OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE STRASBOURG
2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

STRASBOURG 2021

Exercice 1. Seize nombres

1. On calcule les sommes : $s_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $s_2 = a_2 + a_3 + a_4$, …., $s_{14} = a_{14} + a_{15} + a_{16}$.

On calcule ainsi 14 sommes.

2. Considérons le tableau tel que $a_i = i$ pour $1 \leq i \leq 16$, comme il suit :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Alors $s_1 = 6$; $s_2 = 9$;…; $s_{14} = 45$ et de façon générale pour $1 \leq i \leq 14$: $s_i = i + i + 1 + i + 2 = 3 \times (i+1)$.

Les 14 sommes sont toutes différentes.

3. Voici un nouveau tableau, issu du précédent, où l'on a permuté 1 et 7 ainsi que 8 et 14 :

7	2	3	4	5	6	1	14	9	10	11	12	13	8	15	16

Dans ce tableau : $s_1 = 7 + 2 + 3 = 12 = 5 + 6 + 1 = s_5$ et aussi : $s_8 = 14 + 9 + 10 = 33 = 12 + 13 + 8 = s_{12}$

« Certaines des sommes calculées sont égales ».

On remarque cependant que deux sommes consécutives ne peuvent jamais être égales : elles ont deux termes communs et elles diffèrent par leurs troisièmes termes qui sont des entiers distincts.

Remarque préalable pour les questions 4, 5 et 6 :

Avant d'aborder les questions suivantes, introduisons le nombre : $S = a_1 + a_2 + ... + a_{16}$, somme des seize nombres. D'après l'énoncé, les seize nombres inscrits dans le tableau sont, dans l'ordre ou le désordre, les 16 premiers entiers strictement positifs : $S = 1 + 2 + ... + 16$.

On sait que, de façon générale, la somme des n premiers entiers s'exprime ainsi : $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n \times (n+1)}{2}$.

En ce qui nous concerne : $S = 1 + 2 + ... + 16 = \dfrac{16 \times 17}{2} = 136$.

Quel que soit le tableau considéré, la somme de ses seize éléments est égale à 136.

4. Supposons que toutes les sommes soient strictement inférieures à 24.
Alors, la somme de cinq quelconques d'entre elles est strictement inférieure à $24 \times 5 = 120$.

Considérons particulièrement les cinq sommes $s_1 = a_1 + a_2 + a_3$; $s_4 = a_4 + a_5 + a_6$; $s_7 = a_7 + a_8 + a_9$; $s_{10} = a_{10} + a_{11} + a_{12}$ et $s_{13} = a_{13} + a_{14} + a_{15}$ (seul parmi les 16 entiers de 1 à 16, le terme a_{16} n'est pas comptabilisé dans l'une de ces cinq sommes, tous les autres l'étant une fois et une seule).

La somme S s'exprime ainsi : $S = 136 = s_1 + s_4 + s_7 + s_{10} + s_{13} + a_{16}$, en groupant trois par trois les termes de S du premier au quinzième. On en déduit : $a_{16} = 136 - (s_1 + s_4 + s_7 + s_{10} + s_{13})$

Sous l'hypothèse de cette question, $(s_1 + s_4 + s_7 + s_{10} + s_{13}) < 120$ et on obtient l'inégalité : $a_{16} > 136 - 120 = 16$, inégalité stricte qui est incompatible avec le fait que a_{16} est l'un des 16 premiers entiers.
L'hypothèse émise aboutit à une contradiction.

Il n'est pas possible que toutes les sommes soient strictement inférieures à 24.

