www.freemaths.fr

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE TOULOUSE
2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

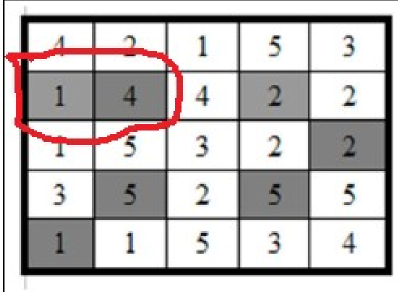
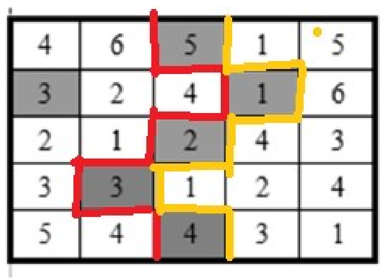
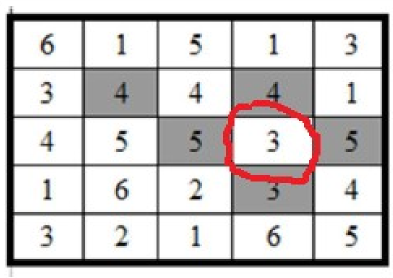
CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

TOULOUSE 2021

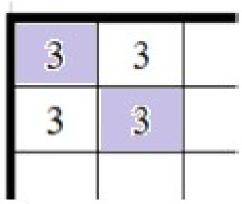
Exercice 1 : Des grilles et des nombres

1. Remarquons d'abord que la règle R2 pourrait se formuler ainsi : « Si une case est grise, alors toutes ses cases adjacentes sont blanches » et qu'une *conséquence* de la règle R3 est la suivante : « Si une case est blanche, alors au moins une de ses cases adjacentes est blanche elle aussi ». La formulation qui en découle : « toutes les cases blanches ont au moins une case adjacente blanche » n'est cependant pas équivalente à la règle 3 comme va nous le montrer la « grille B » ci-dessous.

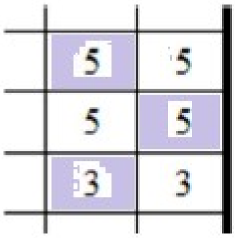
Grille A	Grille B	Grille C
		

Grille A	**Grille B**	**Grille C**
Deux cases grisées sont adjacentes : la règle R2 n'est pas respectée.	Les cases grisées séparent l'ensemble des cases blanches en deux sous-ensembles disjoints qui ne peuvent pas être connectés, on ne peut pas relier entre elles toutes les cases blanches : la règle R3 n'est pas respectée.	La case blanche entourée n'a aucune case adjacente blanche : la règle R3 n'est pas respectée

2. Cas du schéma de gauche : Lorsque quatre cases d'un même carré 2x2 contiennent le même nombre, en vertu des règles R1 et R2, nécessairement une diagonale est grisée et l'autre est blanche. Or, la case (1 ; 1), qui est une case de coin, ne peut pas être blanche (elle serait isolée des autres par des cases grisées, ce qui est exclu par la règle R3). Elle est donc blanche, ce qui détermine l'état des trois autres cases.



Cas du schéma de droite : En vertu des règles R1 et R2, nous pourrions avoir deux possibilités, celle décrite ci-contre, et celle où les couleurs gris et blanc sont échangées. Mais dans le cas des couleurs échangées, la case contenant le « 5 » le plus bas et le plus à droite serait blanche et isolée des autres : la règle 3 ne serait pas respectée. La seule solution est donc celle décrite ci-contre.



3. Pour illustrer plus lisiblement notre démarche, supposons que la grille initiale soit de couleur (verte par exemple). Nous allons au fur et à mesure « griser » ou « blanchir » les cases de la grille, jusqu'à ce que plus aucune case ne soit « verte ».

3.a. Sur la ligne 4, les cases adjacentes (4 ; 5) et (4 ; 6) ne peuvent être toutes deux grises (règle R2) ni toutes deux blanches car elles contiennent le même nombre (règle R1). L'une est grise et l'autre blanche. La case (4 ; 3) ne peut pas être blanche puisqu'il y a déjà une case blanche contenant le nombre 3 sur la ligne 4 : il faut griser la case (4 ; 3).

