OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

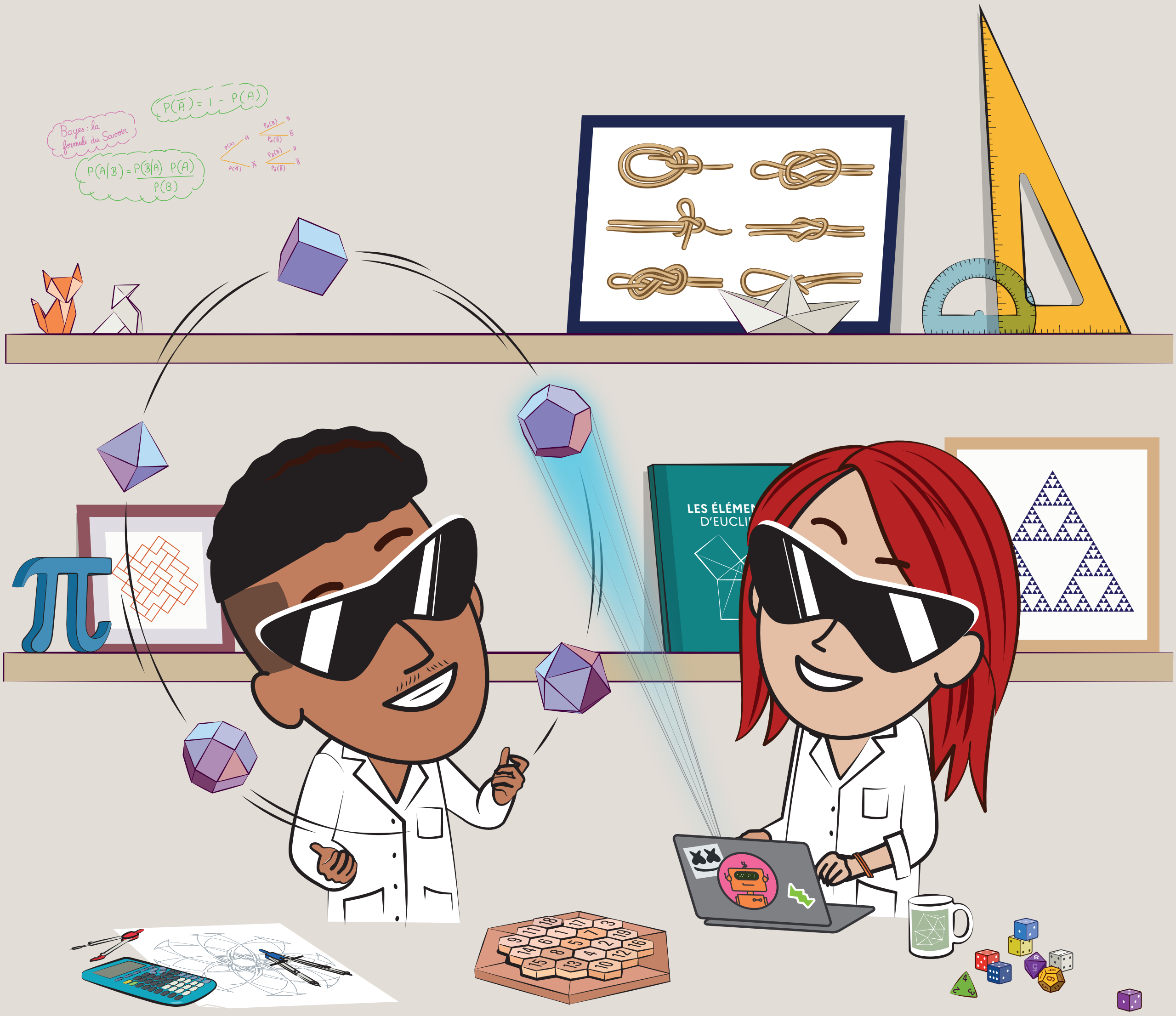
ACADÉMIE DE STRASBOURG 2023

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

STRASBOURG 2023

Exercice 1 : Nombres ennéagonaux centrés

1. Calcul des nombres ennéagonaux *E(*4) et *E*(5)

1.1.a. Lors de l'étape 4, nous devons compléter la figure par une nouvelle couche ennéagonale avec 5 points sur chacun de ses côtés.

La somme des nombres de points sur les 9 côtés est égale à 45, mais chaque sommet du nouvel ennéagone est compté deux fois car il est extrémité commune de deux côtés.

Le nombre de nouveaux points est exactement : $45 - 9 = 36$.

Pour passer de *E*(3) à *E(*4), nous devons rajouter 36 nouveaux points.

1.1.b. En « comptant sur le dessin » de l'énoncé, nous constatons que $E(3) = 1 + 9 + 18 + 27 = 55$.

En conséquence $E(4) = 55 + 36 = 91$.

1.2. Lors de l'étape 5, nous devons compléter la figure par une nouvelle couche ennéagonale avec 6 points sur chacun de ses côtés.

La somme des nombres de points sur les 9 côtés est égale à 54, mais chaque sommet du nouvel ennéagone est compté deux fois car il est extrémité commune de deux côtés.

Le nombre de nouveaux points est exactement $54 - 9 = 45$.

Pour passer de *E*(4) à *E*(5), nous devons rajouter 45 nouveaux points.

En conséquence $E(5) = 91 + 45 = 136$.

2. Une petite démonstration

2.1. Le nombre $S(n)$ est la somme des *n* premiers nombres entiers positifs.

On écrit : $\begin{cases} S(n) = 1 + 2 + \cdots + n \\ S(n) = n + \cdots + 2 + 1 \end{cases}$ puis on ajoute membre à membre, en additionnant les termes deux à deux, en regroupant chaque fois les termes placés l'un sous l'autre dans l'addition.

