OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE TOULOUSE
2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

TOULOUSE 2022

Exercice 1 : Retours de plage

Partie 1

De façon générale, si une distance d exprimée en km est parcourue à une vitesse constante v, exprimée en km/h, le temps t mis pour parcourir cette distance, exprimé en heures, est donné par la formule : $t = \frac{d}{v}$.

Dans cette partie, les trois amis se déplaçant à pied à la vitesse de 5 km/h et se déplaçant à vélo à la vitesse de 20 km/h, le temps mis pour parcourir une certaine d est égal à $\frac{d}{5}$ si cette distance est parcourue à pied et à $\frac{d}{20}$ si cette distance est parcourue à vélo.

On peut partager le parcours $[PM]$ en trois tronçons : le tronçon $[PL]$ de longueur d_1, le tronçon $[LJ]$ de longueur $PJ - PL = d_2 - d_1$ et le tronçon $[JM]$ de longueur $PM - PJ = 5 - d_2$

Détaillons dans un tableau le déroulement du parcours pour chacun des trois amis. En dernière colonne, nous faisons la somme des temps de parcours sur les trois tronçons :

		tronçon $[PL]$	tronçon $[LJ]$	tronçon $[JM]$	Parcours total
Laura	Se déplace …	À pied	À vélo		$t_L = \frac{5+3d_1}{20}$
	Temps de parcours	$\frac{d_1}{5}$	$\frac{5-d_1}{20}$		
Dimitri	Se déplace …	À vélo	À pied	À vélo	$t_D = \frac{3d_2 - 3d_1 + 5}{20}$
	Temps de parcours	$\frac{d_1}{20}$	$\frac{d_2 - d_1}{5}$	$\frac{5-d_2}{20}$	
Julie	Se déplace …	À vélo		À pied	$t_J = \frac{20 - 3d_2}{20}$
	Temps de parcours	$\frac{d_2}{20}$		$\frac{5-d_2}{5}$	

1. Lorsque $d_1 = 1{,}25$ et $d_2 = 3{,}75$, les longueurs des segments [*PL*] et [*JM*] représentent le quart de la longueur totale du trajet et celle du segment [*LJ*] en représente la moitié. Le parcours à pied de Dimitri est deux fois plus long que celui de chacune de ses amies. Il mettra nécessairement plus de temps que chacune de ses amies pour effectuer la totalité du parcours.

Laura et Julie arrivent ensemble puisqu'elles parcourent les mêmes distances à pied et à vélo, et Dimitri arrive ensuite car il parcourt davantage de distance à pied et moins de distance à vélo.

Le calcul effectif montre que, avec $d_1 = 1{,}25$ et $d_2 = 3{,}75$:

$t_D = \dfrac{3d_2 - 3d_1 + 5}{20} = 0{,}625$ et $t_J = \dfrac{20 - 3d_2}{20} = \dfrac{5 + 3d_1}{20} = t_L = 0{,}4375$.

- **Dimitri met 0,625 heure pour effectuer le parcours, c'est-à-dire 37 minutes et 30 secondes.**
- **Laura et Julie mettent 0,4375 heure pour effectuer le parcours, c'est-à-dire 26 minutes et 15 secondes.**

2. Les trois amis arrivent en même temps si $t_L = t_D = t_J$. Pour cela, il faut que chacun parcoure exactement la même distance à pied et exactement la même distance à vélo, ce qui est le cas si chacun effectue le tiers de la distance à pied et les deux autres tiers à vélo. Vérifions (facultativement) par le calcul :

Egalité des temps de parcours de Laura et de Julie : $\dfrac{5 + 3d_1}{20} = \dfrac{20 - 3d_2}{20}$ soit : $3d_1 + 3d_2 = 15$.

La condition $t_L = t_J$ est équivalente à : $d_1 + d_2 = 5$

Egalité des temps de parcours de Dimitri et Laura : $\dfrac{3d_2 - 3d_1 + 5}{20} = \dfrac{5 + 3d_1}{20}$ soit: $3d_2 - 6d_1 = 0$.

