - Europe - Afrique - Orient - Inde
- Amériques - Antilles-Guyane
- Asie - Pacifique - Nouvelle Calédonie - Polynésie

Éléments de solution

Exercice 1 (pour tous)

1., 2. et 3.

n	6	101	361	2 021
Les diviseurs de n	$1;\ 2;\ 3;\ 6$	$1; 101$	$1; 19; 361$	$1, 43; 47; 2\,021$
$S(n)$	12	102	381	2 112
$2S(n)$	24	204	762	4 224
$(n+1)N(n)$	28	204	1 086	8 088

4. *a.* Chaque diviseur de n figure deux fois dans la somme $T(n)$, donc $T(n) = 2S(n)$.
b. $ab - a - b + 1 = (a-1)(b-1)$ fait apparaître $ab - a - b + 1$ comme produit de nombres positifs, d'où le résultat.
c. Application au cas $dq = n$.
d. Dans l'écriture de $T(n)$, on regroupe les termes par deux, et on « somme » les inégalités obtenues pour obtenir l'inégalité générale.

5. *a.* La seule façon de faire qu'une somme de termes tous positifs tous majorés par le même nombre soit égale au produit de ce majorant par le nombre de termes est que chaque terme soit égal à ce majorant. On a donc, pour chaque diviseur de n : $(d-1)(q-1) = 0$.
b. Les seules valeurs admissibles pour d sont donc 1 ou n. n est donc un nombre premier.
c. Réciproquement, si n est premier, ses diviseurs sont 1 et n, leur somme est $n+1$ et leur effectif 2, donc l'égalité (*) est satisfaite.

Exercice 2 (spécialistes)

A. Quelques exemples

1. ***a.*** $7 = 2 + 5$ et $7^2 = 2 \times 22 + 5$, donc 7 est 22 −décomposable.
On peut essayer les décompositions possibles de 7 en sommes d'entiers inférieurs :
$0 \times 10 + 7 = 7, 1 \times 10 + 8 = 18, 2 \times 10 + 5 = 25, 3 \times 10 + 4 = 34, 4 \times 10 + 3 = 43, 5 \times 10, 6 \times 10$ et 7×10 sont supérieurs à 49. Donc 7 n'est pas 10 −décomposable.
b. $45 = 20 + 25$ et $2\,025 = 20 \times 100 + 25$ donc 45 est 100 −décomposable.
2. ***a.*** Dire que a est 1 −décomposable, c'est dire qu'il existe des entiers q et r tels que $a = q + r$ et $a^2 = q \times 1 + r$, ce qui nécessite $a = a^2$. 0 et 1 sont donc les seuls possibles, et ils possèdent effectivement la propriété, les couples associés étant $(0, 0)$ et $(1, 0)$ (et aussi $(0, 1)$).
b. Dire que a est 2 −décomposable, c'est dire qu'il existe des entiers q et r tels que $a = q + r$ et $a^2 = 2q + r$, ce qui nécessite que $a(a-1) = q$. Comme $q \leq a$ et qu'on parle d'entiers positifs, il s'ensuit que $a - 1 \leq 1$. Les trois possibilités sont donc $2, 1$ et 0. On vérifie comme précédemment que ces trois valeurs conviennent.
3. ***a.*** $N^2 = N \times N + 0$ donne la réponse, N est N −décomposable.
b. $(N-1)^2 = (N-2) \times N + 1$ donne la réponse : $(N-1)$ est N −décomposable.
c. Une égalité telle que $4 = a \times N + b$ ne saurait avoir lieu que pour $a = 0$, sinon le second membre est strictement supérieur au premier, et pour $a = 0$, on obtient $4 = 2$.

B. Une étude des nombres N −décomposables

1. ***a.*** Si k est N −décomposable, il existe des entiers q et r tels que $k = q + r$ et $k^2 = q \times N + r$. Comme q et r sont inférieurs ou égaux à k, on en déduit $k^2 \leq k(N+1)$, et $k \leq N + 1$.
Est-il possible que k soit égal à $N + 1$?