5. Supposons que toutes les sommes soient inférieures ou égales à 24. Alors, la somme de cinq quelconques d'entre elles est inférieure ou égale à $24 \times 5 = 120$.
Reprenons le raisonnement de la question **4**, mais avec des inégalités larges cette fois.
Sous l'hypothèse de cette question, $(s_1 + s_4 + s_7 + s_{10} + s_{13}) \le 120$ puis : $a_{16} \ge 136 - 120 = 16$, inégalité qui n'est compatible avec l'appartenance à $\{1 ; 2 ;...; 16\}$ que si : $a_{16} = 16$

Considérons de la même façon les sommes : $s_2 = a_2 + a_3 + a_4$; s_5 ; s_8 ; s_{11} et $s_{14} = a_{14} + a_{15} + a_{16}$ (seul parmi les 16 entiers de 1 à 16 le terme a_1 n'est pas comptabilisé dans l'une de ces cinq sommes).
La somme S s'exprime ainsi : $S = 136 = a_1 + s_2 + s_5 + s_8 + s_{11} + s_{14}$, en groupant trois par trois les termes de S du deuxième au seizième.

On obtient : $a_1 = 136 - (s_2 + s_5 + s_8 + s_{11} + s_{14})$ puis sous l'hypothèse de cette question : $a_1 \geq 136 - 120 = 16$, inégalité qui est n'est compatible avec l'appartenance à $\{1 \ ; \ 2 \ ;...; \ 16\}$ que si : $a_1 = 16$.

Mais les deux nombres a_1 et a_{16} sont d'après l'énoncé des entiers distincts, ils ne peuvent pas être tous les deux à la fois égaux à 16. L'hypothèse émise aboutit à une contradiction.

Il n'est pas possible que toutes les sommes soient inférieures ou égales à 24.

6. On peut répartir les seize éléments du tableau en cinq sommes de trois termes consécutifs et un terme isolé de six façons différentes, les deux façons que nous venons de voir et quatre autres façons, suivant que l'on isole les termes numéros 1, 4, 7, 10, 13 ou 16 :

$$\begin{cases} s_2 + s_5 + s_8 + s_{11} + s_{14} + a_1 = S = 136 \\ s_1 + s_5 + s_8 + s_{11} + s_{14} + a_4 = S = 136 \\ s_1 + s_4 + s_8 + s_{11} + s_{14} + a_7 = S = 136 \\ s_1 + s_4 + s_7 + s_{11} + s_{14} + a_{10} = S = 136 \\ s_1 + s_4 + s_7 + s_{10} + s_{14} + a_{13} = S = 136 \\ s_1 + s_4 + s_7 + s_{10} + s_{13} + a_{16} = S = 136 \end{cases}$$

Supposons que toutes les sommes soient inférieures ou égales à 25. Alors, la somme de cinq quelconques d'entre elles est inférieure ou égale à $25 \times 5 = 125$.

Nous obtenons, en exploitant chacune des six répartitions : $a_i \geq 136 - 125 = 11$ pour chacune des six valeurs : $i = 1 \ ; \ 4 \ ; \ 7 \ ; \ 10 \ ; \ 13 \ ; \ 16$.

Chacun des six entiers a_1, a_4, a_7, a_{10}, a_{13}, a_{16} est supérieur ou égal à 11.

Les six entiers a_1, a_4, a_7, a_{10}, a_{13}, a_{16} sont les six entiers de l'ensemble $\{11, 12, 13, 14, 15, 16\}$.

NB : Il existe effectivement des tableaux où les sommes sont toutes inférieures ou égales à 25. Citons par exemple : {16, 7, 2, 15, 6, 4, 12, 8, 5, 11, 9, 3, 13, 1, 10, 14} dont la suite des sommes est : {25, 24, 23, 25, 22, 24, 25, 24, 25, 23, 25, 17, 24, 25} ou bien aussi {16, 7, 2, 15, 6, 4, 12, 5, 8, 11, 3, 9 13, 1, 10, 14} dont la suite des sommes est : {25, 24, 23, 25, 22, 21, 25, 24, 22, 23, 25, 23, 24, 25}.