2	**5**	**5**	**1**	**3**	**4**
3	**4**	**2**	**4**	**2**	**5**
4	**1**	**3**	**2**	**5**	**3**
1	**4**	**3**	**5**	**3**	**3**
5	**4**	**4**	**3**	**1**	**2**

3.b. Les cases (3 ; 3), (4 ; 2), (4 ; 4) et (5 ; 3) sont toutes adjacentes à la case (4 ; 3) qui est grisée. D'après la règle R1, elles sont blanches.

2	**5**	**5**	**1**	**3**	**4**
3	**4**	**2**	**4**	**2**	**5**
4	**1**	**3**	**2**	**5**	**3**
1	**4**	**3**	**5**	**3**	**3**
5	**4**	**4**	**3**	**1**	**2**

3.c. La case (5 ; 2) contient le même nombre et se trouve sur la même ligne que la case blanche (5 ; 3) : d'après la règle R1, la case (5 ; 2) est grisée.
La case (3 ; 6) contient le même nombre et se trouve sur la même ligne que la case blanche (3 ; 3) : d'après la règle R1, la case (3 ; 6) est grisée.

2	**5**	**5**	**1**	**3**	**4**
3	**4**	**2**	**4**	**2**	**5**
4	**1**	**3**	**2**	**5**	**3**
1	**4**	**3**	**5**	**3**	**3**
5	**4**	**4**	**3**	**1**	**2**

D’après la règle 2, les cases adjacentes à une case grisée sont blanches. Nous pouvons « blanchir » ces cases. Il y a ainsi quatre cases à blanchir :
les cases (2 ; 6), (3 ; 5), (6 ; 4) et (1 ; 5).

2	5	5	1	3	4
3	4	2	4	2	5
4	1	3	2	5	3
1	4	3	5	3	3
5	4	4	3	1	2

3.d. Si la case (2 ; 3) était grisée, ses cases adjacentes seraient blanches, il en serait ainsi en particulier de la case (2 ; 2) qui contient le nombre 4. Mais dans la colonne 2, il y a déjà une case blanche qui contient ce nombre. D’après la règle R1, c’est impossible. Nécessairement, la case (2 ; 3) doit être blanche.

2	5	5	1	3	4
3	4	2	4	2	5
4	1	3	2	5	3
1	4	3	5	3	3
5	4	4	3	1	2

3.e. Si la case (4 ; 1) était grisée, la case (5 ; 1) serait une case blanche isolée des autres ; de même, si la case (5 ; 4) était grisée, la case (5 ; 3) serait une case blanche isolée des autres. Les cases (4 : 1) et (5 ; 4) doivent donc être blanches

2	5	5	1	3	4
3	4	2	4	2	5
4	1	3	2	5	3
1	4	3	5	3	3
5	4	4	3	1	2

4. Continuons le raisonnement ...
La case (2 ; 2) contient le même nombre et est dans la même colonne que la case blanche (4 ; 2), nous l’avons déjà remarqué : elle est grise et ses voisines sont blanches.

2	5	5	1	3	4
3	4	2	4	2	5
4	1	3	2	5	3
1	4	3	5	3	3
5	4	4	3	1	2

Les cases (1 ; 3), (2 ; 5) et (4 ; 5) doivent être grisées en vertu de la règle R1 et leurs cases adjacentes doivent être blanches.

2	5	5	1	3	4
3	4	2	4	2	5
4	1	3	2	5	3
1	4	3	5	3	3
5	4	4	3	1	2

Il reste à appliquer la règle 3 et à assurer une connexion entre les cases blanches. Pour cela, il faut « blanchir » toutes les cases restantes. Il n'y a qu'une solution. L'annexe à rendre avec la copie doit ressembler à la grille ci-contre.

2	**5**	**5**	**1**	**3**	**4**
3	**4**	**2**	**4**	**2**	**5**
4	**1**	**3**	**2**	**5**	**3**
1	**4**	**3**	**5**	**3**	**3**
5	**4**	**4**	**3**	**1**	**2**

5. Même convention que dans la résolution de la question 3.

Etape 1 :

Remarquons en bas à droite un tableau carré de quatre cases contenant le nombre 1 et appliquons à une symétrie près le résultat de la **question 2** : les cases (7 ; 7) et (8 ; 8) sont grises et les cases (7 ; 8) et (8 ; 7) sont blanches. Les cases (8 ; 6) et (6 ; 8) adjacentes sont elles aussi blanches.