Si cela était, il existerait un entier a tel que $(N+1)^2 = aN + (N+1-a)$, ou encore $N(N+1) = a(N-1)$, qui conduit à $a > N+1$, impossible dans notre hypothèse. Donc $k \leq N$.
b. Les entiers $3-$décomposables sont inférieurs ou égaux à 3 d'après ce qui précède, et les résultats de la partie A permettent de conclure positivement pour 3 et 2. 1 et 0 sont, quel que soit $N, N-$décomposables (avec les couples $(0,0)$ et $(0,1)$).
La partie A a aussi résolu le cas de 2 comme non $4-$décomposable. Il ne reste donc que 4, 3, 1 et 0 qui le soient.

2. Supposons que pour un couple (k, N), il existe deux entiers p et q tels que :

$$\begin{cases} k^2 = pN + k - p \\ k^2 = qN + k - q \end{cases}$$

Nécessairement, $(N-1)(p-q) = 0$ et comme $N \geq 2$ l'unicité est démontrée.

3. *a.* On peut écrire $k^2 = qN + k - q$ (en utilisant directement $k = q + r$), ou encore $k^2 - k - q(N-1) = 0$.
L'existence du couple (q, r) induit le fait que k est solution de cette équation.
b. Réciproquement, s'il existe un entier q compris entre 0 et k tel que k soit solution de cette équation, alors en posant $r = k - q$, on revient bien au système (S).
c. Essayons d'écrire différemment k et $N-1$ pour faire apparaître l'équation précédente :

$$k^2 - k = 2^{2p-2}(2^p-1)^2 - 2^{p-1}(2^p-1) = 2^{p-1}(2^p-1)(2^{2p-1} - 2^{p-1} - 1)$$

$$k^2 - k = 2^{p-1}(2^p-1)(2^{2p-1} - 2^p + 2^{p-1} - 1) = 2^{p-1}(2^p-1)(2^p+1)(2^{p-1}-1)$$

$$k^2 - k = 2^{p-1}(2^{p-1}-1)(2^{2p}-1)$$

Dans cette dernière égalité, on reconnaît le facteur $N-1$, précédé de $2^{p-1}(2^{p-1}-1)$, entier inférieur à k.

4. Calculons $(N-k)^2 - (N-k) = N(N-1) + k^2 - k - 2Nk + 2k = (N-1)(N-2k+q)$
(la lettre q qui apparaît dans cette dernière expression est liée précédemment à k). Le dernier facteur est bien inférieur à $N-k$ (c'est $N-k-(k-q)$).
5. Posons $N = 2k$ et écrivons la condition nécessaire et suffisante établie plus haut : il existe un entier q compris entre 0 et k tel que $k^2 - k - q(2k-1) = 0$. On a donc $k(k-1) = q(2k-1)$, qui assure que $k(k-1)$ est un multiple de $2k-1$. D'où on tire que $4k(k-1)$, qui est égal à $(2k-1)^2 - 1$ est lui aussi un multiple de $(2k-1)$ et donc 1 en est un aussi. Impossible.

6. On a montré que les entiers $N-$décomposables sont inférieurs à N. D'après la question précédente, $\frac{N}{2}$ – un entier dans le cas où N est pair – ne l'est pas. Par ailleurs, si k est $N-$décomposable, $N-k$ l'est aussi. On peut donc regrouper les entiers $N-$décomposables par paire $\{k, N-k\}$. Il y en a donc un nombre pair.

7. Posons $N - 1 = p$. La condition nécessaire et suffisante : il existe un entier q inférieur ou égal à k tel que $k(k-1) - qp = 0$ indique que p divise $k(k-1)$, et comme p est un nombre premier, il divise un des deux facteurs. Les possibilités sont $k = 0, k = 1, k = N-1, k = N$.

8. La condition $k(k-1) = qN$. Montre que les nombres N tels que k soit $N-$décomposable sont des diviseurs de $k(k-1)$. Il y en a donc un nombre fini.

Exercice 3 (non spécialistes)

1. *a.* proposition fausse car, par exemple, $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$ et ce n'est pas une fraction égyptienne.
b. proposition vraie car pour tous les entiers n et p non nuls, $\frac{1}{n} \times \frac{1}{p} = \frac{1}{np}$ et np est un entier non nul.
c. proposition fausse car, par exemple, $\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1}$ et ce n'est pas une fraction égyptienne.
2. *a.* On peut proposer les deux décompositions $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. On en déduit qu'il peut ne pas y avoir unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel.
b. $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ et $\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
3. *a.* Comme la base de la pyramide SABCD est un carré et ses faces sont des triangles isocèles en S, la somme des longueurs des arêtes de cette pyramide SABCD est $4\text{AB} + 4\text{SA}$.