Exercice 2. Une histoire de fèves

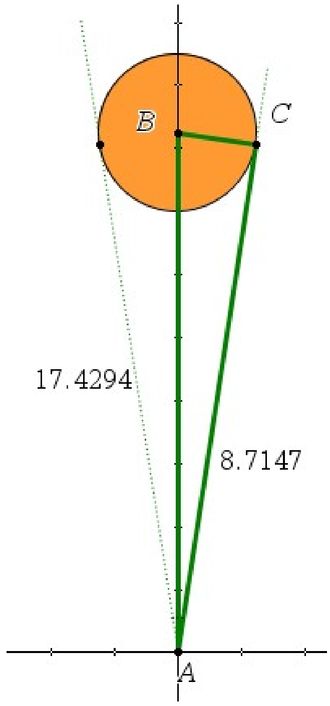
Partie 1

1. D'après les données de l'énoncé, la distance AE est égale à 12,5 cm. La distance BE est égale à la distance de la fève au bord du disque augmentée d'un rayon de la fève, elle est donc égale à 4,25 cm. Par conséquent, compte tenu de l'alignement A, B, E dans cet ordre : $AB = AE - BE = 12{,}5 - 4{,}25 = 8{,}25$

La distance AB est égale à 8,25 cm.

2. La tangente en C au cercle « fève » est la droite passant par C et perpendiculaire au rayon [BC] : l'angle $\widehat{BCA}$ est un angle droit :

Le triangle ABC est rectangle en C.



3. Dans le triangle ABC, on connaît la mesure du côté opposé à l'angle de sommet A, soit $BC = 1{,}25$ et celle de l'hypoténuse, soit : $AB = 8{,}25$.

On en déduit le sinus de l'angle $\widehat{BAC}$: $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1{,}25}{8{,}25} = \dfrac{5}{33}$ (0,1515 à 10^{-4} près)

La mesure α de l'angle $\widehat{BAC}$ est le nombre dont le sinus est égal à $\dfrac{5}{33}$:

La fonction « inverse sinus » d'une calculatrice, *<u>réglée en degrés</u>*, indique :

$8{,}71 < \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{33}\right) < 8{,}72$. L'arrondi au dixième près de ce nombre est donc 8,7.

Une valeur approchée au dixième près de la mesure α en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$ est 8,7.

4. On peut considérer le secteur angulaire d'ouverture d'angle 45 degrés dont la bissectrice est la droite (*AB*). Lorsqu'on coupe la galette en huit, il y aura un et un seul coup de couteau dans ce secteur angulaire, dont on peut admettre que l'angle avec (*AB*) suit une loi uniforme dans l'intervalle $[-22{,}5\ ;\ 22{,}5]$. On trouve la fève si cet angle est dans l'intervalle $[-\alpha\ ;\ \alpha]$. La probabilité qu'il en soit ainsi est : $\dfrac{2\alpha}{45}$.

Une calculatrice indique que : $0{,}387 < \dfrac{2\alpha}{45} < 0{,}388$. L'arrondi à 0,01 près de ce nombre est donc 0,39.

Une valeur approchée de la probabilité de tomber sur la fève en coupant le gâteau est 0,39. Cette probabilité est égale à 39 % à un pour cent près.

5. Il faudrait choisir une fève de plus petit diamètre.

Des calculs semblables avec une fève de diamètre 1,5 cm placée au même endroit montreraient qu'une telle fève conviendrait : on trouverait $\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{0{,}75}{8{,}25} = \dfrac{1}{11}$ puis $5{,}21 < \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{11}\right) < 5{,}22$ puis $0{,}231 < \dfrac{2\alpha}{45} < 0{,}232$, la probabilité de tomber sur la fève en coupant le gâteau serait voisine de 23 %, ce qui serait « dans les clous ».

On peut proposer au pâtissier de choisir une fève de 1,5 cm de diamètre.

Partie 2

1. La droite (*DE*) est confondue avec (*AD*) lorsque la droite (*BI*) est perpendiculaire à la droite (*AI*), c'est-à-dire lorsque *ABI* est rectangle en *I*.