1	3	6	2	2	2	4	7
3	5	1	3	4	6	2	8
7	4	8	2	8	1	3	4
6	4	7	1	3	3	8	7
3	4	5	6	4	4	5	2
8	1	3	5	6	7	2	5
4	6	2	7	6	5	1	1
5	1	7	4	8	2	1	1

Etape 2 :

Une ligne ou une colonne ne peut avoir qu'une case blanche contenant un nombre donné : les cases (6 ; 1), (4 ; 6) et (8 ; 2) sont grises. Leurs adjacentes sont blanches.

1	3	6	2	2	2	4	7
3	5	1	3	4	6	2	8
7	4	8	2	8	1	3	4
6	4	7	1	3	3	8	7
3	4	5	6	4	4	5	2
8	1	3	5	6	7	2	5
4	6	2	7	6	5	1	1
5	1	7	4	8	2	1	1

Etape 3 :

Pour des raisons analogues, les cases (4 ; 1), (4 ; 3) et (7 ; 5) sont grises, leurs adjacentes sont blanches.

1	3	6	2	2	2	4	7
3	5	1	3	4	6	2	8
7	4	8	2	8	1	3	4
6	4	7	1	3	3	8	7
3	4	5	6	4	4	5	2
8	1	3	5	6	7	2	5
4	6	2	7	6	5	1	1
5	1	7	4	8	2	1	1

Etape 4 :

Les cases (2 ; 1), (3 ; 2), (3 ; 5), (5 ; 2) et (5 ; 7) sont grises, leurs adjacentes sont blanches.

Pour éviter l'isolement des cases (1 ; 1) et (8 ; 1), les cases (1 ; 2) et (7 ; 1) qui leur sont adjacentes sont blanches.

1	3	6	2	2	2	4	7
3	5	1	3	4	6	2	8
7	4	8	2	8	1	3	4
6	4	7	1	3	3	8	7
3	4	5	6	4	4	5	2
8	1	3	5	6	7	2	5
4	6	2	7	6	5	1	1
5	1	7	4	8	2	1	1

Etape 5 :

Les cases (5 ; 5), (4 ; 6) et (2 ; 7) sont grises, leurs adjacentes sont blanches.

Pour éviter l'isolement de la case (1 ; 7), la case adjacente (1 ; 8) est blanche.

En conséquence, la case (4 ; 8) est grise et ses adjacentes sont blanches.

1	3	6	2	2	2	4	7
3	5	1	3	4	6	2	8
7	4	8	2	8	1	3	4
6	4	7	1	3	3	8	7
3	4	5	6	4	4	5	2
8	1	3	5	6	7	2	5
4	6	2	7	6	5	1	1
5	1	7	4	8	2	1	1

Nous sommes maintenant en mesure de proposer une réponse à la question 5 :

Etape 6 :

Il reste six cases dont il faut encore déterminer la couleur. Si nous blanchissons ces six cases, nous obtenons effectivement une solution.

1	3	6	2	2	2	4	7
3	5	1	3	4	6	2	8
7	4	8	2	8	1	3	4
6	4	7	1	3	3	8	7
3	4	5	6	4	4	5	2
8	1	3	5	6	7	2	5
4	6	2	7	6	5	1	1
5	1	7	4	8	2	1	1

Si l'on grisait l'une de ces six cases, on provoquerait l'isolement d'une ou plusieurs cases blanches et la règle R3 ne serait pas respectée.

Il semble bien qu'il n'y a pas d'autre solution.

Exercice 2 : La tournée du facteur

NB. L'hypothèse « le joueur voit apparaître au fur et à mesure à l'écran ... » s'interprète ainsi : les numéros des maisons apparaissent à l'écran une fois et une seule (autrement dit la liste d'affichage est une permutation de l'ensemble des numéros des maisons).

Première partie

1. La liste T qui correspond à la liste $A=(3\ 4\ 1\ 2\ 5)$ est la liste : $T=(2\ 2\ 1\ 1\ 2)$. En effet, le facteur distribue les lettres 3 et 4 lors d'un premier tour, puis les lettres 1, 2 et 5 lors de son deuxième tour.

