OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

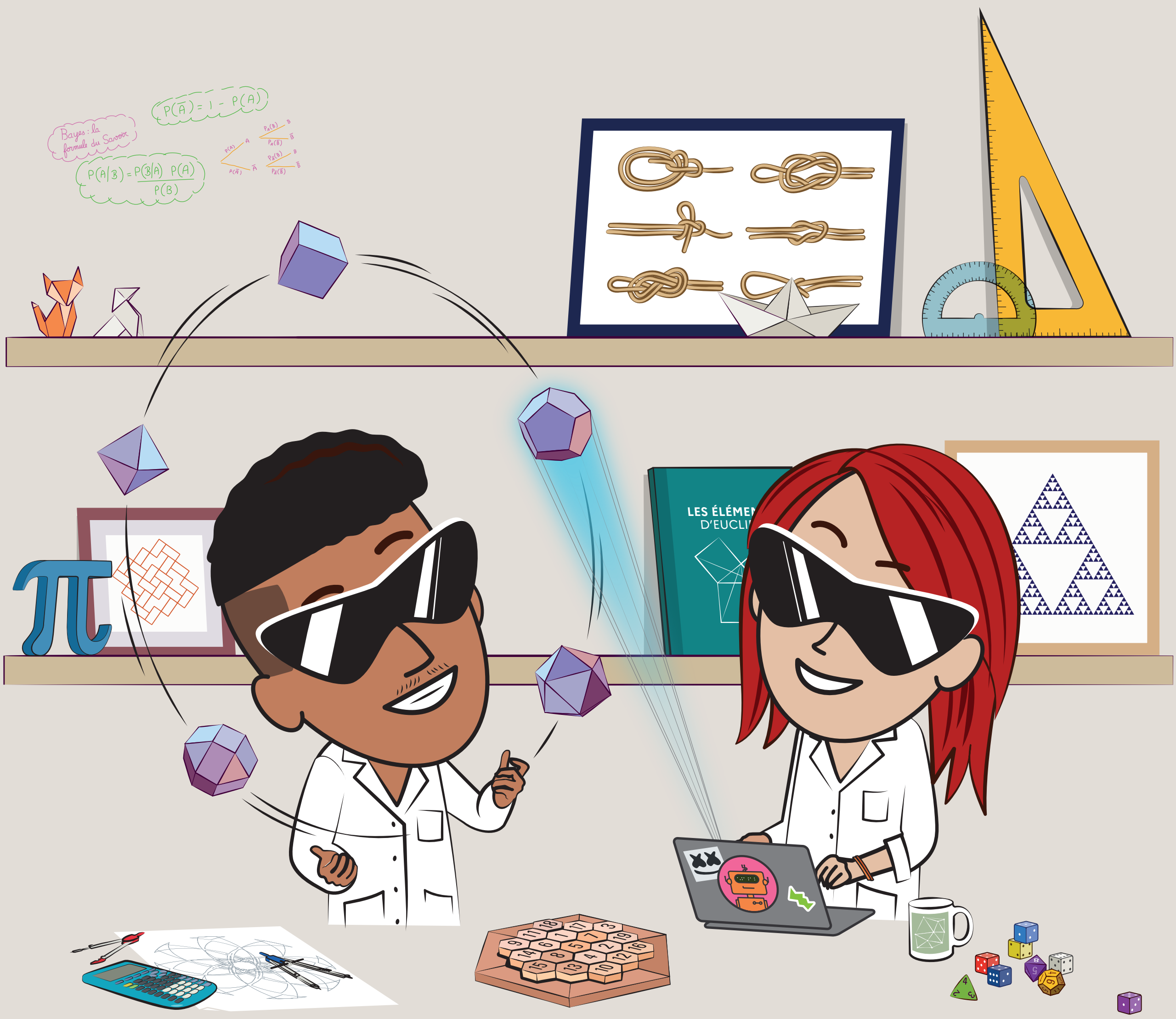
ACADÉMIE DE ROUEN
2023

SUJET DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

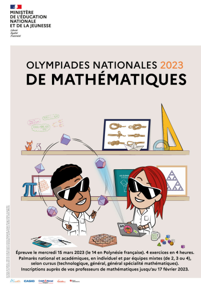
OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023



Exercices nationaux (2h)

Candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques

<u>7 indications avant de commencer</u> :

1. Pour cette partie, la recherche est individuelle.
2. Le sujet contient 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.
3. La calculatrice est autorisée conformément à la règlementation en vigueur.
4. En lieu et place de votre nom, vous porterez sur votre copie le numéro de candidat qui vous sera fourni par l'établissement.
5. Afin de faciliter le travail de correction, il est demandé de rédiger sur des feuilles distinctes les solutions des exercices 1 et 2 (un en-tête par exercice).
6. Si vous n'arrivez pas à formuler une réponse complète, il est néanmoins conseillé d'exposer le bilan des recherches que vous avez pu entreprendre.
7. Si vous repérez ce qui vous semble une erreur d'énoncé, indiquez-le sur votre copie et expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre et poursuivez votre composition.

