OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE STRASBOURG
2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Olympiades de mathématiques 2021

Mardi 23 mars 2021

Deuxième partie de 15 heures 10 à 17 heures 10

SUJET POUR LES CANDIDATS SUIVANT LA SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES EN CLASSE DE PREMIÈRE GÉNÉRALE

Ce sujet comporte deux exercices

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Exercice 1 : à traiter par les élèves ayant choisi la spécialité mathématique en classe de première générale.

SEIZE NOMBRES

On inscrit dans l'ordre ou le désordre chaque entier de 1 à 16 dans l'une des cases du tableau ci-dessous:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

Chacun des entiers compris entre 1 et 16 figure dans le tableau ci-dessous Pour chaque groupe de trois cases consécutives de ce tableau, on calcule la somme des trois nombres contenus dans les trois cases.

1. Combien de sommes calcule-t-on ainsi ?

2. Proposer un exemple de tableau où les sommes calculées sont toutes différentes.

3. Proposer un exemple de tableau où certaines des sommes calculées sont égales.

4. Démontrer qu'il n'est pas possible que toutes les sommes calculées soient strictement inférieures à 24.

5. Est-il possible que toutes ces sommes calculées soient inférieures ou égales à 24 ?

6. Dans cette question, on suppose que toutes les sommes calculées sont inférieures ou égales à 25.
   Démontrer que chacun des nombres $a_1, a_4, a_7,\ a_{10}$, a_{13} et a_{16} est supérieur ou égal à 11.

Exercice 2 : à traiter par les élèves ayant choisi la spécialité mathématique en classe de première générale.

HISTOIRE DE FÈVES

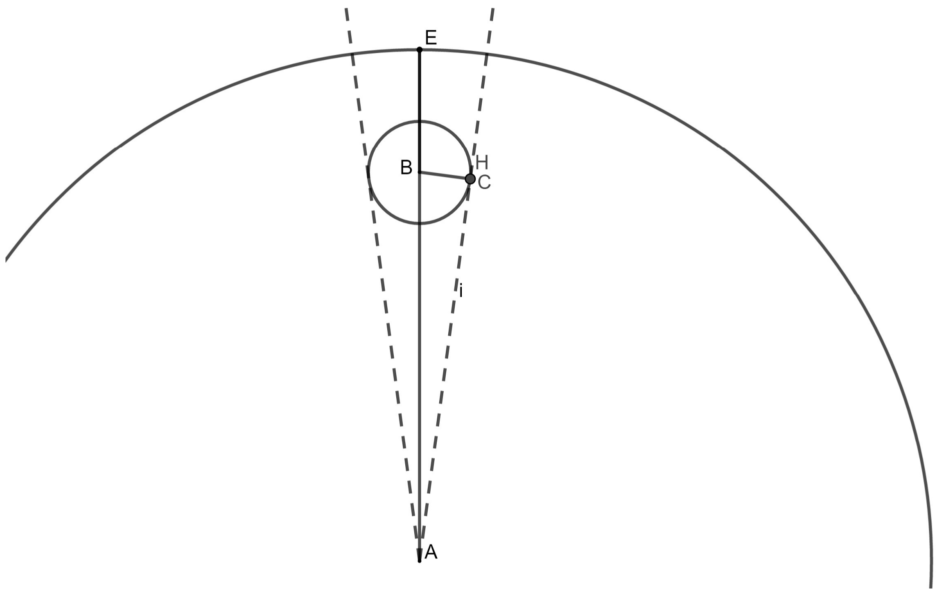
Partie A

Une galette des rois contient une fève ronde de diamètre 2,5cm. Le pâtissier qui a préparé une galette de 25cm de diamètre a placé la fève à une distance de 3cm du bord, autrement dit, la distance entre le point le plus proche du centre de la fève et du bord de la galette mesure 3cm.