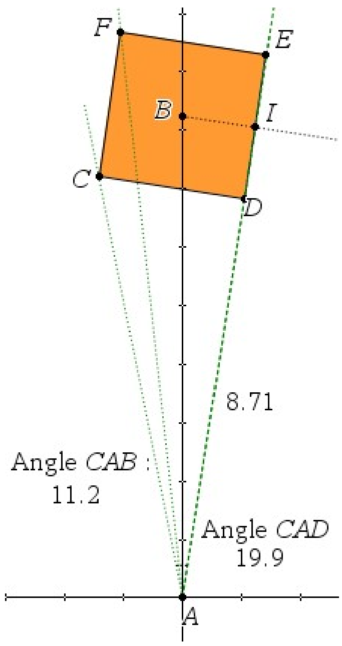
L'angle $\widehat{ABI}$ doit pour cela être le complémentaire de celui considéré dans la question 3 de la partie précédente, l'angle que nous avions noté α.

C'est l'angle dont le cosinus est égal à $\frac{5}{33}$, il est tel que : $81{,}29 > 90 - \alpha > 81{,}28$. Mais cette information ne semble pas être décisive. Notons plutôt que, dans cette circonstance, *A, D, I, E* sont alignés et (*CD*), étant parallèle à (*BI*), est perpendiculaire à (*AD*) : *ACD* est un triangle rectangle en *D*, propriété que nous allons exploiter.

2. (Traitée globalement).

L'objectif fixé par l'énoncé est « *d'estimer la probabilité de tomber directement sur la fève en coupant la galette en 8 parts identiques* ». Dans le présent contexte, pour estimer cette probabilité, il s'agit d'évaluer l'angle $\widehat{CAD}$, ce qui conforte l'idée de modifier délibérément la démarche préconisée par l'énoncé et de s'intéresser au triangle *ACD*.

Dans le triangle rectangle *ABI*, nous connaissons $AB = 8{,}25$ et $BI = 1{,}25$ et nous pouvons en déduire, en appliquant le théorème de Pythagore : $AI^2 = AB^2 - BI^2 = 8{,}25^2 - 1{,}25^2 = 66{,}5$ puis : $AI = \sqrt{66{,}5}$



Dans le triangle rectangle *ACD*, nous connaissons $CD = 2{,}5$ et aussi désormais :

$AD = AI - DI = \sqrt{66{,}5} - 1{,}25$.

L'angle $\widehat{CAD}$ a donc pour tangente : $\tan \widehat{CAD} = \frac{CD}{AD} = \frac{2{,}5}{\sqrt{66{,}5} - 1{,}25}$

La mesure en degrés γ de l'angle $\widehat{CAD}$ est le nombre dont le tangente est égale à $\frac{2{,}5}{\sqrt{66{,}5} - 1{,}25}$. La fonction « inverse tangente » d'une calculatrice réglée en degrés, indique : $19{,}90 < \tan^{-1}\left(\frac{2{,}5}{\sqrt{66{,}5} - 1{,}25}\right) = \gamma < 19{,}91$.

L'arrondi au dixième de ce nombre est 19,9.

Une valeur approchée au dixième près de la mesure γ en degrés de l'angle $\widehat{CAD}$ est 19,9.

On peut considérer le secteur angulaire d'ouverture d'angle 45 degrés dont un côté est la droite (AD) et contenant la fève. Lorsqu'on coupe la galette en huit, il y aura un et un seul coup de couteau dans ce secteur angulaire, dont on peut admettre que l'angle avec (AB) suit une loi uniforme dans l'intervalle $[0\ ;\ 45]$. On trouve la fève si cet angle est dans l'intervalle $[0\ ;\ \gamma]$.

La probabilité qu'il en soit ainsi est : $\dfrac{\gamma}{45} = \dfrac{\tan^{-1}\left(\dfrac{2{,}5}{\sqrt{66{,}5}-1{,}25}\right)}{45}$.

Une calculatrice indique que : $0{,}442 < \dfrac{\gamma}{45} < 0{,}443$. L'arrondi à 0,01 près de ce nombre est donc 0,44.

Une valeur approchée à 0,01 près de la probabilité de tomber sur la fève en coupant le gâteau est 0,44.