Donc $4\text{AB} + 4\text{SA} = \frac{4}{30} + \frac{4}{20} = \frac{2}{15} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ qui est une fraction égyptienne. On en déduit que SABCD est une pyramide égyptienne.

b. Pour les mêmes raisons que dans le cas particulier de la question **a.**, $4\text{AB} + 4\text{SA} = \frac{4}{p} + \frac{4}{q}$.

Si $p < 4$ ou $q < 4$, alors, puisque les nombres considérés sont strictement positifs, on a $\frac{4}{p} > 1$ ou $\frac{4}{q} > 1$ et, dans les deux cas, $4\text{AB} + 4\text{SA} > 1$. Donc $4\text{AB} + 4\text{SA}$ ne peut pas être une fraction égyptienne (qui est nécessairement strictement inférieure à 1) donc SABCD n'est pas une pyramide égyptienne.

On en déduit que si SABCD est une pyramide égyptienne alors $p \geq 4$ et $q \geq 4$.

c. SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $4\text{AB} + 4\text{SA} = \frac{1}{n}$.

Or, en réduisant au même dénominateur, $4\text{AB} + 4\text{SA} = \frac{4}{p} + \frac{4}{q} = \frac{4p+4q}{pq}$

Donc SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$.

d. Par ce qui précède, SABCD est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$ qui s'écrit $4n(p+q) = pq$.

Pour tous entiers naturels p et q non nuls, $4n(p+q)$ est un nombre pair.

Si p et q sont des nombres impairs alors pq est aussi un nombre impair.

L'égalité $4n(p+q) = pq$ est impossible si p et q sont impairs.

Éléments de solution

k-couples

Partie A Questions préliminaires

1. $(6\,;30)$ et $(10\,;10)$ sont des 5-couples puisque $6 \leq 30$ et $6 \times 30 = 180 = 5 \times (6 + 30)$
De même, $10 \leq 10$ et $10 \times 10 = 100 = 5 \times (10 + 10)$.
$(30\,;6)$ n'est pas un 5-couple car $30 > 6$.
$(5\,;25)$ n'est pas un 5-couple puisque $5 \times 25 = 125$; $5 \times (5 + 25) = 150$ et $125 \neq 150$.

2. $8 \times 56 = 7(8 + 56)$ avec $8 \leq 26$ donc $(8\,;56)$ est un 7-couple.

3. Supposons qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $(3\,;5)$ soit un k-couple.
Alors $3 \times 5 = k(3 + 5)$. Mais 15 n'est pas multiple de 8. La réponse est non.

4. $mx \times my = m^2xy = m^2 \times k(x + y) = mk(mx + my)$. De plus, comme $m > 0$, $mx \leq my$. Donc (mx, my)est un mk-couple.

Partie B Recherche de certains k-couples

1. Supposons que $(x\,;y)$ soit un 1-couple.
D'une part $y \geq 2$ puisque $(1\,;1)$ n'est pas un 1-couple. Ainsi $y - 1$ est un entier naturel non nul.
D'autre part, $xy = x + y$ d'où $x(y - 1) = y$ avec x entier naturel non nul donc $y - 1$ divise y.
$y - 1$ divise alors $y - (y - 1) = 1$. Comme $y - 1 \neq -1$, on en déduit que $y - 1 = 1$ soit $y = 2$.
En substituant y par 2 dans $xy = x + y$, on obtient $x = 2$.
Or $2 \times 2 = 1 \times (2 + 2)$. Donc $(2\,;2)$ est bien un 1-couple et c'est le seul 1-couple.

2. Soit$(x\,;y)$ un k-couple. La condition $xy = k(x + y)$ implique $(x - k)(y - k) = k^2$.
Supposons $x - k < 0$ alors $y - k < 0$ (pour que le produit soit strictement positif).
Comme de plus x et y sont supérieurs ou égaux à 1 alors $x - k \geq 1 - k$ et $y - k \geq 1 - k$.
Ainsi $1 - k \leq x - k < 0$ et $1 - k \leq y - k < 0$ soit $0 < k - x \leq k - 1$ et $0 < k - y \leq k - 1$.
D'où $(k - x)(k - y) \leq (k - 1)^2$ soit$(x - k)(y - k) \leq (k - 1)^2$, ce qui contredit $(x - k)(y - k) = k^2$.