On note que : $1 + n = 2 + (n - 1) = 3 + (n - 2) = \cdots = (n - 1) + 2 = n + 1$, la somme de deux termes regroupés est constante et égale à $n + 1$. Or, il y a *n* regroupements. La somme de ces *n* regroupements étant égale à $n \times (n + 1)$, nous obtenons :

$$2S(n) = S(n) + S(n) = n \times (n + 1).$$

2.2. D'où nous déduisons immédiatement :

$$S(n) = \frac{n \times (n + 1)}{2}.$$

3. Généralisation et calcul du nombre $E(n)$

Faisons le bilan des résultats précédents. Nous notons que :

$E(1) = 1 + 9$; $E(2) = 1 + 9 + 18$; $E(3) = 1 + 9 + 18 + 27$; $E(4) = 1 + 9 + 18 + 27 + 36$; …

3.1. Soit *k* un entier strictement positif. Lors de l'étape numéro *k*, nous sommes amenés à compléter la figure par une couche ennéagonale avec $(k + 1)$ points sur chacun des côtés. La somme des nombres de points sur les 9 côtés de cette couche est égale à $9 \times (k + 1)$, mais chaque sommet du nouvel ennéagone est compté deux fois car il est extrémité commune de deux côtés.

Le nombre de points situés sur la couche ennéagonale numéro *k* est exactement $9 \times (k + 1) - 9 = 9k$.

La figure obtenue après l'étape numéro *n* est la réunion du point central et des couches ennéagonales dont le numéro va de 1 à *n*.

Nous obtenons la formule explicite donnant le nombre de points de la figure en fonction de $S(n)$:

$$E(n) = 1 + 9 + 9 \times 2 + \cdots + 9 \times n = 1 + 9 \times (1 + 2 + \cdots + n) = 1 + 9S(n).$$

3.2. Calculons maintenant ce nombre en fonction de n en exploitant l'expression de $S(n)$ que nous avons obtenue à la question 2 :

$$E(n) = 1 + 9S(n) = 1 + 9 \times \frac{n(n+1)}{2} = 1 + \frac{9n^2 + 9n}{2} = \frac{9n^2 + 9n + 2}{2}.$$

Comparons avec l'expression donnée par l'énoncé, en remarquant que nous avons le développement suivant :

$$(3n+1)(3n+2) = 9n^2 + 9n + 2$$

Il y a identité entre la forme développée que nous avons obtenue et la forme factorisée donnée par l'énoncé.

Remarquons en outre que cette expression factorisée n'est autre que le nombre $S(3n+1)$.

Nous avons bien vérifié que :

$$E(n) = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} = S(3n+1).$$

3.3. Faisons usage d'un tableur, en l'occurrence celui de TI-Nspire. Nous tabulons de 1 à 10 la suite des entiers (index) et la suite explicite trouvée à la question précédente (nbrennea). Cet usage nous dispense de toute autre justification.

Nous retrouvons au passage les résultats obtenus en **question 1**.

A index	B nbrennea
=seq(n,n,1,10)	=seq((3*n+1)*(3*n+2)/2,n,1,10)
1	10
2	28
3	55
4	91
5	136
6	190
7	253
8	325
9	406
10	496

4. Lien entre nombre ennéagonal centré et nombre triangulaire

4.1.a. Utilisons la formule de récurrence donnée par l'énoncé à partir du nombre $T(4) = 10$ que nous lisons sous le triangle de droite dans l'énoncé :

$$\begin{cases} T(4) = 10 \\ T(5) = T(4) + 5 = 10 + 5 = 15 \\ T(6) = T(5) + 6 = 15 + 6 = 21 \\ T(7) = T(6) + 7 = 21 + 7 = 28 \end{cases}$$

4.1.b. Parmi les sept premiers nombres triangulaires, deux sont aussi des nombres ennéagonaux :

$$T(4) = 10 = E(1) \ ; \ T(7) = 28 = E(2)$$

4.2. La représentation du nombre triangle triangulaire de rang *n* est composée de *n* lignes de points contenant respectivement 1, 2, ..., *n* points, chacune ayant un point de plus que la ligne située au-dessus. Il en résulte que pour tout entier strictement positif *n* : $T(n) = 1 + 2 + \cdots + n = S(n)$.

Il n'y avait pas lieu de changer de notation pour désigner cette somme.

4.3. Dans la résolution de la **question 3.2** nous avons remarqué que pour tout entier strictement positif *k*, nous avions $E(k) = S(3k + 1) = T(3k + 1)$. Les nombres ennéagonaux sont exactement les nombres triangulaires dont l'index est de la forme $3k + 1$, avec *k* entier strictement positif.

Un entier *n* étant un entier strictement positif donné, $T(n)$ est un nombre ennéagonal si et seulement s'il existe un entier strictement positif *k* tel que $3k + 1 = n$, ou aussi bien si et seulement si :

$\frac{n-1}{3}$ est un nombre entier strictement positif.

NB. En référence à l'énoncé, $T(1) = 1$ n'est pas un nombre ennéagonal. En effet, l'énoncé ne définit les nombres ennéagonaux qu'à partir de « l'étape 1 », lorsqu'il y a un premier ennéagone autour du « centre ». Le premier des nombres ennéagonaux est, selon cette interprétation, l'entier $E(1) = 10$. De ce fait, l'entier *k* dont il est question ci-dessus appartient à l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers strictement positifs et non à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Exercice 2 : Regarder un diamètre sous un angle, sous une somme de deux angles

1. Etude d'un triangle particulier

NB. Pour traiter l'ensemble de cette question, proposons-nous préalablement de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ de plusieurs façons, et d'abord en utilisant la formule d'Al-Kashi. Vu que nous connaissons les longueurs des trois côtés du triangle *ABC*, à savoir $CA = 9{,}5 = \frac{19}{2}$; $CB = 9$; $AB = 10$, c'est ainsi que nous obtiendrons le calcul effectif de ce produit scalaire.