La condition $t_L = t_D$ est équivalente à : $d_2 = 2d_1$

La condition $t_L = t_D = t_J$ équivaut à : $\begin{cases} d_1 + d_2 = 5 \\ d_2 = 2d_1 \end{cases}$ soit à : $d_1 = \dfrac{5}{3}$; $d_2 = \dfrac{10}{3}$, ce qui confirme notre argumentation.

Chacun des trois amis effectue le tiers du parcours (1,333 km) à pied et les deux tiers (2,667 km) à vélo.

En outre, pour ces valeurs de d_1 et de d_2 : $t_D = t_J = t_L = \dfrac{5 + 3 \times \frac{5}{3}}{20} = \dfrac{1}{2}$.

Le temps de parcours total est, pour chacun des amis, égal à une demi-heure, soit 30 minutes.

NB. L'égalité des temps de parcours de Dimitri et Julie, $\dfrac{3d_2 - 3d_1 + 5}{20} = \dfrac{20 - 3d_2}{20}$ aurait donné : $2d_2 - d_1 = 5$. Cette équation aurait pu remplacer l'une ou l'autre des équations que nous avons utilisées.

Partie 2

1.a. Reprenons le tableau de la partie précédente. Dans ce tableau, il y a deux données à modifier sur la ligne « Laura » : son temps de parcours à pied est $\frac{d_1}{10}$ et non plus $\frac{d_1}{5}$. Son temps de parcours à vélo restant égal à $\frac{5-d_1}{20}$, son temps de parcours total devient :

$$t_L = \frac{d_1}{10} + \frac{5-d_1}{20} = \frac{5+d_1}{20}.$$

1.b. Les expressions $t_D = \frac{3d_2 - 3d_1 + 5}{20}$ et $t_J = \frac{20 - 3d_2}{20}$ que nous avons déjà évoquées et utilisées ne sont pas affectées.

2. Utilisons la même démarche qu'à la **question 2** de la première parie :

Egalité des temps de parcours de Laura et de Julie: $\frac{5+d_1}{20} = \frac{20-3d_2}{20}$ soit : $d_1 + 3d_2 = 15$.

Egalité des temps de parcours de Dimitri et Laura : $\frac{3d_2 - 3d_1 + 5}{20} = \frac{5+d_1}{20}$ soit : $3d_2 - 4d_1 = 0$.

La condition $t_L = t_D = t_J$ est vérifiée si et seulement si : $\begin{cases} d_1 + 3d_2 = 15 \\ 3d_2 = 4d_1 \end{cases}$.

Ce système a pour solution : $d_1 = 3$; $d_2 = 4$.

Pour ces valeurs de d_1 et de d_2 : $t_D = t_J = t_L = \frac{5+d_1}{20} = \frac{5+3}{20} = \frac{2}{5}$.

Le temps de parcours de chacun est maintenant égal à $\frac{2}{5}$ d'heure soit 24 minutes.

Laura parcourt 3 km à pied en 18 minutes puis 2 km à vélo en 6 minutes.

Julie et Dimitri parcourent chacun 1 km à pied en 12 minutes et 4 km à vélo en 12 minutes.

Partie 3

1. Laura et Julie parcourent à pied respectivement la distance PL et la distance JM. Or, les conditions de parcours de Laura et Julie sont identiques à l'ordre près. Elles doivent donc parcourir chacune la même distance à pied et la même distance à vélo, quel que soit le comportement de Dimitri. Donc, $PL = JM$, c'est-à-dire: $d_1 = 5 - d_2$ ou, ce qui revient au même : $d_1 + d_2 = 5$.

2. Les expressions des temps de parcours de Julie et de Laura ne sont pas modifiées.
Seul change par rapport à la partie précédente le calcul du temps de parcours de Dimitri :

- Il parcourt la distance $d_2 = PJ$ à 20 km/h ; le temps de parcours correspondant est $\dfrac{d_2}{20}$
- Il parcourt la distance $d_2 - d_1 = JL$ à 10 km/h ; le temps de parcours correspondant est $\dfrac{d_2 - d_1}{10}$
- Il parcourt la distance $5 - d_1 = LM$ à 20 km/h ; le temps de parcours correspondant est $\dfrac{5 - d_1}{20}$

Son temps de parcours total est égal à : $\dfrac{d_2}{20} + \dfrac{d_2 - d_1}{10} + \dfrac{5 - d_1}{20} = \dfrac{3d_2 - 3d_1 + 5}{20}$. Il s'agit, au bout du compte, du même temps de parcours que dans la première partie.