Ainsi $x - k$ est un diviseur positif de k^2donc $x - k = 1$ ou $x - k = k$ ou $x - k = k^2$ puisque, k étant premier, les seuls diviseurs de k^2 sont 1, k et k^2.
Si $x - k = 1$ alors $x = k + 1$ et on obtient $y = k^2 + k$.
Si $x - k = k$ alors $x = 2k$ et on obtient $y = 2k$.
Si $x - k = k^2$ alors $x = k^2 + k$ et on obtient $y = k + 1$. On élimine ce cas puisqu'il faut $x \leq y$.
Les couples $(k + 1\,; k^2 + k)$ et $(2k\,;2k)$ sont bien des k-couples
En effet, $(k + 1)(k^2 + k) = k(k + 1 + k^2 + k)$ et $2k \times 2k = k(2k + 2k)$. Et ce sont les seuls.

3. Raisonnement identique sachant que les diviseurs de 2021^2 sont1, $43, 47, 43^2, 43 \times 47, 47^2, 47 \times 43^2$, 43×47^2 et 2021^2. On obtient les couples :
$(2022\,;4086462)$,$(2064\,;97008)$, $(2068\,;88924)$,$(3870\,;4230)$,$(4042\,;4042)$.

Partie C k-points et croix

1. Le programme complété figure ci-contre.

```
def croix(x,y):
    if x*y % (x+y)==0:
        return True
    else:
        return False
```

2. Le point de coordonnées$(2k\,;2k)$ est un k-point appartenant à D.
Le point de coordonnées $(k + 1\,; k^2 + k)$ est un k-point appartenant à P.
3. Soit $A(x; y)$ une croix : il existe un entier naturel non nul k tel que $(x; y)$ soit un k-couple.
Pour m entier naturel non nul, le point $A_m(mx\,;my)$ est un mk-point donc A_m est une croix.
De plus il appartient à la droite (OA) puisque $\overrightarrow{OA_m} = m\overrightarrow{OA}$.

4. Soit d une droite passant par O et de coefficient directeur rationnel $\frac{a}{b}$ supérieur ou égal à 1 (a et b entiers naturels avec $0 < b \leq a$).
Il est facile de vérifier que $A\big(b(a + b)\,; a(a + b)\big)$ appartient à d et que A est un ab-point donc une croix.
D'après la question 2), on en déduit que d contient une infinité de croix.

Chaînes

1. *a.* La suite $1, 2, 4, 5, 10, 20, 21$ est une chaîne de longueur 7 (on vérifie que $2 = 1 + 1, 4 = 2 + 2,$
$5 = 4 + 1, 10 = 5 + 5, 20 = 10 + 10, 21 = 20 + 1$)
b. La suite $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 22$ est une chaîne de longueur 12 (on vérifie que $22 = 13 + 9$,
$13 = 10 + 3, 10 = 9 + 1$, les termes précédents s'obtenant an ajoutant 1 à leur prédécesseur).

2. *a.* $a_2$est obtenu comme somme de deux termes précédents, la seule possibilité est $a_2 = 1 + 1 = 2$.
Les termes précédant a_3 sont 1 et 2. Les seules possibilités sont $a_3 = 3$ ou 4, attendu que la suite doit être strictement croissante.
b. La méthode de construction de la chaîne indique que chaque terme est inférieur ou égal au double du terme précédent (au plus la somme du terme précédent et de lui-même). Le terme de rang k est donc inférieur ou égal à la puissance de 2 correspondante (en commençant la liste des puissances de 2 à 2^0, $a_k \leq 2^{k-1}$.
3. La suite $1, 2, 3, \ldots, n - 1, n$ a pour longueur n et pour dernier terme n. Ce n'est pas la seule. On peut aussi ajouter 2 à chaque terme à partir du deuxième, et finir en ajoutant 1 si on est parvenu à $n - 1$ et 2 si on est parvenu à $n - 2$.