Développons le carré scalaire $AB^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ à l'aide de la relation de Chasles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$:
$AB^2 = \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right).\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right) = CB^2 + CA^2 - 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ d'où nous déduisons la relation :

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2)$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\left(9^2 + \left(\frac{19}{2}\right)^2 - 10^2\right) = \frac{1}{2}\left(81 + \frac{361}{4} - 100\right) = \frac{285}{8}$$

1.1. Pour calculer *CH*, exprimons ce produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ en utilisant la projection d'un vecteur sur le support de l'autre. Vu que *A, H, B* sont alignés dans cet ordre (*H* est le projeté orthogonal de *A* sur (*BC*) et il appartient au segment [*CB*]), ce produit scalaire est un réel strictement positif. Dans ce cas :

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overline{CH}.\overline{CB} = CH.CB$$

D'où nous déduisons :

$$CH = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{CB} = \frac{\frac{285}{8}}{9} = \frac{95}{24}$$

1.2. Calculons d'abord le cosinus de l'angle de sommet *C* à l'aide d'une relation trigonométrique dans le triangle rectangle *ACH* :

$$\cos\left(\widehat{BCA}\right) = \frac{CH}{CA} = \frac{\frac{95}{24}}{\frac{19}{2}} = \frac{5}{12}$$

La copie d'écran ci-dessous montre que la mesure γ en degrés de $\widehat{BCA}$ est telle que $65{,}375 \leq \gamma < 65{,}385$.

Une valeur approchée à 0,1 près de la mesure en degrés de $\widehat{BCA}$ est 65,4 degrés.

Copie d'écran du logiciel TI-Nspire relative aux questions **1.1** et **1.2.**

Elle montre notamment que :

$$3{,}9575 \leq \frac{95}{24} < 3{,}9585.$$

En conséquence,

$CH = 3{,}96$ à 0,01 près

©Calcul du cosinus de l'angle de sommet C :

$$\frac{\left(\frac{19}{2}\right)^2+9^2-10^2}{19\cdot 9} \qquad \frac{5}{12}$$

©Valeur approchée de la mesure en degrés de cet angle :

$$\cos^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) \qquad 65.38$$

$$\frac{19}{2}\cdot\frac{5}{12} \qquad \frac{95}{24}$$

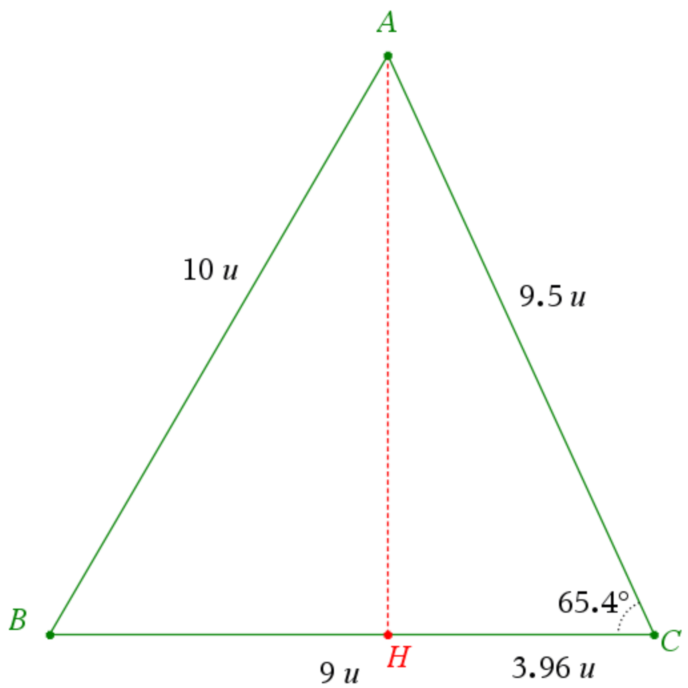
$$\frac{19}{2}\cdot\frac{5}{12} \qquad 3.958$$

NB. Si l'objectif de cette question est de mesurer l'angle de sommet *C*, le calcul de *CH* n'est pas obligatoire, une variante de la formule d'Al-Kashi donne le résultat majeur plus directement :

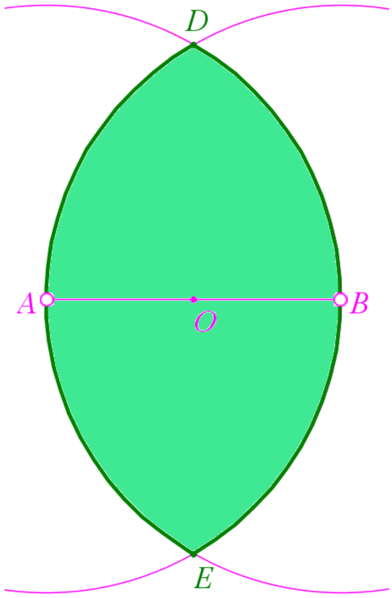
$$\cos\left(\widehat{BCA}\right) = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2CA.CB}$$

$$\cos\left(\widehat{BCA}\right) = \frac{\frac{361}{4} + 81 - 100}{2 \times \frac{19}{2} \times 9} = \frac{\frac{285}{4}}{19 \times 9} = \frac{3 \times 5 \times 19}{4 \times 19 \times 9} = \frac{5}{12}$$

La figure ci-contre synthétise les résultats demandés dans cette **question 1**.

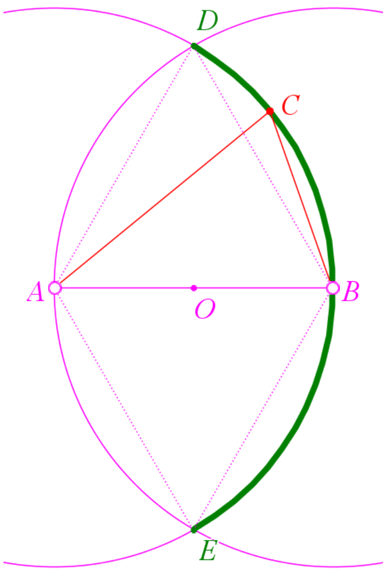


2.1. La « zone hachurée » est ici coloriée en vert. Il s'agit de la partie commune au disque de centre *A* passant par *B* et au disque de centre *B* passant par *B*, à l'exclusion du segment [*AB*] lui-même.