Les équations de la première partie ne sont pas modifiées. On obtient toujours : $d_1 = \dfrac{5}{3}$; $d_2 = \dfrac{10}{3}$ **, et un temps de parcours égal à 30 minutes.**

Ce procédé n'améliore pas le temps de trajet (et en plus, c'est dangereux …).

Partie 4

Convertissons d'abord en fraction d'heure la donnée « 8 minutes » : une durée de 8 minutes représente $\dfrac{8}{60}$ d'heure, soit $\dfrac{2}{15}$ d'heure.

D'après les résultats de la partie 2, les longueurs des segments $[PL]$ et $[PJ]$ sont $d_1 = 3$, $d_2 = 4$. Respectant les hypothèses de la partie 2, Julie et Dimitri, effectuent le parcours en 24 minutes ($\dfrac{2}{5}$ d'heure) et par conséquent Laura effectue le parcours en 16 minutes ($\dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{15} = \dfrac{4}{15}$ d'heure).

Notre démarche sera la suivante : nous allons déterminer quelles sont les fonctions f_J, f_D, f_L qui décrivent la distance parcourue depuis la plage par chacun des trois amis en fonction du temps t écoulé. Puis nous allons chercher pour quelle valeur de t est-ce que $f_L(t) = f_D(t)$ ou bien $f_L(t) = f_J(t)$

Nous proposons une approche graphique puis une approche numérique, le lecteur fera son choix.

Puisque $d_1 = 3$, Julie et Dimitri atteignent ensemble le point L à l'instant $\frac{3}{20}$.

Puisque $d_2 = 4$, Julie atteint le point J à l'instant $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ et Dimitri atteint ce même point à l'instant $\frac{3}{20} + \frac{1}{5} = \frac{7}{20}$ (il a parcouru 3 km à vélo et 1 km à pied).

Il est dès lors possible de déterminer, en fonction de tout instant t appartenant à l'intervalle $\left[0 \; ; \; \frac{2}{5}\right]$, la position (par rapport à la plage) de Julie et de Dimitri sur le trajet :

- La position de Julie : $f_J(t) = \begin{cases} 20t \quad si \quad 0 \le t \le \frac{1}{5} \\ 4 + 5\left(t - \frac{1}{5}\right) = 3 + 5t \quad si \quad \frac{1}{5} \le t \le \frac{2}{5} \end{cases}$

- La position de Dimitri : $f_D(t) = \begin{cases} 20t \quad si \quad 0 \le t \le \frac{3}{20} \\ 3 + 5\left(t - \frac{3}{20}\right) = \frac{9}{4} + 5t \quad si \quad \frac{3}{20} \le t \le \frac{7}{20} \\ 4 + 20\left(t - \frac{7}{20}\right) = 20t - 3 \quad si \quad \frac{7}{20} \le t \le \frac{2}{5} \end{cases}$

Il reste à déterminer comment évolue Laura. Elle parcourt 3 km à une certaine vitesse v puis 2 km à la vitesse $2v$, le tout en $\frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$ d'heure.

Sa vitesse v de course à pied vérifie l'équation : $\frac{3}{v} + \frac{2}{2v} = \frac{4}{15}$ soit : $\frac{4}{v} = \frac{4}{15}$. On en déduit que : $v = 15$

