www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

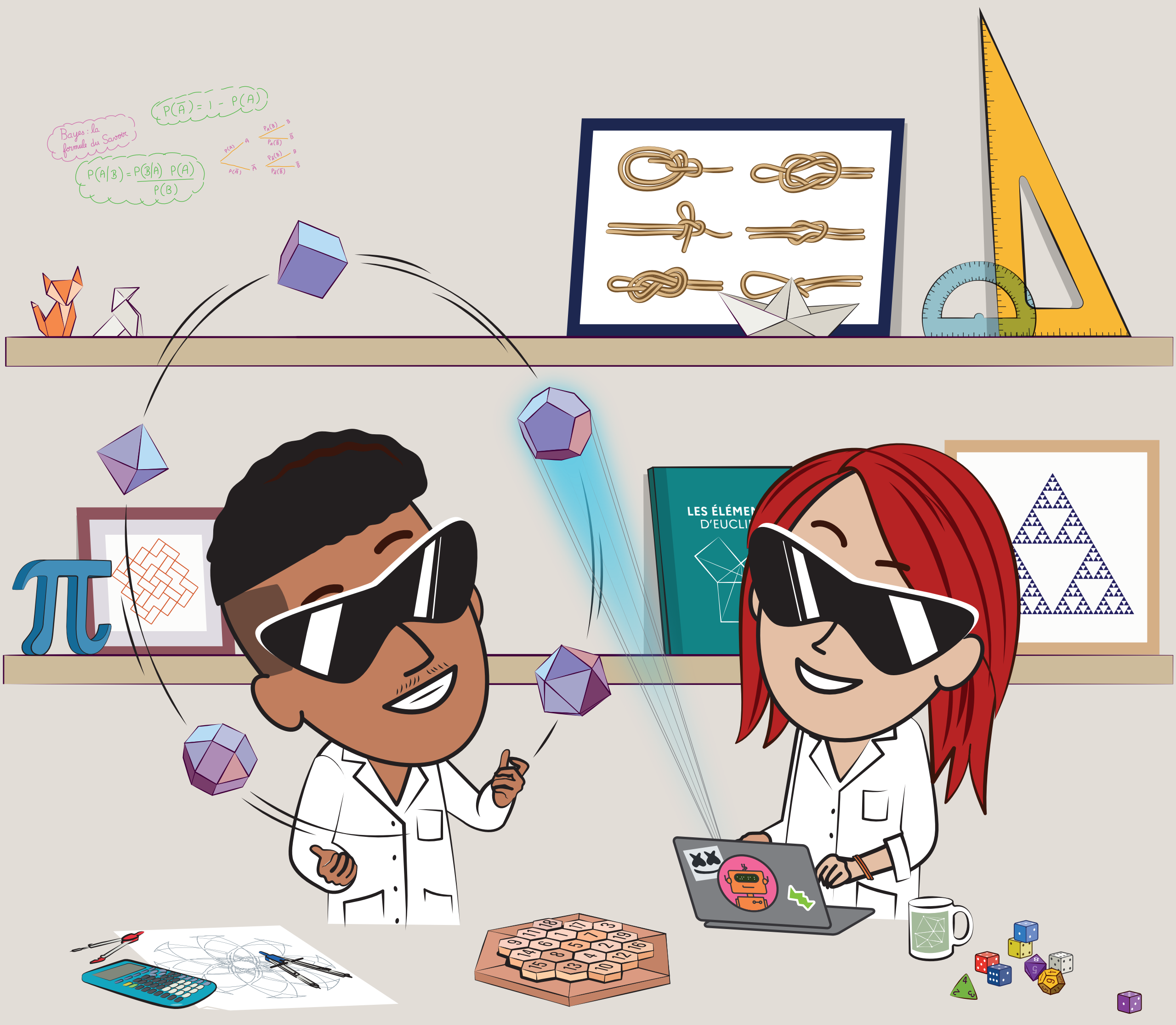
ACADÉMIE DE VERSAILLES 2023

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

Partie académique : éléments de solution

Exercice 4 - Entiers n-sommables

1. Cas $n = 4$

a. $4 = 1 + 2 - 3 + 4$

b. Le plus grand entier 4-sommable est obtenu en complétant avec des sommes : $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

c. Le plus petit est obtenu en complétant avec des soustractions : $1 - 2 - 3 - 4 = -8$.