Notons sur cette figure que les triangles *ABD* et *ABE* sont, par construction, des triangles équilatéraux. Tous leurs angles ont pour mesure 60°.

2.2.a. Dire que le point *C* « appartient à la zone hachurée et au cercle de centre *A* passant par *B* » signifie que *C* appartient ou bien à l'arc d'extrémités *B* (exclus) et *D* (inclus) ou bien à l'arc d'extrémités *B* (exclus) et *E* (inclus) de ce cercle, ensemble colorié en vert sur la figure ci-contre.



Dans ce cas, le triangle *ABC* est un triangle isocèle de sommet *A*.

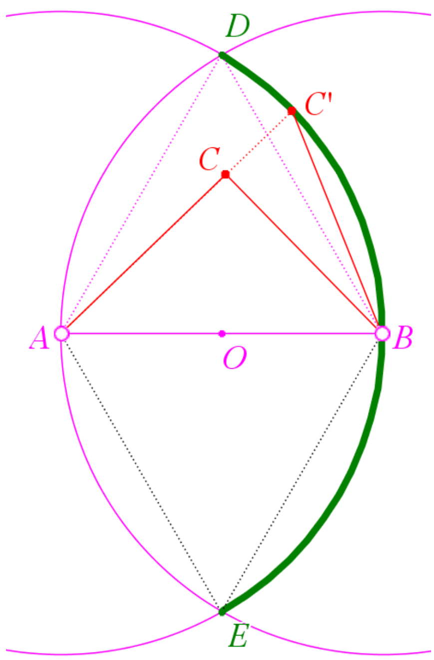
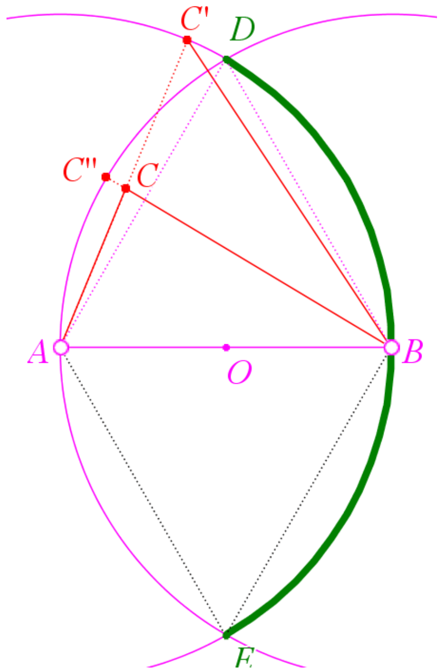
2.2.a.i. Lorsque *C* est entre *B* (exclus) et *D* (inclus), les segments [*AB*] et [*AD*] sont situés de part et d'autre du segment [*AC*], [*AD*] et [*AC*] pouvant éventuellement être confondus.

Nous avons $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD}$, soit $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} - \widehat{CAD}$

Or, $\widehat{BAD} = 60°$. Donc : $\widehat{BAC} = 60° - \widehat{CAD} \leq 60°.$

Raisonnement analogue, par symétrie, lorsque *C* est entre *B* et *E.*

2.2.a.ii. Le triangle *ABC* est un triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure moins de 60°. Puisque la somme de ses angles est égale à 180°, ses deux angles de bases (qui sont égaux), les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC}$, mesurent plus de 60°. En particulier $\widehat{ACB} \geq 60°.$

<table>
<tr>
<td>2.2.b. Lorsque A, C et C′ sont alignés dans cet ordre, les segments [BA] et [BC′] sont situés de part et d'autre du segment [BC].
Nous avons $\widehat{ABC'} = \widehat{ABC} + \widehat{CBC'}$, ce qui implique que $\widehat{ABC'} \geq \widehat{ABC}$
Les triangles ABC et ABC′ ayant le même angle de sommet A et ayant tous deux pour somme des angles 180°, l'inégalité $\widehat{ABC} \leq \widehat{ABC'}$ implique une inégalité de sens contraire pour leurs angles de sommets C et C′ : $\widehat{ACB} \geq \widehat{AC'B}$.</td>
<td>Premier cas de figure :

</td>
<td>Deuxième cas de figure :

</td>
</tr>
</table>

2.3. Il se présente deux cas de figure, comme nous l'illustrons ci-dessus. Lorsque *C* se trouve dans la zone limitée par les deux segments [*AD*] et [*AE*] et l'arc *BD* du cercle de centre *A* passant par *B*, le point *C′* appartient à l'arc *BD* de ce cercle (figure de gauche). Nous pouvons lui appliquer le raisonnement précédent et en particulier le résultat de **2.2.b.ii**. Dans un tel cas : $\widehat{AC'B} \geq 60°$ et a fortiori, $\widehat{ACB} \geq \widehat{AC'B} \geq 60°$.

Lorsque *C* se trouve à l'extérieur de cette zone (figure de droite), le point *C′*est à l'extérieur de l'arc *BD*, le raisonnement précédent n'est plus valable. Mais dans ce cas, nous pouvons raisonner en utilisant le point *C″* (voir figure) au lieu du point *C′*. Ce point appartient à l'arc *DE* du cercle de centre *B* passant par *A*, arc pour lequel nous pouvons construire un raisonnement analogue à celui de **2.2.b**. Nous obtiendrons $\widehat{ACB} \geq \widehat{AC''B} \geq 60°$.

En conclusion, quel que soit le cas de figure, $\widehat{ACB} \geq 60°$.

.

3. Une paramétrisation de presque toute la frontière de la zone hachurée

3.1. Le point *A* a pour coordonnées $(-1, 0)$. D'après l'étude précédente, tout point *C* de la frontière de la zone hachurée a une abscisse distincte de -1. Il en résulte que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a toujours une abscisse distincte de 0 : la droite (*AC*) n'est pas une parallèle à l'axe des ordonnées. La droite (*AC*) et l'axe des ordonnées sont des droites sécantes en un point.