Sur la figure ci dessous, le cercle de centre B et de diametre 2,5cm représente la fève, E est le point du bord de la galette situé à 3cm de la fève et le point A est le centre du cercle de diametre 25cm qui représente la galette.

EB=3cm et on admet que les points A, B et E sont alignés.

On aimerait estimer la probabilité de tomber directement sur la fève en coupant la galette en 8 parts identiques (les parts sont des secteurs angulaires).



1. Calculer la longueur AB.
2. Soit C le point de contact de l'une des tangentes au cercle « fève » passant par A. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. En déduire une mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$ à 0,1 près.
4. Quelle est la probabilité à 10^{-2} près de tomber sur la fève, lorsqu'on coupe le gâteau ?
5. Le pâtissier se rend compte que la probabilité de tomber sur la fève est trop importante. Que peut-il faire pour que cette probabilité ne soit que de 0,25 environ ?

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Partie B

Dans une nouvelle galette toujours de diamètre 25cm, le pâtissier dépose une fève carrée de côté 2,5 cm et telle que le centre B de la fève soit à une distance de 8,25cm du centre A de la galette.

La galette est représentée par un cercle de centre A et la fève par un carré CDEF ; le point I est le milieu du segment $[ED]$

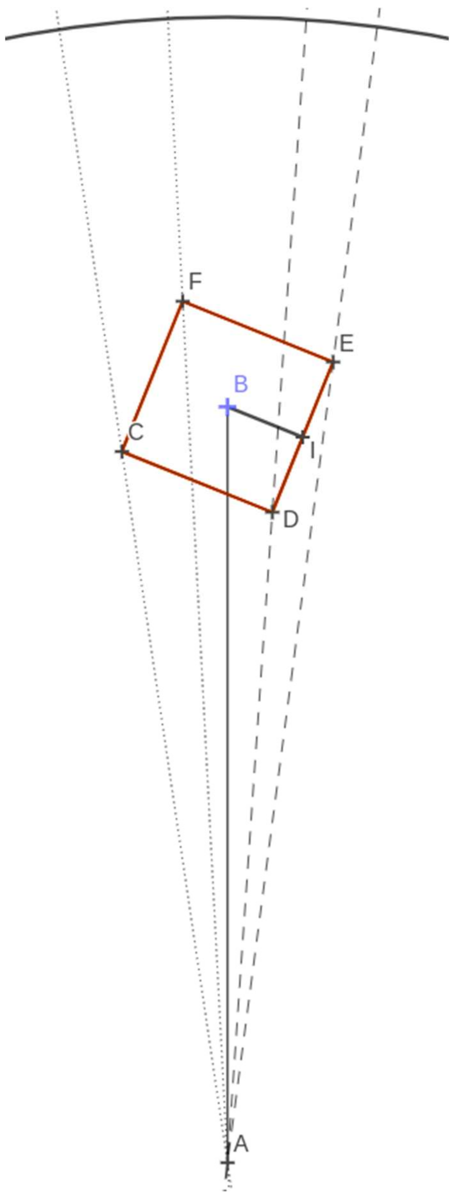
1. Quel doit être l'angle $\widehat{ABI}$, pour que les droites (AD) et (AE) soient confondues ?

2. On considère dans la suite de l'exercice que les droites (AD) et (AE) sont confondues.

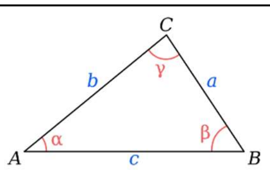
   2a. Déterminer l'angle $\widehat{CBI}$.

   2b. À l'aide de la formule des sinus en donner une valeur approchée à 0,1 près de l'angle $\widehat{BAC}$.

   2c. En déduire la probabilité à 10^{-2} près de tomber sur la fève lorsqu'on coupe le gâteau en huit.



3. On considère à présent que la fève est positionnée de façon à ce que les points E et C soient symétriques par rapport la droite à (AB).
   Déterminer la probabilité de tomber sur la fève en partageant le gâteau en 8.