d. On a déjà -8 et 10 qui sont 4-sommables. On complète avec les nombres obtenus avec 2 puis 1 soustractions

$-8 = 1 - 2 - 3 - 4$	$2 = 1 + 2 + 3 - 4$
$-4 = 1 + 2 - 3 - 4$	$4 = 1 + 2 - 3 + 4$
$-2 = 1 - 2 + 3 - 4$	$6 = 1 - 2 + 3 + 4$
$0 = 1 - 2 - 3 + 4$	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

On aurait pu également remarquer que puisqu'il existe seulement 8 décompositions différentes ($2 \times 2 \times 2$), qu'il n'y avait pas d'autres entiers 4-décomposables.
Finalement, l'ensemble des entiers 4-sommables est $\{-8, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 10\}$.

2. Pour tout réel a, $a - (a + 1) - (a + 2) + (a + 3) = 0$
On a donc $(1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \cdots + (97 - 98 - 99 + 100) = 0$ donc est 100-sommable.

3. a. Soit N et M deux entiers n-sommables alors $N + M = 2 + k_2 \times 2 + k_3 \times 3 + \cdots k_i \times i + \cdots + k_n \times n$ où k_i vaut 0 si N et M ont des signes différents devant i et vaut -2 ou 2 sinon.
Donc $N + M$ est une somme de nombres pairs donc est pair et par conséquent, N et M ont même parité.

b. Tout d'abord, on doit avoir $1 + 2 + \cdots + n \geq 2023$ soit $n^2 + n \geq 4046$. En résolvant l'inéquation du second degré ou avec un tableur on obtient $n \geq 64$.
Pour $n = 64$: $1 + 2 + \cdots + 64 = \frac{64 \times 65}{2} = 2080$ est pair donc, d'après le **a.**, tous les entiers 64-sommables sont pairs, 2023 n'est pas 64-sommable.
$Pour\ n = 65$: $1 + 2 + \cdots + 65 = \frac{65 \times 66}{2} = 2145$ et $2145 - 2023 = 122 = 2 \times 61$ donc :

$$2023 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 60 - 61 + 62 + 63 + 64 + 65$$

Le plus petit entier n tel que 2023 soit n-sommable est 65.

c. Si $S = 1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$ (où $a_i = \pm 1$) alors $2 - S = 1 - 2a_2 - 3a_3 - \cdots - na_n$ qui est donc bien n-sommable.

d. Tout d'abord, $M = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.
Soit N un autre entier n-sommable, $N = 1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$ où $a_i = \pm 1$
On a donc $M - N = 2(1 - a_{2)} + 3(1 - a_3) + \cdots + n(1 - a_n)$ avec $1 - a_i \geq 0$. Comme $M \neq N$, au moins un des $1 - a_i$ est non nul et $(1 - a_i)i \geq 4$ car $i \geq 2$. On en déduit $M - N \geq 4$ soit $N \leq M - 4$.
Si $m + 2$ était n-sommable, $2 - (m + 2) = M - 2$ le serait également d'après la question précédente (1.c).

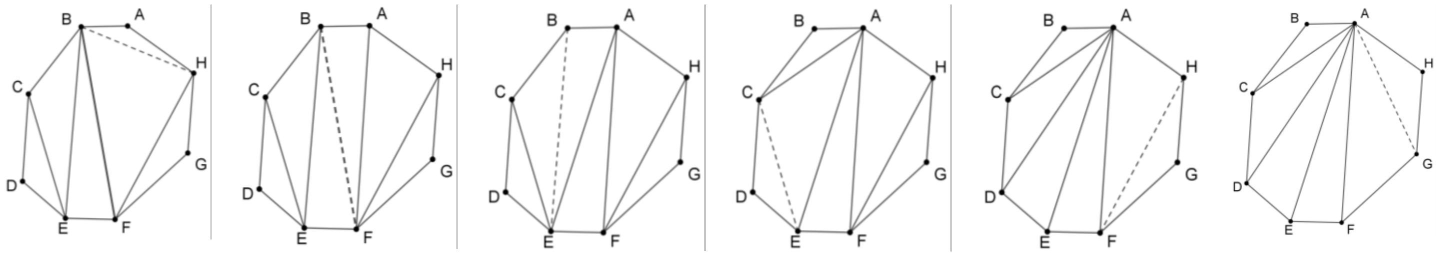
e. Tout d'abord, $1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$ donc tous les entiers 100-sommables sont pairs.
Soit N un entier 100-sommable strictement positif et X la somme des entiers *soustraits* dans la décomposition de N, alors $N = 5050 - 2 \times X$.
Ainsi, X vaut 0 ou la somme d'une partie des entiers compris entre 2 et 100 et $X \leq 2524$ puisque $N > 0$.
Prenons maintenant un nombre entier X compris entre 2 et 2524.
On a $100 + 99 + \cdots + 1 > 2524$ donc il existe un entier naturel non nul k tel que :

