www.freemaths.fr

# OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
# LYCÉE, PREMIÈRE

## ACADÉMIE DE TOULOUSE
## 2022

## SUJET DE L'ÉPREUVE

# 22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
*Liberté*
*Égalité*
*Fraternité*

# Olympiades nationales de mathématiques 2022

## *Deuxième partie*

## *Académie de Toulouse*

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune. Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.
La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.
Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.
Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

La deuxième partie de l'épreuve contient trois exercices.
Les candidats de voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices académiques 1 et 2.
Les autres candidats doivent traiter les exercices académiques 1 (parties 1, 2 et 3) et 3.

# Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

## *Retours de plage*

Trois amis, Julie, Dimitri et Laura sont en vacances dans la même maison, et vont à la plage chaque jour, mais n'ont que deux vélos pour trois.

La plage est située à 5 km de la maison.

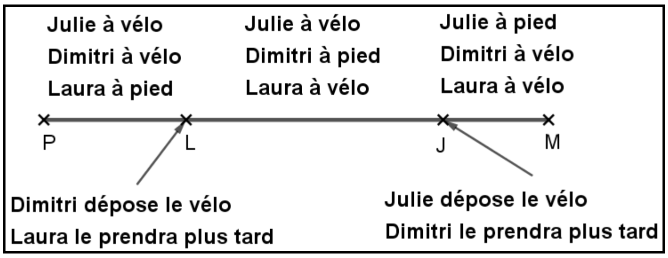
Dans toute la suite, les distances seront exprimées en km, les durée en heures et les vitesses en km/h.

### 1$^{ère}$ partie

Ils décident que Julie et Dimitri partiront en vélo et Laura à pied. En chemin Dimitri laissera son vélo et continuera à pied, Laura récupérera le vélo et finira en pédalant.

Plus loin, Julie laissera le vélo et finira à pied, Dimitri récupérera le vélo et finira en pédalant.

Ceci est résumé dans le schéma ci-contre :




On note :

- $d_1$ la distance parcourue à pied par Laura $d_1 = \text{PL}$ .
- $d_2$ la distance parcourue à vélo par Julie $d_2 = \text{PJ}$ .

On considère qu'ils se déplacent à pied tous à la vitesse de 5 km/h et en vélo tous à la vitesse de 20 km/h. Ils souhaitent arriver tous en même temps.

1. Montrer que ce n'est pas le cas quand $d_1 = 1{,}25$ et $d_2 = 3{,}75$ .

   Quel est alors l'ordre d'arrivée ?

   Combien de temps chacun a t-il mis ?
2. Quelles distances $d_1$ et $d_2$ leur permettraient d'arriver en même temps ?

   Combien de temps mettraient-ils alors ?

### 2$^{ème}$ partie

On considère que Dimitri et Julie se déplacent à pied à la vitesse de 5 km/h, mais que Laura préfère courir sur la partie qu'elle fait à pied, et elle le fait à la vitesse de 10 km/h. Ils pédalent tous à la vitesse de 20 km/h et déposent les vélos afin que tous les 3 arrivent en même temps.

1. a) Montrer que le temps $t_{\text{L}}$ mis par Laura pour rentrer est égal à $\dfrac{d_1}{10} + \dfrac{5 - d_1}{20}$ .

   b) Exprimer de façon analogue en fonction de $d_1$ et $d_2$ le temps mis par Dimitri

$\left(t_{\mathrm{D}}\right)$ et par Julie $\left(t_{\mathrm{J}}\right)$.

2. Quelles distances $d_1$ et $d_2$ leur permettent d'arriver en même temps ?

   Combien de temps mettent-ils alors pour rentrer ?

**3ème partie**

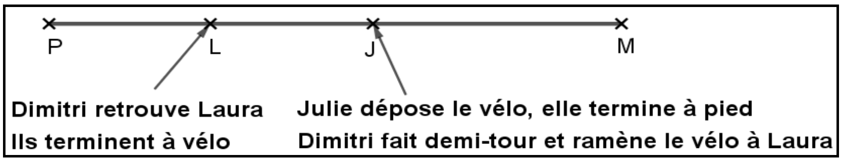
Les trois amis cherchent à améliorer encore les temps de trajet.

Dimitri propose de revenir en arrière et de porter un vélo (tout en roulant sur le sien).

Ainsi, Laura part à pied à 5 km/h pendant que Julie et Dimitri partent en vélo à 20 km/h jusqu'au point J.

Ensuite Julie termine son parcours à pied à la vitesse de 5 km/h.

Quant à Dimitri, il revient avec les deux vélos à la vitesse de 10 km/h jusqu'à rencontrer Laura. On notera L ce point de rencontre. Ils rentrent ensuite tous les deux à la maison en vélo à la vitesse de 20 km/h.