4. *a.* D'après la question **2. *b.***, pour une chaîne de longueur $\ell(n)$ dont le dernier terme est n, $a_{\ell(n)} \leq 2^{\ell(n)-1}$, et donc $n \leq 2^{\ell(n)-1}$, d'où il vient que $2^p \leq 2^{\ell(n)-1}$, ce qui prouve que $\ell(n) \geq p + 1$.
b. Le $(p + 1)$ème terme d'une chaîne de longueur $p + 1$ est inférieur ou égal à 2^p(résultat obtenu en doublant chaque terme pour obtenir le suivant). Le seul entier n compris entre 2^pet 2^{p+1}pour lequel $\ell(n) = p + 1$ est donc 2^p.

5. *a.* La question précédente assure que $\ell(12) > 4$. La chaîne $1, 2, 4, 8, 12$ a pour longueur 5 et son dernier terme est 12. Donc $\ell(12) = 5$.
b. Comme précédemment, $\ell(11) > 4$. Le troisième terme de la suite est 3 ou 4. S'il vaut 3, on élimine les cas où le quatrième terme est inférieur ou égal à 5, le cinquième étant dans ce cas au maximum 10, il reste le cas $1, 2, 3, 6$, on ne peut obtenir comme cinquième terme que $7, 8, 9, 12$. On raisonne de même pour éliminer un troisième terme égal à 4 (le quatrième pouvant être $5, 6, 8$). Les suites de longueur 5 ne conviennent donc pas. En revanche, la chaîne $1, 2, 4, 8, 10, 11$, de longueur 6, convient.
c. Adjoindre à une chaîne de dernier terme n le terme supplémentaire $(n + 1)$ n'est pas la seule façon d'obtenir une chaîne de dernier terme $n + 1$ … On a vu que $\ell(11) > \ell(12)$, ce qui nie la croissance éventuelle, comme $\ell(3) > \ell(2)$ nie la décroissance.

6. *a.* On a $2^p < 2^p + 2^q < 2^{p+1}$ et on a vu que le seul entier n compris entre 2^pet 2^{p*1} pour lequel $\ell(n) = p + 1$ est donc 2^p. La chaîne permettant de réaliser ce résultat fait figurer toutes les puissances de 2 inférieures à 2^p, notamment 2^q, qu'il suffit d'ajouter au dernier terme 2^p pour obtenir une chaîne de longueur $p + 2$ de dernier terme $2^p + 2^q$. D'après la question **4. *b.***, ce résultat est le meilleur possible.
b. Le développement du membre de droite commence par $2^r\big((2^{q-r}(2^{p-q} + 1) + 1)\big) + 2^s$, d'où on voit la suite…
Le schéma de calcul précédent montre comment obtenir une chaîne aboutissant à $2^p + 2^q + 2^r + 2^s$: on ajoute 1 quand il faut et on duplique les termes autant de fois que nécessaire. D'où le résultat.
c. Le même raisonnement s'étend à un nombre quelconque de puissances de 2.
d. On peut écrire $2\,021 = 1\,024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 4 + 1$. Dans cette somme apparaissent 8 puissances de 2 distinctes, la plus élevée étant 2^{10}. En appliquant la question précédente $\ell\big(2\,021\big) \leq 10 + 8$.
Une chaîne de 18 termes aboutissant à 2 021 est, par exemple :
$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1\,024, 1\,536, 1\,792, 1\,920, 1\,984, 2\,016, 2\,020, 2\,021$

7. La chaîne $1, 2, 4, 5, 9, 18, 36, 72, 144, 288, 576, 1\,152, 1\,728, 2\,016, 2\,021$ a pour longueur 15. Donc $\ell\big(2\,021\big) \leq 15$.
Une chaîne de longueur 13 a un onzième terme inférieur à 1 024, auquel on ajoute successivement deux des termes précédents, inférieurs respectivement à 512 et à 256 (deux fois 512, cela ferait 2 048). On obtient au maximum 1 792. Donc $\ell\big(2\,021\big) \geq 13$

Produits de chiffres

1. Le produit des chiffres de e est $151\ 200$.

2. Pour trouver un élément de E dont les chiffres aient pour produit $P(e)$ il suffit de changer l'ordre des chiffres de e, par exemple 27 233 552 232.
Un exemple d'entier dont le produit des chiffres est le même que celui de e et n'appartenant pas à E s'obtient par exemple en remplaçant les deux chiffres 2 successifs par le chiffre 4 : 2 723 355 432

3. Supposons qu'il existe un plus grand entier naturel, pas nécessairement élément de E, dont le produit des chiffres soit le même que celui de e. On ajoute un 1 à gauche de l'écriture décimale de ce nombre et on obtient un entier plus grand mais dont le produit des chiffres est le même.
Il n'existe donc pas un plus grand entier naturel, pas nécessairement élément de E, dont le produit des chiffres soit le même que celui de e.