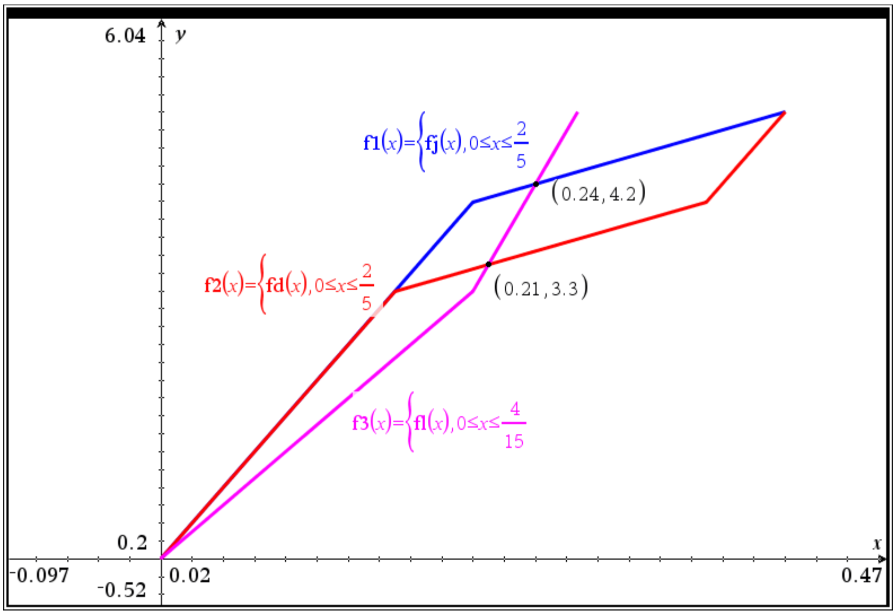
Laura court à 15 km/h et roule à 30 km/h. Elle atteint le point L à l'instant $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

NB. On peut remarquer en passant que Laura est une sportive accomplie : parcourir en courant 3 km en 12 minutes, ce n'est pas donné à tout le monde.

Position de Laura par rapport à la plage P : $f_L(t) = \begin{cases} 15t \quad si \quad 0 \le t \le \frac{1}{5} \\ 3 + 30\left(t - \frac{1}{5}\right) = 30t - 3 \quad si \quad \frac{1}{5} \le t \le \frac{4}{15} \end{cases}$

Laura va doubler ses deux amis après l'instant $\frac{1}{5}$ et avant l'instant $\frac{4}{15}$ (donc entre les instants 0,20 et 0,27, pendant la phase de course à pied de Dimitri et de Julie)

Une représentation graphique des trois fonctions, en bleu pour Julie, en rouge pour Dimitri, en magenta pour Laura.
Le graphique montre bien que Laura dépasse ses amis pendant la phase où elle roule à vélo et où ses amis sont à pied. Les abscisses des points d'intersection représentent les instants de dépassement.



L'écart entre les deux instants des dépassements se déduit du graphique : $0,24-0,21=0,03$

Résolvons numériquement cette question :

L'instant t_1 où Laura dépasse Dimitri appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{5}\,;\,\frac{4}{15}\right]$. Il est donc est solution de l'équation :

$30t-3=\frac{9}{4}+5t$, c'est-à-dire de l'équation : $25t=\frac{21}{4}$. On en déduit que : $t_1=0{,}21$.

L'instant t_2 où Laura dépasse Julie appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{5}\,;\,\frac{4}{15}\right]$. Il est donc solution de l'équation :

$30t-3=3+5t$, c'est-à-dire de l'équation : $25t=6$. On en déduit que : $t_2=0{,}24$.

Les deux lectures graphiques sont confirmées.

Le laps de temps écoulé entre les deux dépassements est : $t_2-t_1=0{,}24-0{,}21=0{,}03$ heure.

Il s'écoule 0,03 heure, c'est-à-dire 1 minute et 48 secondes, entre l'instant où Laura dépasse Dimitri et l'instant où Laura dépasse Julie.

Exercice 2 : Taquin

Partie 1 : Alphabet désordonné

a. $d(A, E, D, B, C) = 5$ car les couples en ordre inverse sont (E, D) ; (E, B) ; (E, C) ; (D, B) ; (D, C)**.**

b. Une liste de longueur n et de désordre 0 est une liste ordonnée selon l'ordre alphabétique.

c. Soit $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ une liste de longueur 5. Cherchons de combien de façon un élément de la liste peut être en désordre avec un élément situé après lui.

- Le premier terme X_1 de la liste est désordonné, au plus, avec ses 4 suivants.
- Le deuxième terme X_2 de la liste est désordonné, au plus, avec ses 3 suivants.
- Le troisième terme X_3 de la liste est désordonné, au plus, avec ses 2 suivants.
- Le quatrième terme X_4 de la liste est désordonné, au plus, avec son suivant.