3.2. On désigne par (x, y) les coordonnées d'un point quelconque M du plan.

Ecrivons d'abord une équation cartésienne de la droite (AC) :

$M \in (AC) \iff \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y & t \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire : $y - t(x+1) = 0$.

NB. On écrit que le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ doit être nul.

Ecrivons aussi une équation du cercle de centre A passant par B : $(x+1)^2 + y^2 = 4$. Ecrivons de même une équation du cercle de centre B passant par A : $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

NB. On écrit que le carré de la distance AM (respectivement BM) doit être égal au carré de la distance AB.

Etudions maintenant séparément l'intersection de la droite (AC) et de chacun des deux cercles :

3.2.a. M appartient à (AC) et au cercle de centre A passant par B si et seulement si : $\begin{cases} y - t(x+1) = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

Son abscisse x est solution de l'équation : $(x+1)^2 + t^2(x+1)^2 = 4$ soit de l'équation :

$x^2(t^2+1) + 2x(t^2+1) + t^2 - 3 = 0$.

Cette équation admet deux solutions : $x_1 = -1 - \frac{2}{\sqrt{t^2+1}}$ et $x_2 = -1 + \frac{2}{\sqrt{t^2+1}}$. La première est toujours strictement négative, et la deuxième est positive ou nulle (donc est effectivement l'abscisse d'un point situé sur $\mathcal{C}$) lorsque $t^2 + 1 \leq 4$, c'est-à-dire lorsque $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$.

Dans cette circonstance, l'ordonnée correspondante est $y = t(x+1) = \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}}$.

3.2.b. M appartient à (AC) et au cercle de centre B passant par A si et seulement si : $\begin{cases} y - t(x+1) = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Son abscisse x est solution de l'équation : $(x-1)^2 + t^2(x+1)^2 = 4$ soit de l'équation :

$x^2(t^2+1) + 2x(t^2-1) + t^2 - 3 = 0$.

Cette équation admet deux solutions : $x_1 = -1$ qui est l'abscisse de A et $x_2 = \frac{3-t^2}{t^2+1} = -1 + \frac{4}{t^2+1}$ qui est négative ou nulle (donc est effectivement l'abscisse d'un point situé sur $\mathcal{C}'$) lorsque $t^2 \geq 3$, c'est-à-dire lorsque $t \leq -\sqrt{3}$ ou bien $t \geq \sqrt{3}$.

Dans cette circonstance, l'ordonnée correspondante est $y = t(x+1) = \frac{4t}{t^2+1}$.

Synthèse de l'ensemble de la question 3.2. Nous avons paramétré l'ensemble $\mathcal{F}$ privé du point A :

$$\begin{cases} x_C = -1 + \dfrac{2}{\sqrt{t^2+1}} \text{ ; } y_C = \dfrac{2t}{\sqrt{t^2+1}} \text{ si } -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3} \\ x_C = -1 + \dfrac{4}{t^2+1} \text{ ; } y_C = \dfrac{4t}{t^2+1} \text{ sinon} \end{cases}.$$

3.3. Nous pouvons calculer le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$ de l'une ou l'autre de deux façons :

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{CA \times CB} = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2 \times CA \times CB}$$

Distinguons deux cas et déléguons les calculs à un logiciel de calcul formel :

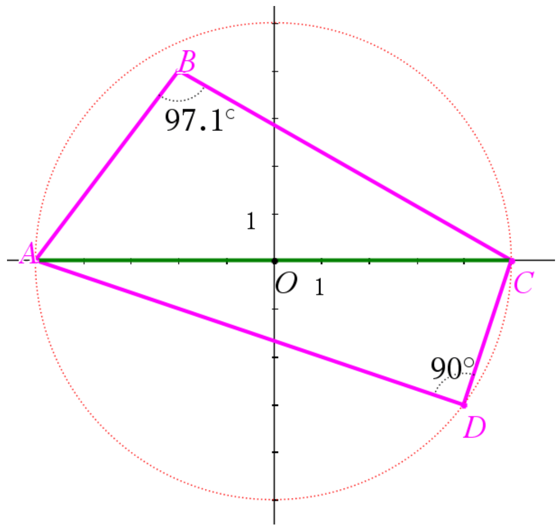
Premier cas : le point C est sur l'arc de cercle $\mathcal{C}$. La calculatrice affiche $\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{(t^2+1)}-1\right)}}{2(t^2+1)^{1/4}}$ comme valeur du cosinus. Elle atteste que ce cosinus est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$ quand $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$ soit quand le point C est sur l'arc de cercle $\mathcal{C}$.	Define $a=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ *Terminé* Define $b=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ *Terminé* Define $c=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{t^2+1}}-1\\ \frac{2\cdot t}{\sqrt{t^2+1}}\end{bmatrix}$ *Terminé* ©Calcul du cosinus de l'angle ACB de deux façons : $\frac{\mathrm{dotP}(a-c,b-c)}{\mathrm{norm}(a-c)\cdot \mathrm{norm}(b-c)}$ $\quad \frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)}}{2\cdot\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}$ $\frac{(\mathrm{norm}(a-c))^2+(\mathrm{norm}(b-c))^2-(\mathrm{norm}(a-b))^2}{2\cdot \mathrm{norm}(a-c)\cdot \mathrm{norm}(b-c)}$ $\quad \frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)}}{2\cdot\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}$ $\mathrm{solve}\left(\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)}}{2\cdot\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}\leq\frac{1}{2},t\right)$ $\quad -\sqrt{3}\leq t\leq\sqrt{3}$
Deuxième cas : le point C est sur l'arc de cercle $\mathcal{C}'$ .La calculatrice affiche $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ comme valeur du cosinus. Elle atteste que ce cosinus est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$ quand $t \leq \sqrt{3}$ ou $t \geq \sqrt{3}$soit quand le point C est sur l'arc de cercle $\mathcal{C}'$.	Define $c=\begin{bmatrix}\frac{4}{t^2+1}-1\\ \frac{4\cdot t}{t^2+1}\end{bmatrix}$ *Terminé* $\frac{\mathrm{dotP}(a-c,b-c)}{\mathrm{norm}(a-c)\cdot \mathrm{norm}(b-c)}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ $\frac{(\mathrm{norm}(a-c))^2+(\mathrm{norm}(b-c))^2-(\mathrm{norm}(a-b))^2}{2\cdot \mathrm{norm}(a-c)\cdot \mathrm{norm}(b-c)}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ $\mathrm{solve}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\leq\frac{1}{2},t\right)$ $\quad t\leq-\sqrt{3}$ or $t\geq\sqrt{3}$ $\mathrm{solve}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\leq\frac{1}{2},t\right)$ $\quad t\leq-\sqrt{3}$ or $t\geq\sqrt{3}$