4. Le produit des chiffres de l'entier e est $2^5 \times 3^3 \times 5 \times 5 \times 7$. L'idée est de regrouper entre eux les chiffres de l'écriture de e pour obtenir un entier ayant moins de chiffres.

On remarque déjà qu'il faut conserver les chiffres 5, 5 et 7 car s'ils sont multipliés entre eux ou par 2 ou par 4, on obtient des nombres plus grands que 10 et on change le produit des chiffres de e.
On travaille donc avec le produit $2^5 \times 3^3 = 864$ et on cherche l'écriture comportant le moins de chiffres mais dont le produit des chiffres vaut 864.
Comme $9 \times 9 \times 9 = 729$ et $729 < 864$, cette écriture comporte au moins 4 chiffres.
Garder le chiffre 2 comme le chiffre le plus à gauche garantit, pour la même longueur de l'écriture, d'avoir l'entier le plus petit.
On est ainsi ramené à chercher un entier dont l'écriture comporte 3 chiffres dont le produit est $432 = 2^4 \times 3^3$.
Notons $\overline{abc}$ l'écriture de ce nombre. Nécessairement $bc \leq 81$ ce qui entraine $a > 5$.
* Si $= 6$, alors $bc = 72$ ce qui donne $b = 8$ et $c = 9$ (en rangeant les chiffres dans l'ordre croissant pour avoir l'entier le plus petit)
* 7 n'est pas un diviseur de 432
* Si $a = 8$ alors $bc = 54$ ce qui donne $b = 6$ et $c = 9$.
* Si $a = 9$ alors $bc =\ 48$ ce qui donne $b = 6$ et $c = 8$.

Dans tous les cas, les 3 chiffres a, b, c sont donc dans l'ordre croissant 6,8,9.
Le plus petit nombre qui a le même produit des chiffres que e est alors, en écrivant tous les chiffres dans l'ordre croissant : $\mathbf{2556789}$

Éléments de solution

Un espace de cartes

1. Il y a exactement 27 cartes, $3 \times 3 \times 3$.
2. ***a.*** Appelons dans l'ordre a, b et c les chiffres figurant sur la carte M et a', b' et c' leurs homologues sur la carte N. Si $a \neq a'$, appelons $a"$ celui des trois chiffres 1,2,3 qui n'est ni a ni a'. Faisons de même avec les chiffres des autres rangs. Si les chiffres d'un certain rang dans M et N coïncident, mettons $b = b'$, on prend $b" = b$ également. La carte P choisie obéit à ce protocole.
b. On trouve le point $[369]$ sur la première, le point $[357]$ sur la seconde.
c. Il résulte de ce qui précède que les chiffres marqués sur M sont, rang par rang, identiques à ceux marqués sur N et P, soit différents de l'un et l'autre, eux-mêmes différents, ce qui montre que la condition " M appartient à la droite (NP)" est satisfaite.
d. Le protocole mis en œuvre pour trouver P conduit à chaque étape à un choix unique : soit on prend le chiffre qui reste, soit on prend celui qui est déjà sur les deux cartes. Il n'y a pas de quatrième point sur la droite (MN).
e. On choisit une première carte, il y a 27 possibilités de le faire, puis une seconde, pour laquelle restent 26 possibilités. Au total, $27 \times 26 = 702$ couples. Ces 702 couples ne font que 351 paires mais, quand on ajoute l'unique troisième point possible, les 351 triplets produits peuvent provenir de 117 paires. D'où le résultat.

3. ***a.*** La carte $[147]$ est commune aux deux droites.
b. On peut les énumérer :
- les droites définies par deux cartes ne partageant aucun chiffre avec 147 : $([258][369])$, $([268][359])$, $([259][368])$, $([269][358])$;
- les droites définies par deux cartes partageant un chiffre avec 147 . Il y en a 6 ;
- les droites définies par deux cartes partageant deux chiffres avec 147. Il y en a 3.