2. Si la liste A est la liste $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, le facteur distribue toutes les lettres lors du premier tour et finit sa tournée en un seul tour.

Si la liste A est la liste $(5\ 4\ 3\ 2\ 1)$, le facteur ne peut distribuer qu'une seule lettre par tour, il lui faut cinq tours pour effectuer sa tournée.

3. Si par exemple la liste A est la liste $(5\ 4\ 3\ 1\ 2)$, il faut trois tours au facteur pour distribuer les lettres 5, 4 et 3 puis il distribue les lettres 1 et 2 au cours de son quatrième et dernier tour : $N=4$.

Plus généralement, il faut quatre tours lorsque, dans la liste A, deux numéros consécutifs et deux seulement sont rangés selon leur ordre naturel.

4. D'après la liste T qui est donnée, le facteur distribue les lettres 1 et 3 au cours du premier tour, les lettres 2 et 5 au cours du deuxième tour et la lettre 4 au cours du troisième tour. Une liste A qui correspond à cette liste de distribution est la liste : $A=(1\ 3\ 2\ 5\ 4)$

5. D'après les hypothèses de l'énoncé, le facteur distribue *au moins une* lettre au cours de chaque tour. La liste $(3\ 1\ 1\ 1\ 3)$ n'est pas une liste de distribution car cette liste voudrait dire qu'aucune lettre ne serait distribuée au cours du deuxième tour, ce qui est contraire à l'hypothèse.

La liste $(1\ 1\ 1\ 2\ 2)$ indiquerait que les lettres 1, 2 et 3 sont distribuées au cours du premier tour. Mais dans ce cas, le numéro suivant qui apparaît à l'écran doit être forcément 4 ou 5 : le facteur peut distribuer au moins une lettre de plus au cours du même tour. La liste $(1\ 1\ 1\ 2\ 2)$ n'est donc pas une liste de distribution.

Deuxième partie

1. Si la liste A est la liste $(4\ 3\ 1\ 5\ 2)$, le facteur distribue la lettre 4 au premier tour, la lettre 3 au deuxième tour, les lettres 1 et 5 au troisième tour et enfin la lettre 2 au quatrième tour. La liste de distribution correspondante est la liste $T=(3\ 4\ 2\ 1\ 3)$ et $N=4$.

La liste « inversée » est la liste : $\overline{A}=(2\ 5\ 1\ 3\ 4)$, le facteur distribue les lettres 2 et 5 au premier tour, puis les lettres 1, 3 et 4 au deuxième tour. La liste de distribution correspondante est la liste $\overline{T}=(2\ 1\ 2\ 2\ 1)$ et $\overline{N}=2$

2. Soit une liste d'affichage $A=(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5)$ où $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5)$ est une permutation de l'ensemble $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

Pour tout entier j tel que $1\leq j\leq 4$ et vérifiant $a_{j+1}<a_j$, c'est à dire pour lesquels l'ordre naturel n'est pas respecté, il faut un tour de plus pour distribuer la lettre dont le numéro est sorti en position $j+1$.

Si nous désignons par k_A le nombre d'entiers j vérifiant $1\leq j\leq 4$ et pour lesquels on a l'inégalité $a_{j+1}<a_j$, le nombre de tours de la tournée est : $N=1+k_A$.

Considérons la liste « inversée »: $\overline{A}=(\overline{a}_1\ \overline{a}_2\ \overline{a}_3\ \overline{a}_4\ \overline{a}_5)=(a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1)$. L'ordre naturel de deux éléments consécutifs $\overline{a}_j$ et $\overline{a}_{j+1}$ de cette liste n'est pas respecté si et seulement si l'ordre naturel de a_{5-j} et a_{4-j} dans la liste symétrique A est respecté : il y a autant d'indices j provoquant un tour de plus par la liste « inversée » que d'indices n'en provoquant pas par la liste A.

C'est-à-dire que $k_{\overline{A}}=4-k_A$ et que le nombre de tours de la tournée inversée est $\overline{N}=1+k_{\overline{A}}=1+(4-k_A)$

Nous obtenons : $N+\overline{N}=(1+k_A)+(1+k_{\overline{A}})=(1+k_A)+(5-k_A)=6$

Quelle que soit la liste d'affichage : $N+\overline{N}=6$

3. Si on cumule les temps de tournée du facteur A et du facteur « inversé » $\overline{A}$, on obtient une durée constante : $(5+7{,}5N)+(5+7{,}5\overline{N})=10+7{,}5\times(N+\overline{N})=10+7{,}5\times 6=55$.

