OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE VERSAILLES 2022

SUJET DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Exercices académiques

La deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.

Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques numéro 4 et numéro 5

Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques numéro 4 et numéro 6.

Exercice 4 (à traiter par tous les candidats)

Mollusques

Océane a réuni une grande collection de coquillages. Elle souhaite en faire cadeau à son petit frère Marin. Craignant que ce dernier ne parvienne pas à gérer d'un coup un tel effectif, Océane décide de procéder à une succession de dons partiels : quand l'effectif de la collection atteint M, elle donne m coquillages, m étant le plus grand entier dont le carré est inférieur ou égal à M et on recommence un peu plus tard avec le nouvel effectif $M - m$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'elle n'ait plus de coquillages.

Partie A Étude de cas

1. On suppose que la collection comporte 75 coquillages. Compléter le tableau suivant :

Effectif de la collection d'Océane	75	67	59				
Nombre de coquillages donnés	8	8	7				
Nombre de coquillages restants	67	59					

En déduire le nombre de dons nécessaires à la transmission des 75 coquillages.

2. On donne un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On suppose qu'à un certain moment de la distribution l'effectif de la collection est le carré n^2.

a. Combien de coquillages Océane donne-t-elle à son frère ? Combien en reste-t-il ?

b. Combien en donne-t-elle la fois suivante ? Combien en reste-t-il ?

3. On donne un entier n supérieur ou égal à 2 et on suppose que l'effectif initial de la collection est strictement supérieur à n^2. Lors des dons successifs, combien de fois, au maximum, le nombre de coquillages donnés peut-il être égal à n?

Partie B Livre de bord

Océane tient un compte précis de ses livraisons. Elle fait 27 dons, après lesquels l'effectif devient inférieur à 1 000. Après le 28ème don, l'effectif est un carré parfait. C'est la douzième fois qu'un tel événement se produit.

1. ***a.*** Quel est l'effectif après le 27ème don ? Après le 26ème ?

b. Quel était l'effectif initial ?

2. Si on suppose que les modalités des dons ne changent pas jusqu'au dernier coquillage, combien de dons faudra-t-il pour achever le transfert ?

Exercice 5 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Clair de nombres

On rappelle qu'un entier m est un *multiple* d'un entier a s'il existe un entier b tel que $m = a \times b$. On peut dire aussi que a *divise* m. Ces notions ne concernent que les nombres entiers.
Un ensemble E d'entiers strictement positifs est dit *clair* lorsqu'aucun de ses éléments n'en divise un autre ou une somme formée par certains de ses éléments.
Par exemple, l'ensemble $\{4, 5, 2\,022\}$ est clair, car 4 ne divise ni 5, ni 2022, ni $5 + 2\,022$, 5 ne divise ni 4, ni $2\,022$, ni $4 + 2\,022$, et enfin $2\,022$ ne divise ni 4, ni 5, ni 9. En revanche, l'ensemble $\{4, 5, 13, 2\,022\}$ n'est pas clair, puisque 4 divise $5 + 13 + 2\,022$.

1. *a.* Un ensemble à 2 éléments peut-il être clair ?
b. L'ensemble $\{3, 4, 10\}$ est-il clair ?
b. L'ensemble $\{2\,021, 2\,022, 2\,023, 2\,202\}$ est-il clair ?

2. Déterminer le plus petit entier naturel, supérieur à 6, tel que l'ensemble $\{4, 5, n\}$ soit clair.

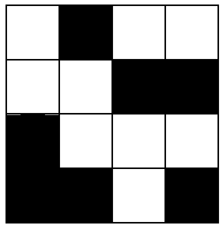
3. Soit E un ensemble d'entiers strictement positifs qui contient les nombres $3, 4$ et 10. Montrer que si E contient aussi un quatrième élément, alors E n'est pas clair.

4. *a.* On considère un ensemble $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ d'entiers naturels et un entier naturel λ strictement positif. Prouver que l'ensemble $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ est clair si et seulement si l'ensemble $\{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda\, a_3, \dots, \lambda\, a_n\}$ est clair.
b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $E_n = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ un ensemble clair. Montrer qu'il existe un ensemble clair possédant exactement $n + 1$ éléments.
c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on peut trouver un ensemble clair contenant exactement n éléments.

5. *a.* On donne n entiers $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ strictement positifs. Prouver qu'on peut choisir certains de ces entiers pour que leur somme soit un multiple de n.
b. Montrer qu'il n'existe aucun ensemble qui soit à la fois clair et infini.

Exercice 6 (à traiter par les candidats des séries technologiques)

Homogénéité



On considère des tableaux de 4 x 4 cases carrées dont certaines sont blanches et les autres noires. On attribue à toute paire de cases ayant un côté commun le coefficient 1 si elles sont toutes les deux noires ou toutes les deux blanches, le coefficient -1 si l'une est noire, l'autre blanche. L'*homogénéité* du tableau est la somme des 24 coefficients obtenus.

Par exemple, sur le tableau de droite, le total de la première ligne est : $-1-1+1=-1$
et le total de la première colonne est : $1-1+1=1$.

1. Montrer que le tableau de droite a une homogénéité égale à -4.

2. Quelle est la plus grande homogénéité possible ? La plus petite ?

3. Un tableau contient une seule case noire. Quelle peut être son homogénéité ?

4. Est-il possible qu'un tableau contenant exactement deux cases noires ait la même homogénéité qu'un tableau en contenant une seule ?

5. Quelle est la plus petite homogénéité positive (ou nulle) ?