3.4. Nous pouvons en déduire que, quelle que soit la position de C sur la frontière $\mathcal{F}$, qu'il soit sur l'arc de cercle $\mathcal{C}$ ou sur l'arc de cercle $\mathcal{C}'$, le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{2} = \cos(60)$, et par conséquent, la fonction cosinus étant décroissante sur l'intervalle $[0\,;180]$:

L'angle $\widehat{ACB}$ est au moins égal à 60°.

4. Quelques quadrilatères

4.1.a. On vérifie aisément que OD = 5, donc que D appartient au cercle de diamètre $[AC]$ et que $OB = \sqrt{20} < 5$ donc que B est strictement intérieur au disque de diamètre $[AB]$. Le quadrilatère $ABCD$ est un quadrilatère dont tous les côtés sont inclus dans ce disque de diamètre $[AB]$, il est entièrement inclus dans ce disque. En conséquence, la distance de deux points quelconques de ce quadrilatère est inférieure ou égale au diamètre de ce disque.



La diagonale $[AC]$ a une longueur supérieure ou égale à celle de tout segment joignant deux points du quadrilatère.

4.1.b. Vu que D appartient au cercle de diamètre $[AC]$, l'angle $\widehat{ADC}$ est un angle droit.

En ce qui concerne l'angle $\widehat{ABC}$, nous déléguons les calculs à un logiciel de calcul formel. Ce dernier affiche :

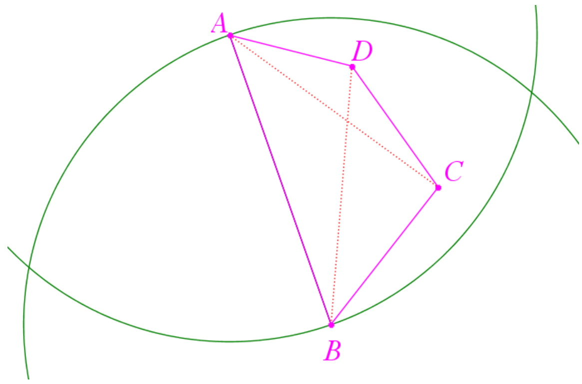
Define $a=\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix}$	*Terminé*
Define $b=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$	*Terminé*
Define $c=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$	*Terminé*
Define $d=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$	*Terminé*
©Calcul du cosinus de l'angle ABC de deux façons :	
$\dfrac{\text{dotP}(a-b,c-b)}{\text{norm}(a-b)\cdot\text{norm}(c-b)}$	$\dfrac{-\sqrt{65}}{65}$
$\dfrac{(\text{norm}(a-b))^2+(\text{norm}(c-b))^2-(\text{norm}(a-c))^2}{2\cdot\text{norm}(a-b)\cdot\text{norm}(c-b)}$	$\dfrac{-\sqrt{65}}{65}$
©Valeur approchée de la mesure de l'angle ABC	
$\cos^{-1}\left(\dfrac{-\sqrt{65}}{65}\right)$	97.125

$$\cos\left(\widehat{ABC}\right) = -\frac{\sqrt{65}}{65}.$$

L'affichage conduit à la valeur approchée : $\widehat{ABC} = 97{,}1°$ à 0,1 près.

$\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 187{,}1°$ à 0,1 près.

4.2. Construisons un quadrilatère *ABCD* dont les diagonales [*AC*] et [*BD*] ont des longueurs plus petites que celle du côté [*AB*]. Pour cela, nous pouvons placer les points *C* et *D* à l'intérieur de chacun des deux disques de rayon *AB* et de centres respectifs *A* et *B* (dans la « zone hachurée » de la **question 2**), de manière que *ABCD* soit convexe. Illustration ci-contre.



Oui, il existe de tels quadrilatères.

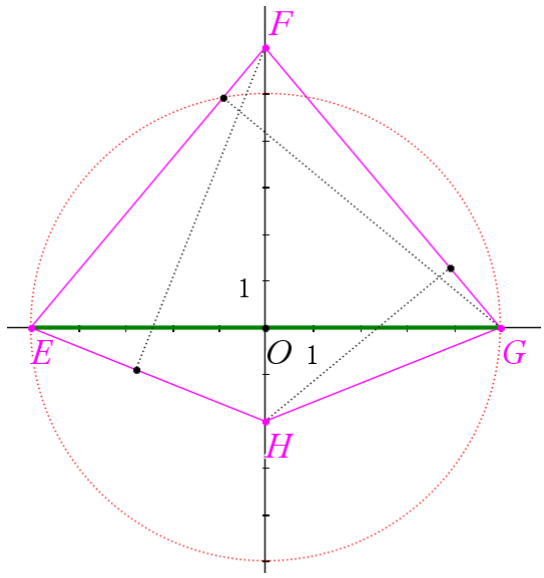
4.3. Sur la figure ci-contre, nous avons placé les points $E(-5,0)$; $F(0,6)$; $G(5,0)$; $H(0,-2)$.

Ainsi, nous obtenons un quadrilatère *EFGH* qui admet l'axe *Oy* comme axe de symétrie.

$EG = 10$ et $HF = 8$.

- Le point *F* est bien extérieur au disque de diamètre [*EG*].
- Le point le plus éloigné de *F* est *H* (distance égale à 8)
- Le point le plus éloigné de *G* est *E*.