Or ces temps de tournée suivent la même loi de probabilité (de ce point de vue, peu importe que le facteur fasse sa tournée dans un sens ou dans l'autre).

C'est donc que la durée moyenne d'une tournée est $\dfrac{55}{2}=27{,}5$ secondes.

Troisième partie

1. Comme nous l'avons dit en remarque préliminaire, une liste d'affichage est une permutation de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ des numéros des maisons. Or il y a $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ (factorielle de 5) permutations d'un ensemble de cinq éléments. Ce qui justifie qu'il y a au total 120 listes différentes.

2. D'après le résultat admis en première partie question 2, il y a une seule liste pour laquelle $N = 5$ et une seule pour laquelle $N = 1$.
S'il y a 26 listes pour lesquelles $N = 2$ (d'après le résultat admis dans cette question, nous le vérifierons un peu plus loin), il y en a autant pour lesquelles $N = 4$ (ce sont les listes « inversées » de celles pour lesquelles $N = 2$)
Ce qui fait un total de $1 + 1 + 26 + 26 = 54$ listes répertoriées jusqu'à présent.

Il reste $120 - 54 = 66$ listes pour lesquelles $N = 3$.

3. Le joueur met 5 secondes pour déposer les cinq lettres. En 25 secondes restantes, le joueur peut effectuer au plus trois tours (par hypothèse, il faut au plus 24 secondes pour effectuer trois tours et au moins 28 secondes pour quatre tours). Le joueur met moins de 30 secondes pour effectuer la tournée si et seulement si $N \leq 3$. D'après la question précédente, parmi les 120 listes possibles il y a $1 + 26 + 66 = 93$ listes qui réalisent l'évènement $N \leq 3$.
En situation d'équiprobabilité, la probabilité que le joueur gagne la partie est donc égale à : $\frac{93}{120} = \frac{31}{40} = 0,775$.
Exprimée en pourcentage, cette probabilité est égale à 77,5 %.

NB. Nous serions maintenant en mesure de calculer directement l'espérance de la durée d'une tournée :

Valeur de N	1	2	3	4	5
Probabilité	$\frac{1}{120}$	$\frac{26}{120}$	$\frac{66}{120}$	$\frac{26}{120}$	$\frac{1}{120}$
Durée $D = 5 + 7,5N$	12,5	20	27,5	35	42,5

$E(D) = \frac{1}{120} \times 12,5 + \frac{26}{120} \times 20 + \frac{66}{120} \times 27,5 + \frac{26}{120} \times 35 + \frac{1}{120} \times 42,5 = 27,5$, *c'est bien le résultat obtenu dans la deuxième partie question 3.*

Quatrième partie

Nous avons déjà noté dans la deuxième partie que le facteur procède ainsi : lorsqu' il a distribué une lettre, ou bien le numéro suivant est plus grand que celui de cette lettre et il la distribue au cours du même tour, ou bien le numéro suivant est plus petit et le facteur doit faire un tour de plus.

1. Généralisons les notations de la deuxième partie en notant $A=(a_1\ a_2\ ...\ a_n)$ une liste d'affichage où $(a_1\ a_2\ ...\ a_n)$ est une permutation de l'ensemble $\{1, 2,..., n\}$. Le facteur ne fait qu'un seul tour si $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

Or il n'y a qu'une façon de ranger les nombres de $\{1, 2,..., n\}$ par ordre croissant : $u(n)=1$

2. Soit n un entier au moins égal à 2. Considérons le rang dans la liste d'affichage de la lettre numéro n.

- Ou bien un seul tour suffirait pour distribuer les $(n-1)$ premières lettres (les $(n-1)$ premiers numéros sont rangés par ordre croissant) et un deuxième tour est nécessaire pour distribuer la lettre numéro n si ce numéro n'est pas sorti en dernière position (il peut donc apparaître dans l'affichage en position quelconque allant de 1 à $n-1$, il y a $(n-1)$ possibilités).
- Ou bien il faut déjà deux tours pour distribuer les $(n-1)$ premières lettres. La lettre numéro n peut être distribuée sans changer le nombre de tours soit dernière du premier tour, soit dernière du deuxième tour, il y a deux positions dans l'affichage possibles. .