Le désordre d'une liste de 5 lettres est au plus égal $4 + 3 + 2 + 1 = 10$

Cette valeur est effectivement atteinte par la liste (E, D, C, B, A).

Le désordre maximal d'une liste de longueur 5 est égal à 10.

d. Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ une liste de longueur n.

On cherche de même, pour chaque élément, quels sont ceux des éléments suivants avec lesquels il peut être en désordre.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n - 1$, le terme X_k a pour suivants dans la liste les $(n - k)$ termes de l'ensemble $\{X_{k+1},\ X_{k+2}, ...,\ X_n\}$. Le terme X_k peut être en désordre au plus avec les $(n - k)$ termes qui le suivent. Il en résulte que la valeur du désordre est au plus égale au nombre : $(n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 = \dfrac{(n-1) \times n}{2}$.

Cette valeur est effectivement atteinte si l'on considère une liste où les lettres sont classées dans l'ordre inverse de l'ordre alphabétique.

Par exemple la liste de 4 termes $(D,\ C,\ B, A)$ a pour désordre 6, la valeur de $\dfrac{3 \times 4}{2}$.

La liste la plus désordonnée serait la liste $(Z,\ Y, ...,\ B,\ A)$, liste inversée des 26 lettres de l'alphabet et dont le désordre est égal à $\dfrac{25 \times 26}{2} = 325$.

Partie 2 : Evolution du désordre par permutation de deux lettres

Début du a. $d(E,A,D,B,C)=6=d(A,E,D,B,C)+1$ car le couple $(E,\ A)$ vient s'ajouter aux couples désordonnées déjà repérés.

Fin du a et b. Soit une liste de désordre d et X_k et X_{k+1} deux termes consécutifs (que ce soit les deux premiers de la liste comme dans la **question a** ou non, peu importe). Etudions l'effet de l'échange $(X_k,\ X_{k+1}) \mapsto (X_{k+1},\ X_k)$ sur le désordre.

La position relative de ces termes par rapport aux autres termes ne change pas, donc le désordre n'est modifié que par la position de ces deux éléments l'un par rapport à l'autre :

Ou bien le couple $(X_k,\ X_{k+1})$ est ordonné alphabétiquement. Alors le couple échangé $(X_{k+1},\ X_k)$ ne l'est pas, et se classe parmi les couples en ordre inverse, le désordre augmente d'une unité.

Ou bien le couple $(X_k,\ X_{k+1})$ n'est pas ordonné alphabétiquement et figure parmi les couples en ordre inverse. Alors le couple échangé $(X_{k+1},\ X_k)$ est dans le bon ordre, le désordre diminue d'une unité.

Si on échange deux termes consécutifs d'une liste, le désordre est augmenté ou diminué d'une unité.

Nous noterons désormais dans toute la correction c_k l'échange des termes consécutifs de rangs k et $k+1$ de la liste.

c. Soit une liste de longueur n et de désordre d. Soit X_1, X_2 et X_3 ses trois premiers termes.

Notons s_3 la permutation qui échange le premier terme de la liste avec le terme de rang 3 :

$(X_1,\ X_2,\ X_3,...) \xrightarrow{s_3} (X_3,\ X_2,\ X_1,\ ...)$

Etudions l'effet induit par s_3 sur le désordre.

Pour cela, étudions la composition d'échanges de termes consécutifs dans l'ordre ci-dessous :

$(X_1,\ X_2,\ X_3,...) \xrightarrow{c_1} (X_2,\ X_1,\ X_3,\ ...) \xrightarrow{c_2} (X_2,\ X_3,\ X_1,\ ...) \xrightarrow{c_1} (X_3,\ X_2,\ X_1,\ ...)$

Cette composition échange le premier terme de la liste avec le terme de rang 3, il s'agit bien de s_3.

La permutation s_3 est le produit de trois échanges de termes consécutifs : $s_3 = c_2 \circ c_1 \circ c_2$.

Chacun de ces trois échanges augmente ou diminue le désordre d'une unité. En appliquant successivement ces trois échanges, la variation du désordre peut être l'un ou l'autre des nombres :

$+1+1+1$; $+1+1-1$; $+1-1+1$; $-1+1+1$; $+1-1-1$; $-1+1-1$; $-1-1+1$; $-1-1-1$.