$$(k + 1) + (k + 2) + \cdots + 100 \leq X < k + (k + 1) + \cdots + 100$$

Alors $X = (k + 1) + \cdots + 100 + d$, soit $d = X - \big((k + 1) + \cdots + 100\big)$, et $0 \leq d < k$.
Donc X est somme d'une partie des entiers compris entre 2 et 100.
Il y a 2524 possibilités différentes pour X : tous les entiers compris entre 2 et 2524 auxquels on ajoute 0. Il y a donc 2524 entiers 100-sommables strictement positifs.
D'après la question **c.** et comme $N \geq 2$, il y a autant de négatifs 100-sommables, obtenus en faisant $2 - N$.
On a donc au total 5048 nombres 100-sommables : tous les nombres pairs compris entre -5048 et 5050 exceptés -5046 et 5048.

Exercice 5 -Triangulations et retournements

1. **a.** On peut utiliser la suite de retournements ci-dessous :



   b. Il suffit de remarquer que le processus est réversible.

2. **a.** Il y a n sommets, dont A et ses deux voisins. Une triangulation utilise donc $n-3$ diagonales et détermine alors $n-2$ triangles.
   La triangulation divise les angles intérieurs de $\mathcal{P}$ afin de former les angles intérieurs des $n-2$ triangles. La somme des mesures des angles intérieurs de $\mathcal{P}$ est ainsi égale à la somme des mesures des angles intérieurs de ces $n-2$ triangles, et elle vaut donc $(n-2)180°$.

   b. Toute triangulation divise les angles intérieurs de $\mathcal{P}$ afin de former les angles intérieurs des triangles. Appelons t le nombre de triangles d'une triangulation donnée. La somme des mesures des angles intérieurs de $\mathcal{P}$ est ainsi égale à la somme des mesures des angles intérieurs de ces t triangles, et on a donc :
   $(n-2)180° = t \times 180°$ soit $t = n-2$.
   Ainsi toute triangulation de $\mathcal{P}$ est formée de $n-2$ triangles.

3. **a.** On note B et C les sommets adjacents au sommet A.
   Si [BC] n'est pas une diagonale de $\mathcal{T}$, le triangle ABC n'est pas un des triangles définis par $\mathcal{T}$. Il existe alors une diagonale issue du sommet A, diagonale qu'on note [AX].
   Si [BC] est une diagonale de $\mathcal{T}$, [BC] est un côté d'un triangle BCX où $\mathrm{X} \neq \mathrm{A}$. On utilise alors le retournement qui échange les diagonales [BC] et [AX], ce qui ajoute une diagonale issue de A et on divise le polygone en deux sous-polygones via la diagonale [AX].
   Dans tous les cas, on peut donc considérer, en utilisant la diagonale [AX], un découpage de $\mathcal{P}$ en deux sous-polygones, eux-mêmes triangulés via les triangulations induites par celles de $\mathcal{P}$ (l'un ou l'autre de ces polygones pouvant être réduit à un triangle). Il suffit de recommencer sur chacun de ces sous-polygones. On ajoute ainsi, une par une, toutes les diagonales issues de A pour aboutir à la triangulation $\mathcal{T}_A$.

   b. On peut de même transformer $\mathcal{T}'$ en $\mathcal{T}_A$ et donc, puisque le processus est réversible, $\mathcal{T}_A$ en $\mathcal{T}'$. Quitte à transiter par $\mathcal{T}_A$, on peut donc toujours transformer $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ à l'aide d'un nombre fini de retournements.