Toutes les conditions requises sont satisfaites.



Oui, il existe de tels quadrilatères.

5. Déterminons un minorant de la somme $\widehat{ABC} + \widehat{CDA}$:

Si la diagonale [*AC*] une longueur supérieure ou égale à tout segment inscrit dans le quadrilatère *ABCD*, les deux triangles *ABC* et *ADC* satisfont les hypothèses de la **question 2**. Les points *B* et *D* appartiennent à la « zone hachurée » relative au segment [*AC*].

Nous pouvons affirmer que chacun des deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CDA}$ est au moins égal à 60°. En conséquence :

120° est un minorant de la somme $\widehat{ABC} + \widehat{CDA}$.

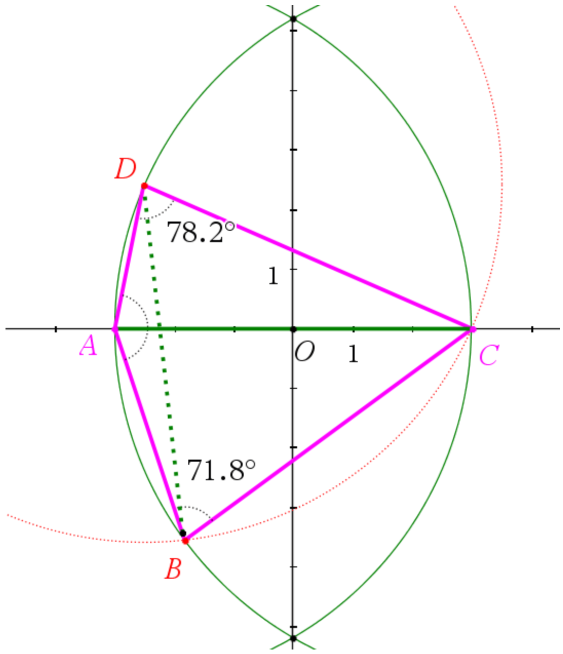
Cette réponse est parfaitement légitime. Cependant, nous pouvons remarquer que *B* et *D* ne peuvent pas être placés indépendamment dans la « zone hachurée ». Il faut en outre que la deuxième diagonale [*BD*] ait une longueur inférieure ou égale à celle de [*AC*]. On doit pouvoir mieux faire.

Donnons-nous un segment [*AC*] et tentons de placer « du mieux possible » les points *B* et *D*.

La longueur *BD* de la deuxième diagonale devrait être la plus grande possible (et donc égale à *AC*). Si ce n'était pas le cas, nous pourrions diminuer un angle en étirant la deuxième diagonale.

Les points *B* et *D* devrait appartenir à la frontière de la « zone hachurée ». Si ce n'était pas le cas, nous pourrions diminuer un angle en nous rapprochant de cette frontière.

Ces hypothèses conduisent à s'intéresser à la figure ci-contre.



Nous y notons que : $BC = CD = DB = AC$. Le triangle *BCD* est équilatéral. L'angle de sommet *C* du quadrilatère *ABCD* mesure 60° et celui de sommet *A* mesure 150° car il intercepte un arc du cercle dont la corde est égale au rayon. La somme des angles d'un quadrilatère étant égale à 360, nous en déduisons :

$\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 360 - 60 - 150 = 150.$

Il existe donc des quadrilatères pour lesquels la somme $\widehat{ABC} + \widehat{CDA}$ est égale à 150°. Tout nombre strictement supérieur à 150 n'est donc pas un minorant. Nous conjecturons qu'il n'est pas possible d'obtenir une somme moindre.

Un meilleur minorant de la somme $\widehat{ABC} + \widehat{CDA}$ pourrait bien être 150°.

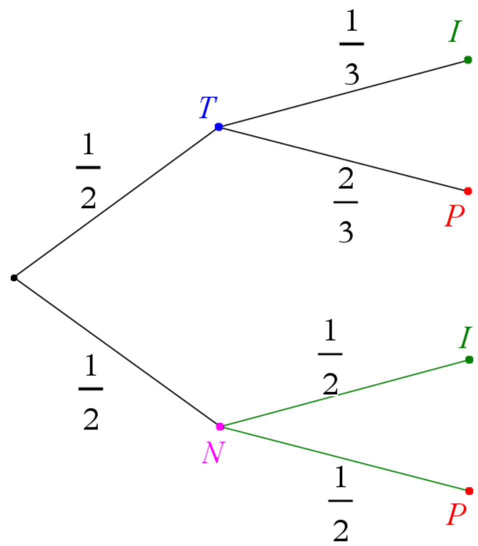
Exercice 3 : Expériences aléatoires

Préalablement à tout protocole, étudions l'expérience aléatoire E suivante : « On choisit un dé au hasard ; on le lance et on note la parité du résultat observé sur le dé ».

« Choisir un dé au hasard » signifie que les deux choix, celui du dé truqué ou celui du dé non truqué, sont équiprobables.
Désignons par T et par N les deux dés (« truqué » et « normal »). Désignons par I et par P la parité du résultat observé (« impair » ou « pair »).

On peut associer à cette expérience E l'arbre de probabilité ci-contre, ainsi que l'univers $\Omega = \{T, N\} \times \{I, P\}$ avec la distribution de probabilité suivante :

$$\begin{cases} P[(T,I)] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ P[(T,P)] = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ P[(N,I)] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ P[(N,P)] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$



Dans cette expérience :
« Obtenir un résultat impair » est l'évènement $\{(T, I)\ ;\ (N, I)\}$ et la probabilité de cet évènement est :

$$P[\text{"obtenir un résultat impair"}] = P[(T,I)] + P[(N,I)] = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Etudions désormais l'un après l'autre les différents protocoles :

Protocole 1. Chaque lancer est décrit par l'expérience E, en particulier le quatrième.