Formule des sinus

$$\frac{a}{\sin(\propto)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Olympiades de mathématiques 2021

Mardi 23 mars 2021

13h-17h10

Deuxième partie de 15 heures 10 à 17 heures 10

SUJET POUR LES CANDIDATS NE SUIVANT PAS LA SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES EN CLASSE DE PREMIÈRE

Ce sujet comporte deux exercices

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Exercice 1 : à traiter par les élèves <u>ne suivant pas l'enseignement de spécialité en première générale</u>

SEIZE NOMBRES

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

Partie A

On inscrit dans l'ordre ou le désordre chaque entier de 1 à 16 dans l'une des cases du tableau ci-dessous:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

Chacun des entiers compris entre 1 et 16 figure dans le tableau ci-dessous Pour chaque groupe de trois cases consécutives de ce tableau, on calcule la somme des trois nombres contenus dans les trois cases.

1. Combien de sommes calcule-t-on ainsi ?

2. Proposer un exemple de tableau où les sommes calculées sont toutes différentes.

3. Proposer un exemple de tableau où certaines des sommes calculées sont égales.

4. Démontrer qu'il n'est pas possible que toutes les sommes calculées soient strictement inférieures à 24.

5. Est-il possible que toutes ces sommes calculées soient inférieures ou égales à 24 ?

6. Dans cette question, on suppose que toutes les sommes calculées sont inférieures ou égales à 25.
   Démontrer que chacun des nombres a_1, a_4 ,a_7, a_{10} , a_{13} et a_{16} est supérieur ou égal à 11.

Partie B

On écrit sur une feuille 16 nombres entiers positifs consécutifs.

On note respectivement S et P la somme et le produit de ces 16 nombres.

1. Démontrer que P est divisible par 16.

2. Démontrer que P est divisible par 125.

3. Quels sont les trois derniers chiffres de P ?

4. On note n le plus petit des 16 nombres écrits sur la feuille.

   a. Exprimer S en fonction de n.

   b. Donner un exemple de 16 nombres entiers positifs consécutifs pour lesquels les trois derniers chiffres de P sont les mêmes que les trois derniers chiffres de S.

5. Démontrer que par contre, il n'est pas possible que les quatre derniers chiffres de P soient les mêmes que les quatre derniers chiffres de S.

Exercice 2 : à traiter par les élèves ne suivant pas l'enseignement de spécialité en première générale

TRIANGLES DE STEINHAUS

On considère une première ligne formée de + et -, la 2ème est construite à partir de la première en utilisant la règle des signes de 2 signes consécutifs de la première ligne, ainsi de suite. La taille d'un triangle est égale à la longueur de la première ligne.

En voici un exemple :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & + & & & \\ & & - & & - & & \\ & - & & + & & - & \\ + & & - & & - & & + \end{array}$$

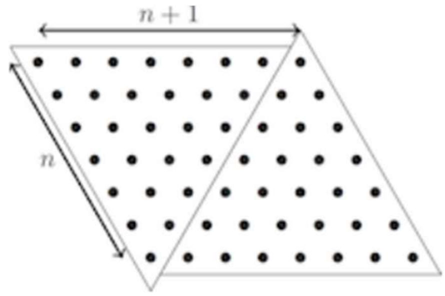
Un triangle de Steinhaus est dit bien équilibré s'il comporte autant de signes $-$ que de signes $+$.

1. Donnez tous les triangles de taille 3.

2. Combien de triangles différents de taille 4 existe-t-il ?

3. Combien de signes comporte un triangle de Steinhaus de taille n ?

   On pourra s'inspirer de la figure ci-dessous.



4. On considère maintenant un triangle de Steinhaus de taille n, bien équilibré.

   a. Montrer que nécessairement, n ou $n+1$ est un multiple de 4.

   b. Donner un exemple de triangle de Steinhaus bien équilibré de taille 7.