4. Soit A et B deux sommets adjacents de $\mathcal{P}$. On considère la triangulation $\mathcal{T}_A$ dont les diagonales sont celles issues de A, et la triangulation $\mathcal{T}_B$ dont les diagonales sont celles issues de B. Puisque A et B sont adjacents, ces deux triangulations n'ont aucune diagonale commune. Si l'on veut transformer $\mathcal{T}_A$ en $\mathcal{T}_B$, il faut donc que chacune des $n-3$ diagonales de $\mathcal{T}_A$ soit impliquée dans un retournement. Ainsi, il faut au moins $n-3$ retournements pour transformer $\mathcal{T}_A$ en $\mathcal{T}_B$.

5. Soit $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux triangulations de $\mathcal{P}$. Soit A un sommet de $\mathcal{P}$ qui est l'extrémité d'au moins une diagonale utilisée dans $\mathcal{T}'$. Soit $\mathcal{T}_A$ la triangulation dont les diagonales sont celles issues de A.
   Pour transformer $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}_A$, il suffit à chaque retournement d'ajouter une diagonale issue de A, ce qui nécessite au plus $n-3$ retournements. On peut transformer $\mathcal{T}'$ en $\mathcal{T}_A$ selon le même principe, mais puisqu'au moins une diagonale est déjà en place, cela ne nécessite qu'au plus $n-4$ retournements.
   On peut donc, en inversant le processus, transformer $\mathcal{T}_A$ en $\mathcal{T}'$ en au plus $n-4$ retournements.
   Ainsi, on transforme $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ à l'aide d'au plus $2n-7$ retournements.

6. On suppose que $n \geq 13$ et on considère deux triangulations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{P}$.

   a. À elles deux, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ utilisent $2(n-3)$ diagonales, par forcément distinctes.
   Chaque diagonale a ses deux extrémités parmi les n sommets de $\mathcal{P}$, donc, à elles toutes, elles nécessitent $4(n-3)$ extrémités. En moyenne, un sommet de $\mathcal{P}$ est l'extrémité de $\frac{4n-12}{n} = 4 - \frac{12}{n}$ diagonales.
   Comme $n \geq 13$, $4 - \frac{12}{n} > 3$.
   Ainsi, il existe un sommet de $\mathcal{P}$ qui est l'extrémité d'au moins 4 des diagonales parmi celles utilisées par $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$.

b. Il suffit de reprendre le raisonnement du **5.** en choisissant pour sommet A l'un de ceux qui sont l'extrémité d'au moins 4 des diagonales concernées.
Cela permet d'économiser 3 retournements par rapport au **5.** Ainsi, on peut toujours transformer $\mathcal{T}$ en $\mathcal{T}'$ à l'aide d'au plus $2n-10$ retournements.

Remarque : en fait, la majoration $2n-10$ est optimale pour $n \geq 13$. Cependant, la preuve de cette optimalité est inaccessible dans le cadre de l'épreuve.

Exercice 6- Numerus clausus

1. Notons m_r la moyenne des étudiants recalés. On a 350 admis dont la moyenne est 80 et 250 recalés dont la moyenne est m_r.
La moyenne de l'ensemble des étudiants est 66, on a donc $350 \times 80 + 250 \times m_r = 600 \times 66$, on obtient $m_r = 46{,}4$

2.

a. Si l'on note N le nombre d'étudiants admis, il y a $600 - N$ recalés.
On a donc $N \times 71 + (600 - N) \times 56 = 600 \times 66$, soit $N = 400$.

b. La nouvelle moyenne de l'ensemble des étudiants est $\frac{400\times72+200\times58}{600} = \frac{40400}{600} \approx 67{,}33$.

c. La note minimale d'un étudiant est 3.

d. Les 400 admis le restant, on s'intéresse aux étudiants initialement recalés. Ils sont 200 et la moyenne de leurs notes est 58. On dispose de $200 \times 58 = 11\,600$ points à répartir entre ces étudiants.
Comme chaque étudiant a au minimum 3 points, on répartit d'abord $200 \times 3 = 600$ points.
Il reste donc $11\,600 - 600 = 11\,000$ à répartir entre un maximum d'étudiants de façon à compléter leur 3 points pour atteindre la barre des 65 points.
$\frac{11000}{62} \approx 177{,}4$ donc on peut avoir au maximum 177 étudiants qui passent de recalés à admis, soit au maximum un total de 577 étudiants admis.