Cette variation peut être une variation de 1 ou de 3 unités en plus ou en moins.

Par la permutation s_3, le désordre peut être augmenté ou diminué de une ou de trois unités.

d. Soit une liste $(X_1, X_2,.., X_\ell)$ conforme aux hypothèses du problème, de longueur ℓ (telle que $1 \leq \ell \leq 26$ puisque la liste est composée de lettres distinctes de l'alphabet français).

De façon générale, pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq \ell$, notons s_k l'échange du premier terme X_1 de la liste avec le terme X_k placé au rang k.
Rappelons aussi que c_k désigne l'échange des termes consécutifs de la liste situés aux rangs k et $k+1$.
Nous savons déjà que :

- $s_2 = c_1$ modifie l'ordre en lui ajoutant ou retranchant une unité.
- $s_3 = c_2 \circ c_1 \circ c_2$ modifie l'ordre en lui ajoutant ou retranchant une ou trois unités.

Dans les deux cas, l'ordre est modifié en ajoutant ou retranchant un nombre impair d'unités.

Comparons maintenant, pour k tel que $2 \leq k \leq \ell - 1$, les effets sur le désordre des deux permutations s_k et s_{k-1} en généralisant le raisonnement de la question c. Pour cela, nous allons étudier la composition : $c_k \circ s_k \circ c_k$ en examinant les images des termes X_1, X_k, X_{k+1} de la liste (les autres termes ne sont pas concernés).

- c_k place X_k au rang $k+1$ et X_{k+1} au rang k.
- Ensuite, s_k place X_1 au rang k et le terme placé au rang k (donc X_{k+1}) au premier rang.
- Puis c_k place le terme de rang k (donc X_1) au rang $k+1$ et le terme de rang $k+1$ (donc X_k) au rang k.

Cette composition est celle qui échange le premier terme avec celui de rang $k+1$, il s'agit de s_{k+1}.
Nous obtenons la relation : $s_{k+1} = c_k \circ s_k \circ c_k$
Comme nous l'avons vu, un échange de deux termes consécutifs modifie le désordre en lui ajoutant ou en lui retranchant 1. L'échange c_k figurant deux fois dans la relation, la modification induite par cet échange présent deux fois est soit un ajout de deux unités, soit un retrait de deux unités, soit le maintien du statuquo, en toute circonstance un nombre pair d'unités. Il en résulte que :

La modification induite par s_{k+1} a la même parité que celle induite par s_k

Or, la modification induite par la permutation initiale, $s_2 = c_1$ est impaire. En itérant ce processus depuis le rang 2 jusqu'au rang $\ell - 1$ (au plus 24 itérations sont nécessaires pour parcourir toutes les permutations possibles), on obtient que :

Toutes les permutations du premier terme avec un autre terme de la suite ajoute ou retranche au désordre un nombre impair d'unités.

Considérons maintenant, pour i et j distincts et distincts de 1 la composition : $s_j \circ s_i \circ s_j$ et étudions les images par cette composition des termes de rang 1, i et j (les autres termes ne sont pas concernés) :

$$\begin{cases} X_1 \xrightarrow{s_j} X_j \xrightarrow{s_i} X_j \xrightarrow{s_j} X_1 \\ X_i \xrightarrow{s_j} X_i \xrightarrow{s_i} X_1 \xrightarrow{s_j} X_j \\ X_j \xrightarrow{s_j} X_1 \xrightarrow{s_i} X_i \xrightarrow{s_j} X_i \end{cases}$$

: cette permutation est celle qui échange les termes de rangs i et j.

Elle est composée de trois permutations qui ajoutent ou retranchent au désordre chacune un nombre impair. Or, une combinaison (sommes ou différences) de trois nombres impairs est un nombre impair.

Quels que soient i et j, les modifications induites par la permutation qui échange les termes de rangs i et j sont toujours un ajout ou un retrait d'un nombre impair.

Echanger deux termes d'une liste, quel que soit leurs rangs, modifie le désordre en lui ajoutant ou enlevant un nombre impair.