Protocoles 2 et 3. Les lancers sont conditionnés par le choix du dé au premier lancer, mais lorsqu'on procède au quatrième lancer, la probabilité d'utiliser le dé truqué est toujours égale à $\frac{1}{2}$ (dans le protocole 2, cette probabilité est celle d'avoir choisi le dé truqué au premier lancer, et dans le protocole 3, c'est la probabilité d'avoir choisi le dé normal au premier lancer puisqu'on alterne les deux dés). Le quatrième lancer pris spécifiquement est lui aussi décrit par l'expérience E.

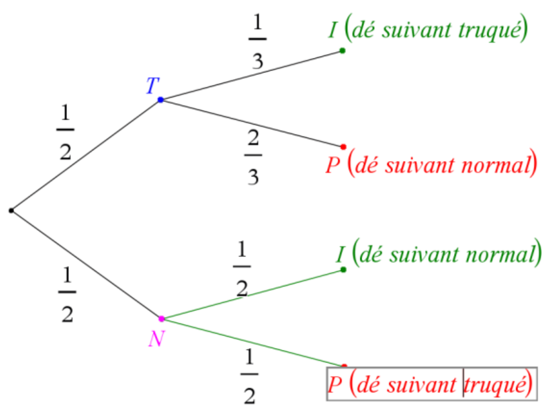
Dans les protocoles 1, 2 et 3 :

$$\mathrm{P(Q)}=\frac{5}{12}=0{,}417 \text{ à } 0{,}001 \text{ près.}$$

Protocole 4. Nous sommes contraints d'étudier quel dé est utilisé lors de chacun des lancers successifs pour déterminer la probabilité d'utiliser le dé truqué au quatrième lancer. Pour cela, nous allons décrire ce qu'il se passe lors de chaque lancer à l'aide d'arbres de probabilité.

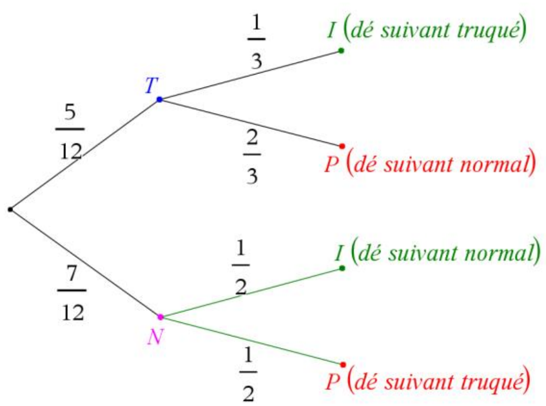
Premier lancer

La probabilité d'utiliser le dé truqué lors du deuxième lancer est égale à $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$



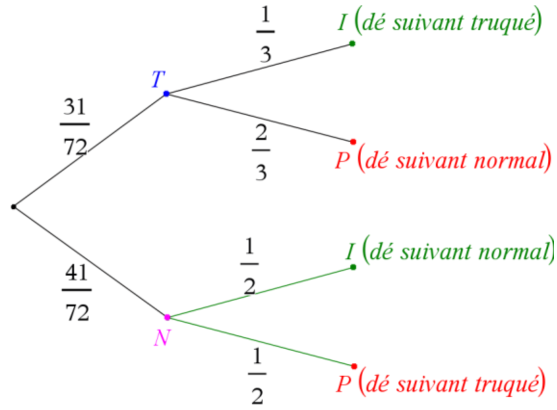
Deuxième lancer

La probabilité d'utiliser le dé truqué lors du troisième lancer est égale à $\frac{5}{12}\times\frac{1}{3}+\frac{7}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{31}{72}$.



Troisième lancer

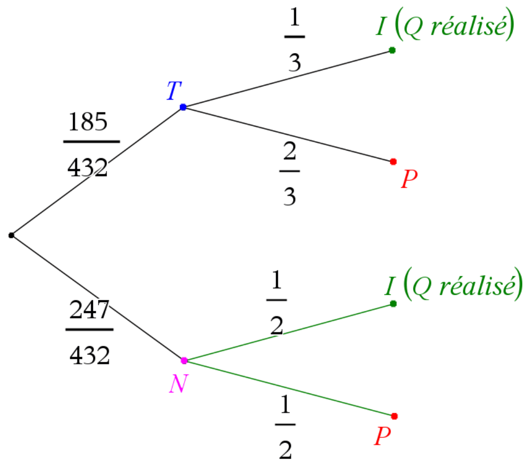
La probabilité d'utiliser le dé truqué lors du quatrième lancer est égale à $\frac{31}{72} \times \frac{1}{3} + \frac{41}{72} \times \frac{1}{2} = \frac{185}{432}$.



Quatrième lancer et probabilité de Q

La probabilité de l'évènement Q est égale à :

$$\frac{185}{432} \times \frac{1}{3} + \frac{247}{432} \times \frac{1}{2} = \frac{1111}{2592} = 0{,}429 \text{ à } 0{,}001 \text{ près.}$$



En conclusion, les protocoles 1, 2, et 3 aboutissent à la même probabilité d'obtenir un nombre impair au quatrième lancer, cette probabilité étant égale à 41,7 % à 0,1 % près.

En revanche le protocole 4 aboutit à une probabilité de cet évènement légèrement plus grande, nous trouvons 42,9 % à 0,1 % près.

Complément :

Une simulation avec Python

L'algorithme **proto4** simule le déroulement de n expériences suivant le protocole 4. Il renvoie sous forme de liste les nombres de résultats « impair » obtenus lors de chacun des quatre premiers lancers.

Les tests effectués, avec $n = 1000000$ notamment, semblent compatibles avec nos résultats théoriques.

```
>>> from random import *
>>> def proto4(n):
        r=[0,0,0,0]
        for i in range(1,n+1):
                d=randint(2,3)
                for j in range(1,5):
                        if randint(1,d)==1:
                                r[j-1]=r[j-1]+1
                        else:
                                d=5-d
        print(r)


>>> proto4(10000)
[4138, 4328, 4272, 4203]
>>> proto4(1000000)
[416668, 430162, 426924, 428358]
>>> proto4(1000000)
[416463, 431906, 427666, 428429]
>>>
```