On en déduit la relation prévue par l'énoncé : $d(n)=(n-1)\times u(n-1)+2d(n-1)$

Autrement dit, compte tenu des propriétés de la suite u : $d(n)=2d(n-1)+n-1$

3. Ci-contre deux algorithmes rédigés en langage TI-NSpire.

Le premier affiche les premières valeurs du nombre $d(n)$, il a été exécuté pour obtenir les valeurs de $d(2)$ à $d(12)$. Nous retrouvons au passage le fait que $d(5)=26$ et les résultats affichés nous permettraient de conclure.

Le deuxième algorithme **valeurmin** est celui qui répond à la question posée en déterminant de façon certaine, à l'aide d'une boucle « While », le premier entier n_0 pour lequel le nombre $d(n)$ dépasse un entier x donné.

```
deuxtours(12)
[2 3 4  5  6  7   8   9   10   11   12  ]
[1 4 11 26 57 120 247 502 1013 2036 4083]
                                 Terminé
valeurmin(2021)
                               {3,4}
                               {4,11}
                               {5,26}
                               {6,57}
                               {7,120}
                               {8,247}
                               {9,502}
                               {10,1013}
                               {11,2036}
                                 Terminé
```

```
deuxtours
Define deuxtours(n)=
Prgm
newMat(2,n−1)→d
For k,1,n−1
  k+1→d[1,k]
EndFor
1→d[2,1]
For k,2,n−1
  k+2· d[2,k−1]→d[2,k]
EndFor
Disp d
EndPrgm
```

```
valeurmin
Define valeurmin(x)=
Prgm
2→n
1→d
While d<x
  n+2· d→d
  n+1→n
  Disp {n,d}
EndWhile
EndPrgm
```

Pour dépasser 2021, il faut un quartier de 11 maisons, la valeur correspondante $d(11)$ étant 2036.

4. Soit n un entier au moins égal à 2. Considérons le rang dans la liste d'affichage de la lettre numéro n.

- Ou bien deux tours suffiraient pour distribuer les $(n-1)$ premières lettres et un troisième tour est nécessaire pour distribuer la lettre numéro n à condition que son rang de sortie ne soit ni le dernier sorti ni le dernier du premier tour (il y a $(n-2)$ possibilités).
- Ou bien il faut déjà trois tours pour distribuer les $(n-1)$ premières lettres. La lettre numéro n peut être distribuée sans changer le nombre de tours soit dernière du premier tour, soit dernière du deuxième tour, soit dernière du troisième tour, il y a trois positions possibles dans l'affichage.   .

On en déduit la relation de récurrence : $t(n)=(n-2)\times d(n-1)+3t(n-1)$

Ce qui suit n'est pas demandé par l'énoncé du sujet original. Nous le proposons pour information.

Le programme ci-contre affiche, pour les valeurs allant de 2 à un entier donné n, le nombre de listes pour lesquelles le facteur fera deux tours, puis, ce qui est nouveau, le nombre de listes pour lesquelles le facteur fera trois tours pour les valeurs allant de 3 à n.

troistours(8)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 11 & 26 & 57 & 120 & 247 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 11 & 66 & 302 & 1191 & 4293 \end{bmatrix}$$

Terminé

troistours 9/11

```
Define troistours(n)=
Prgm
deuxtours(n)
seq(d[2,k],k,2,n−1)→dd
newMat(2,n−2)→t
For k,1,n−2
  k+2→t[1,k]
EndFor
1→t[2,1]
For k,2,n−2
k·dd[k−1]+3·t[2,k−1]→t[2,k]
EndFor
Disp t
EndPrgm
```

On retrouve en particulier que pour un quartier de 5 maisons, il y a 66 listes pour lesquelles le facteur fera trois tours.

En guise de conclusion, voici un tableau récapitulatif des premières valeurs des suites d et t, le lecteur pourra éventuellement s'y référer :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d(n)$	1	4	11	26	57	120	247	502	1013
$t(n)$	_	1	11	66	302	1191	4293	14608	47840