Leur objectif est toujours d'arriver tous les trois en même temps à la maison.

On note toujours $d_1 = \mathrm{PL}$ et $d_2 = \mathrm{PJ}$

1. Justifier sans calcul que $d_1 + d_2 = 5$.
2. Déterminer les valeurs de $d_1$ et de $d_2$.
3. Ce procédé améliore-t-il le temps de trajet ?

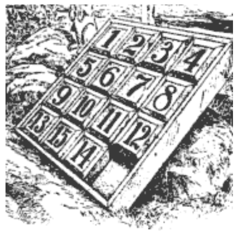
**4ème partie** (à traiter uniquement par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

- Un jour un ami les attend à la maison et voit Dimitri et Julie arriver ensemble 8 minutes après Laura.
- Julie et Dimitri affirment s'être déplacés selon le plan prévu à la partie 2.
- Laura, elle, explique qu'elle a été plus vite que prévu, pendant la course et aussi à vélo. Elle a pédalé 2 fois plus vite qu'elle a couru.

Combien de temps s'est écoulé entre l'instant où Laura a dépassé Dimitri et celui où elle a dépassé Julie ?

## Exercice 2
**(à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)**

### *Taquin*



*Le jeu de taquin a été inventé dans les années 1870 aux États-Unis.*
*Sam Loyd, auteur de mathématiques récréatives, proposa une prime de 1000$ pour qui réussirait à résoudre le problème illustré ci-contre.*
*Nous allons voir pourquoi cette prime n'a jamais été versée !*

On rappelle la formule valable pour tout entier naturel $n$ : $0+1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

**Partie 1 : Alphabet désordonné**

On considère une liste formée par les premières lettres de l'alphabet français, non répétées, mais pas nécessairement en ordre, par exemple (D,A,B,F,E,C). Le nombre de lettres est appelé longueur $\ell$ de la liste. Le désordre $d$ est le nombre de fois où deux des lettres n'apparaissent pas dans l'ordre alphabétique.

Par exemple $\ell(\mathrm{D},\mathrm{A},\mathrm{F},\mathrm{B},\mathrm{E},\mathrm{C})=6$ car il y a 6 lettres et $d(\mathrm{D},\mathrm{A},\mathrm{F},\mathrm{B},\mathrm{E},\mathrm{C})=7$ car on trouve 7 fois un couple en ordre inverse de l'ordre alphabétique : (D,A) , (D,B), (D,C), (F,B), (F,E), (F,C) et (E,C).

a. Donner la valeur de $d(\mathrm{A},\mathrm{E},\mathrm{D},\mathrm{B},\mathrm{C})$.

b. Qu'est-ce qu'une liste de longueur $n$ et de désordre $0$ ?

c. Quel est le désordre le plus grand qu'on puisse obtenir pour une liste de longueur $5$ ?

d. Même question pour une liste de longueur $n$ ?

**Partie 2 : Évolution du désordre par permutation de 2 lettres**

a. Calculer $d(\mathrm{E},\mathrm{A},\mathrm{D},\mathrm{B},\mathrm{C})$ et le comparer à $d(\mathrm{A},\mathrm{E},\mathrm{D},\mathrm{B},\mathrm{C})$.
Plus généralement, montrer que si on échange les deux premiers termes d'une liste, le désordre est augmenté ou diminué de 1.

b. Montrer que si on échange deux termes consécutifs d'une liste, le désordre est augmenté ou diminué de $1$.

c. Si on échange le premier et le troisième terme d'une liste, quelles sont les valeurs dont le désordre peut augmenter ou diminuer ?

d. Montrer qu'échanger deux termes d'une liste modifie le désordre en lui ajoutant ou enlevant un nombre impair.

**Partie 3 : Le taquin**

Dans le jeu de taquin, 8 tuiles sont posées dans un cadre possédant 3 lignes et 3 colonnes. Ces tuiles sont marquées avec les lettres de A à H. Une des 9 positions (marquée (I) sur le schéma) est vide, ce qui permet de faire glisser une tuile voisine sur l'emplacement vide.

Voici un exemple de position : ce sera notre ***position initiale***.

| | | |
|---|---|---|
| A | E | D |
| C | B | F |
| (I) | H | G |

A partir de cette position, on peut par exemple faire glisser la tuile C vers le bas. Elle occupe alors l'emplacement vide et son ancien emplacement devient vide. On obtient alors la position :

| | | |
|---|---|---|
| A | E | D |
| (I) | B | F |
| C | H | G |

L'objectif est de revenir, par une succession de mouvements de taquin, à la **position de référence** du jeu, que voici

| | | |
|---|---|---|
| A | B | C |
| D | E | F |
| G | H | (I) |

a. A partir de la ***position initiale***, on fait glisser successivement les tuiles C,B,E,D ; dessiner la configuration de taquin obtenue.