Cette probabilité est égale à 44 % à un pour cent près.

C'est dans cette position que le « risque » de tomber sur la fève est le plus petit …

NB : Pour mémoire, l'angle $\widehat{CBI}$ a pour mesure 135 degrés car il est somme d'un angle droit et d'un angle de base d'un triangle rectangle isocèle ; l'angle $\widehat{BAC}$ demandé dans l'énoncé (mais dont l'utilisation n'est pas indispensable) a pour mesure $\gamma - \alpha$, c'est-à-dire : $\tan^{-1}\left(\dfrac{2{,}5}{\sqrt{66{,}5}-1{,}25}\right) - \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{33}\right)$ et une calculatrice indique : $11{,}18 < \tan^{-1}\left(\dfrac{2{,}5}{\sqrt{66{,}5}-1{,}25}\right) - \sin^{-1}\left(\dfrac{5}{33}\right) < 11{,}19$.

Une valeur approchée à 0,1 près de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$ est 11,2.

3. E et C sont symétriques par rapport à (AB) lorsque A, D, B, F sont alignés. Dans cette position, la droite (AB) est en effet un axe de symétrie du carré $DEFC$ car confondue avec la diagonale (DF).

<table>
<tr>
<td>

Dans cette circonstance, ABE et ABC sont des triangles rectangles isométriques dont les côtés de l'angle droit sont : $BC = BE = 1{,}25\sqrt{2}$ et $AB = 8{,}25$.

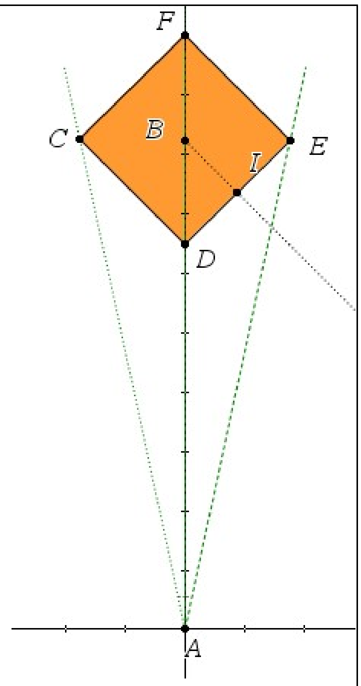
On en déduit la tangente des angles égaux $\widehat{BAE}$ et $\widehat{BAC}$:

$\tan \widehat{BAC} = \dfrac{1{,}25\sqrt{2}}{8{,}25} = \dfrac{5\sqrt{2}}{33}$

La mesure β commune des angles $\widehat{BAE}$ et $\widehat{BAC}$ est le nombre dont la tangente est égale à $\dfrac{5\sqrt{2}}{33}$.

La fonction « inverse tangente » d'une calculatrice, réglée en degrés, indique : $12{,}09 < \tan^{-1}\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{33}\right) < 12{,}10$. L'arrondi au dixième de ce nombre est 12,1.

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

On peut considérer le secteur angulaire d'ouverture d'angle 45° dont la bissectrice est la droite (AB). Lorsqu'on coupe la galette en huit, il y aura un et un seul coup de couteau dans ce secteur angulaire, dont on peut admettre que l'angle avec (AB) suit une loi uniforme dans l'intervalle $[-22{,}5\ ;\ 22{,}5]$. On trouve la fève si cet angle est dans l'intervalle $[-\beta\ ;\ \beta]$.

La probabilité qu'il en soit ainsi est : $\dfrac{2\beta}{45}$.

Une calculatrice indique que : $0{,}537 < \dfrac{2\beta}{45} < 0{,}538$. L'arrondi à 0,01 près de ce nombre est donc 0,54.

Une valeur approchée à 0,01 près de la probabilité de tomber sur la fève en coupant le gâteau est 0,54.
Cette probabilité est égale à 54 % à un pour cent près.

C'est dans cette position que le « risque » de tomber sur la fève est le plus grand.