Au total, cette carte est commune à 13 droites.
c. Les droites $([147][258])$ et $([168][257])$ n'ont aucune carte en commun.

4. ***a*** On obtient les 9 points suivants :
159-248-257
147-168-269-349-358-367
4. ***b***
On obtient 12 droites :
on choisit 2 points parmi 9, ce qui donne 36 couples mais alors chaque droite est comptée 3 fois d'où le résultat.
Listes des triplets de points de chacune de ces 12 droites du plan $([159]\ [248]\ [257])$:
147-159-168
147-248-349
147-257-367
147-269-358
159-248-367
159-257-358
159-269-349
168-248-358
168-257-349
168-269-367
248-257-269
349-358-367

Carrés borroméens

1. Seul le tableau de droite est un carré borroméen. Pour celui de gauche, $1+4 \neq 3+6$, pour celui du milieu, $3+8 \neq 7+6$.

2. *a.* La somme $A+B+C+D+E+F+G+H+I$ vaut 45.
b. Faisons la somme de tous les nombres apparaissant dans les carrés grisés ci-dessus. On obtient :

$$5S = A+C+G+I+3(B+D+H+F)+4E$$

Et donc $5S = 45+2(B+D+H+F)+3E$, puis $3S = 45+3E$, d'où $S = 15+E$.

c. L'égalité $E = 1$ conduit à : $\left\{\begin{array}{c} A+B+D=15 \\ B+C+F=15 \\ D+G+H=15 \\ F+H+I=15 \\ B+D+H+F=16 \end{array}\right.$ d'où viennent d'abord $B+D = 15-A$
et $B+D = 16-(15-I) = 1+I$
d'où $A+I = 14$. $(A,I) = (8{,}6)$ conduit à $B+D = 7$ et on peut compléter un premier carré borroméen de somme 16.

8	4	9
3	1	2
5	7	6

d. Pour $E = 9$, on a les égalités $\left\{\begin{array}{c} A+B+D=15 \\ B+C+F=15 \\ D+G+H=15 \\ F+H+I=15 \\ B+D+H+F=24 \end{array}\right.$

5	7	2
3	9	6
4	8	1

On trouve cette fois $A+I = 6$ et on voit que $B+D+H+F = 30-(C+G)$qui conduit à $C+G = 6$ et on peut compléter un carré borroméen de somme 24
En observant que $24 = 40-16$ on peut aussi reprendre le carré précédent en faisant les compléments à 10 (on obtient à une rotation près le carré précédent).

2	6	1
7	9	8
5	3	4

3. *a.* Comme nous l'avons utilisé dans les questions précédentes, on trouve $A+I = S-2E$. Comme S est impaire et $2E$ pair, il s'ensuit que $A+I$ est impair. Ces nombres sont de parités différentes.
b. Il y a quatre nombres pairs et cinq impairs entre 1 et 9…
c. On sait que E (voir question **2.**) et A sont pairs. Pour une somme S impaire, il s'ensuit que B et D sont de parités différentes. Si on suppose B pair, il reste un seul nombre pair à placer et la somme $B+D+H+F$ doit être réalisée avec un ou trois nombres impairs. Il y en a déjà un, D, donc les deux autres H et F sont impairs. Ce qui entraîne que C est pair (seul nombre impair dans la somme $B+C+E+F$). C'est fini, la première structure proposée est complète.
Si on suppose B impair, il est nécessaire que D soit pair et la structure se déduit de la première par rotation d'un quart de tour.
d. On suppose que dans le carré étudié, les nombres pairs sont représentés par des croix. La somme des nombres pairs est $A+B+C+E = 20$.

x	x	x
	x	

Comme $A+B+D+E = S$, on en déduit que $D-C+20 = S$
De même $B+C+E+F = S$ fournit $F+20-A = S$

$B+D+H+F = S$ donne $H = S-(B+D+F) = S-(B+(S-20+C)+(A-20+S))$

Donc $H = S-(B+C+A)+40-2S = E-20+40-S = 5$ (d'après la question **2 b.**)
Pour le cas où le carré aurait l'autre structure, remplacer C par G et Bpar D pour trouver le même résultat.