On parlera de désordre de la position du taquin : par exemple sur la position initiale c'est le désordre de la liste obtenue en lisant les lettres de gauche à droite puis de haut en bas (A,E,D,C,B,F,I,H,G).

Lors d'un mouvement de taquin, nous allons considérer comment évoluent

- le désordre $d$ de la liste associée ;
- le « numéro de colonne » $x$ numéroté de 1 à 3 (de gauche à droite) de l'emplacement vide ;
- le « numéro de colonne » $y$ numéroté de 1 à 3 (de haut en bas) de l'emplacement vide .

b. Dans le cas de la position initiale, indiquer ce que valent $x$ , $y$ , $d$ et $x+y+d$ .

c. Que deviennent ces différentes valeurs après avoir fait glisser C dans la position vide (comme dans l'illustration ci-dessus) ?

d. Quelle propriété remarquable peut-on conjecturer pour l'évolution de la valeur de $x+y+d$ lors d'un mouvement de taquin ?
Prouver cette conjecture

e. En déduire que le jeu de taquin, à partir de la position initiale donnée, ne peut jamais être résolu (c'est-à-dire qu'il est impossible de le ramener à la position de référence par une succession de mouvements de taquin).

f. Donner deux façons de placer les tuiles A,B,G (autres que la position initiale) dans les emplacements ci-contre marqués d'un #, pour lesquelles on peut affirmer que le jeu de taquin n'a pas de solution.

| | | |
|---|---|---|
| # | E | D |
| C | # | F |
| (I) | H | # |

*Nous venons de mettre à jour une condition nécessaire pour que le taquin puisse être résolu. On peut constater que les arguments employés pourraient se généraliser à une grille de taille plus grande que 3 par 3. Et il est possible de prouver que c'est aussi une condition suffisante (mais c'est plus difficile).*

# Exercice 3
**(candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)**

## *Rechercher – Remplacer*

Arthur a crée un programme qui permet de modifier les mots d'un texte. Le programme remplace des séquences de lettres par d'autres séquences de lettres de la façon suivante :

- On indique au programme une séquence de lettres, par exemple « nn » que l'on appellera *source* et une séquence de lettres par exemple « n », qu'on appellera *but*.
- Le programme lit le mot de gauche à droite, puis lorsqu'il trouve la *source*, il la remplace par le *but*, puis recommence avec le mot qu'il vient d'obtenir. Ainsi de suite jusqu'à ce que la séquence de lettre *source* n'apparaisse plus. On obtient alors le mot terminal.
- On appellera règle (nn;n), celle qui remplace la *source* «nn» par le *but* « n ».

Par exemples, avec la règle (nn;n)

- pa**nn**e → pane
  Le mot initial panne est transformé en une réécriture en mot terminal pane

- a**nn**annnas → anannnas
  ana**nn**nas → anannas
  ana**nn**as → ananas
  Le mot initial annannnas est transformé en 3 réécritures en mot terminal ananas.
  Le nombre de flèches correspond donc au nombre de réécritures.

1) On considère la règle (ro,xor).
   Quel mot final donne-t-elle lorsqu'on l'applique au mot ***roooo***? Indiquer toutes les réécritures.

2) Donner deux règles différentes permettant de passer de ***tiktik*** à ***toktok*** en une seule réécriture.

3) a) Donner une règle qui appliquée au mot ***loulou***, permet d'obtenir un mot terminal de 7 lettres.
   b) Donner une autre règle ayant une source de 2 lettres, et qui appliquée au mot ***loulou***, permet d'obtenir un mot terminal de 5 lettres.

4) Donner un exemple de règle qui appliquée au mot ***insta*** donne une infinité de réécritures, toutes différentes.

5) Soit $p$ un entier positif non nul. Indiquer une règle qui appliquée au mot initial ***tootooth***, permet d'obtenir un mot terminal de $p$ lettres.

6) Soit $q$ un entier positif non nul. Indiquer une règle et un mot initial de votre choix, qui donne le mot terminal en exactement $q$ réécritures.

7) On part du mot initial $yoyo$. Dans chaque cas, donner une règle qui donne un mot terminal .
   a) Premier cas, en une réécriture exactement.
   b) Deuxième cas, en deux réécritures exactement.
   c) Troisième cas, en trois réécritures exactement.

8) On considère la règle (ab,b).
   Déterminer tous les mots possibles qui conduisent au mot $bbaabb$ après une réécriture.

9) On note $M_k$ le mot obtenu après $k$ réécritures ( $M_0$ étant le mot initial ).
   Arthur a obtenu $M_3 = erterernetmeretertr$ et $M_5 = erterernermerererertr$
   a) Proposer une règle possible et un mot initial correspondant.
   b) Démontrer qu'il n'y a qu'une règle possible.