Partie 3 : Le taquin

a. Compte tenu des déplacements décrits, la position finale obtenue est celle ci :

A	**D**	**«I»**
B	**E**	**F**
C	**H**	**G**

b. La position initiale étant (A, E, D, C, B, F, I, H, G), les couples en désordre sont les 9 couples :
(E, D), (E, C), (E, B) ; (D, C), (D, B) ; (C, B) ; (I, H), (I, G) ; (H, G).
Le désordre de cette liste est : $d = 9$. La case vide a pour coordonnées : $x = 1$; $y = 3$. Ainsi :

Pour la position initiale donnée : $d + x + y = 13$, c'est un nombre impair.

c. Après avoir fait glisser C comme indiqué, le liste devient : (A, E, D, I, B, F, C, H, G). Les éléments C et I ont été échangés.
Les couples en désordre sont maintenant les 12 couples :
(E, D), (E, B), (E, C) ; (D, B), (D, C) ; (I, B), (I, F), (I, C), (I, H), (I, G) ; (F, C) ; (H, G).
La case vide a pour coordonnées : $x = 1$; $y = 2$. Ainsi maintenant :

$d + x + y = 15$ **. La valeur de cette somme a augmenté de deux unités.**

d. On peut conjecturer que la valeur de $d+x+y$ varie d'un nombre pair d'unités.

L'action consistant à faire glisser une tuile « X » sur la case vide revient à effectuer une permutation échangeant les lettres « X » et « I ».

- Si «X» et «I» sont sur une même ligne, la permutation concerne alors deux éléments consécutifs de la liste de lettres (les lettres de rangs 1 et 2, ou 2 et 3, ou 4 et 5, ou 5 et 6, ou 7 et 8, ou 8 et 9)
- Si «X» et «I» sont sur une même colonne, la permutation concerne deux éléments de la liste distants de trois rangs (les lettres de rangs 1 et 4, ou 2 et 5, ou 3 et 6, ou 4 et 7, ou 5 et 8, ou 6 et 9)

Quel que soit le mouvement considéré, le désordre *d* varie d'un nombre impair d'unités.

D'autre part, ou bien le numéro de ligne de la case vide ne change pas et le numéro de colonne varie d'une unité ou bien le numéro de colonne de la case vide ne change pas et le numéro de ligne varie d'une unité.

Quel que soit le mouvement considéré, le nombre $x+y$ varie exactement d'une unité.

Quelque soit le mouvement considéré, la variation induite sur la valeur de $d+x+y$ est un nombre impair augmenté ou diminué d'une unité : c'est un nombre pair.

On en déduit que la parité du nombre $d+x+y$ est un invariant du jeu de taquin. Si dans la position initiale $d+x+y$ est un nombre pair (respectivement impair), le nombre $d+x+y$ restera pair (respectivement impair) quels que soient les mouvements successifs opérés.

e. Dans le cas de la position de référence, le désordre est nul et les coordonnées de la case vide sont : $x=3$; $y=3$. L'expression $d+x+y$ est égale à 6, un nombre pair.

En conséquence, à partir de la position initiale précédente, le jeu de taquin ne peut être résolu car l'expression $d+x+y$ reste un nombre impair ; quels que soient les déplacements envisagés, la valeur 6 ne peut jamais être obtenue.

f. Si nous échangeons deux des trois lettres *A*, *B* ou *G*, le désordre varie d'un nombre impair d'unités tandis que *x* et *y* ne varient pas. La valeur $d+x+y$ devient paire et on ne peut rien affirmer.

En revanche, si nous permutons circulairement les trois lettres, cette permutation circulaire équivaut à deux échanges exactement. Par exemple, la permutation $A \mapsto B \mapsto G \mapsto A$ équivaut à échanger *G* et *B* puis *A* et *G* et la permutation $A \mapsto G \mapsto B \mapsto A$ équivaut à échanger *A* et *B* puis *A* et *G*. Dans ce cas, *d* garde sa parité (*d* reste impair), l'expression $d+x+y$ reste un nombre impair et nous pouvons affirmer que le taquin est non résoluble. C'est pourquoi nous proposons les deux agencements ci-dessous :

B	**E**	**D**
C	**G**	**F**
«I»	**H**	**A**

G	**E**	**D**
C	**A**	**F**
«I»	**H**	**B**