4	8	6
3	**2**	1
7	**5**	9

e. Ce carré est nécessairement de somme 17 (car $S = 15+E$). Si on place les nombres pairs dans la situation traitée en ***d.***, on a nécessairement $B = 8$ et $C = 6$ et le contenu des autres cases s'en déduit directement.

4. *a.* La somme étant 20, on en déduit que $E = 5$ et il ne reste pour les nombres pairs que les positions médianes. Leur somme $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ convient.
On les place par exemple comme ci-contre (mais 2 ne va pas avec 8, car $2 + 5 + 8 = 15$ et le complément s'écrit directement. La disposition ci-contre convient :

9	4	3
2	**5**	8
7	6	1

b. Supposons que A soit pair (sans perdre de généralité). Comme $E = 5$, on en déduit que seul un des deux B ou D est impair. Là encore pour des raisons de symétrie on peut considérer que B est pair. La somme $B + D + H + F$ étant paire, un exactement parmi H et F est pair. Les nombres pairs se répartissent alors de l'une des deux façons ci-contre, mais celle de gauche doit être éliminée, car elle ne montre qu'un nombre impair parmi E, H, I, F .
Seule possibilité : les nombres pairs sont A, B, F et I.
Le carré composé de D, E, G et H a trois de ses cases occupées par des nombres impairs distincts et distincts de 5, et dont la somme doit être 15. Impossible. Un tel carré n'existe pas.

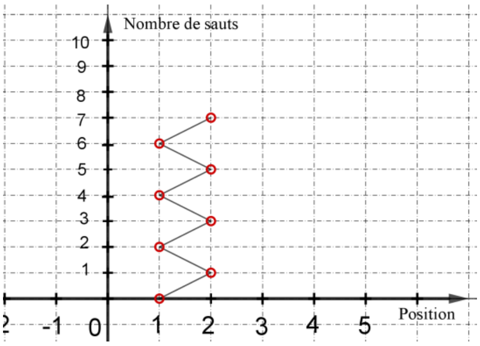
x	x	
	5	
x	x	

x	x	
	5	x
		x

Sauts de puce

1. ***a.*** Un saut vers la gauche compensant un saut vers la droite, le but final est atteint après deux sauts vers la gauche. La puce a atteint le point d'abscisse -2.
b. Il y a 15 façons de placer les deux sauts à droite dans l'ensemble des 6 sauts, donc 15 parcours possibles. En effet, pour choisir où placer les deux « d » dans une suite de quatre « g » et deux « d », il y a six façons de placer le premier, et il reste 5 places pour le second, ce qui fait 30 possibilités, mais elles sont interchangeables deux par deux. Il y a donc bien 15 parcours possibles.

2. Si on a x sauts d, il y a alors $n-x$ sauts g pour aller du point d'abscisse a au point d'abscisse b et on doit avoir $a+x-(n-x)=b$ soit $2x=n+b-a$.
a. Donc le triplet $(5,10,1)$ n'est pas admissible car, dans ce cas, $n+b-a$ est négatif.
b. Le triplet $(6,5,3)$ est obtenu avec 2 sauts d et 5 sauts g car l'équation a pour solution $x=2$.
c. Le triplet $(11,5,1)$ ne peut être obtenu car, dans ce cas, $n+b-a$ est impair.



3. À gauche, un exemple d'un tel parcours.

4. ***a.*** Il reste quatre sauts à faire pour aller du point d'abscisse 0 au point d'abscisse 2, ce qui nécessite trois sauts vers la droite et un saut vers la gauche parmi 4 sauts ou un saut vers la gauche. Il y a 4 façons de placer ce saut vers la gauche donc 4 parcours possibles.

b. Les sauts à gauche deviennent les sauts à droite et réciproquement. Il y a donc le même nombre de parcours qu'en ***a.***

5. On additionne terme à terme : le nombre de parcours permettant de joindre a à b en n sauts en passant par l'origine une première fois à l'issue du p-ième saut est égal au nombre de parcours permettant de joindre a à $-b$ en n sauts en passant par l'origine une première fois à l'issue du p-ième saut. À l'issue de ce cumul, « la première fois » devient « au moins une fois » grâce à l'élimination des doublons.