Exercice 1

PLUS FORT !

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un joueur dispose de n cartes numérotées de 1 à n. Il les mélange puis note dans l'ordre la suite des numéros des cartes obtenue. On appelle *liste* la suite des numéros ainsi observés.
Le nombre n sera appelé *longueur* de la liste.
Par exemple, avec $n = 8$, une liste possible est $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$.
Avec une liste donnée, le joueur marque un point chaque fois que le numéro d'une carte est supérieur à celui de la carte précédente.
Par exemple avec la liste $L = [2, \mathbf{5}, \mathbf{7}, 6,1, \mathbf{8}, 4,3]$, le joueur marque 3 points.
On appelle *score* le nombre de points marqués par le joueur. Le score précédent est donc 3.

1. Quelques exemples

a. Donner un autre exemple de liste de longueur 8 et de score 3.

b. Donner toutes les listes de longueur 3 possibles ainsi que les scores correspondants.

2. Écrire sur votre copie la syntaxe d'une fonction Python qui, prenant en argument une liste L et sa longueur n, renvoie le score de la liste L.

On revient au cas général ainsi qu'à des considérations théoriques.

3. Démontrer que tout score est compris entre 0 et $n-1$. Donner une liste dont le score vaut 0 et une liste dont le score vaut $n-1$.

4. Soit k un entier compris entre 1 et $n-2$.

a. Démontrer qu'il existe une liste de longueur n et de score k.

b. Peut-on trouver deux listes de longueur n et de score k ?

On note désormais $L_n(s)$ le nombre de listes de longueur n et de score s.

5. Déterminer $L_n(0)$ et $L_n(n-1)$.

6. *Une relation de récurrence*

a. Déterminer $L_3(0), L_3(1)$ et $L_3(2)$. Comment insérer dans la liste $[3,1,2]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score vaut encore 1 ?

b. Comment insérer dans la liste $[3,2,1]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score reste nul ?

c. Vérifier que $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$L_{n+1}(1) = 2L_n(1) + nL_n(0).$$

e. Pour tout n et pour tout entier naturel k non nul, exprimer $L_{n+1}(k)$ à l'aide de $L_n(k)$ et $L_n(k-1)$.

f. Dresser un tableau des valeurs de $L_n(k)$ pour $n \in \{3, 4, 5\}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 2

UNE DESCENTE INFINIE

Dans tout l'exercice, α désigne un entier naturel supérieur ou égal à 4.

On considère l'équation (E) ci-dessous dont l'inconnue est le triplet d'entiers relatifs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$.

$$\text{(E)} : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$$

Le but de l'exercice est de démontrer que le seul triplet dans $\mathbf{Z}^3$ solution de (E) est $(0,0,0)$.

Partie 1

Soient b et c deux réels. On considère la fonction polynôme P de **R** dans **R** définie par $P(x) = x^2 + bx + c$. Un réel r tel que $P(r) = 0$ est appelé *racine* de P. On suppose dans cette partie que P admet deux racines distinctes, $r_1$et r_2. Ainsi, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ pour tout réel x.

1. Exprimer b et c en fonction de r_1 et r_2.

2. On suppose ici $b \leq 0$ et $c \geq 0$
Que peut-on dire du signe de r_1 et r_2 ?

Partie 2

1. ***a.*** On suppose que le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$ est solution de l'équation (E). Montrer que $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de l'équation (E).

b. En déduire que, s'il existe un triplet d'entiers relatifs différent de $(0,0,0)$ solution de l'équation (E), alors il existe un triplet d'entiers naturels différent de $(0,0,0)$ solution de l'équation (E).

2. Si le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$ est solution de l'équation (E), que dire du triplet (x_2, x_1, x_3) ?

3. En déduire que, si l'équation (E) admet une solution dans $\mathbf{Z}^3$ différente du triplet $(0,0,0)$, alors elle admet une solution (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbf{N}^3$ différente du triplet $(0,0,0)$ et telle que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Partie 3

On suppose donc dans cette partie qu'il existe un triplet d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) différent de $(0,0,0)$ solution de (E) et tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. On fixe un tel triplet.

1. Démontrer que $x_1 > 0$.

2. On définit la fonction Q de **R** dans **R** par $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 x_2 x + x_1^2 + x_2^2$.
Un réel r tel que $Q(r) = 0$ est appelé *racine* de Q.

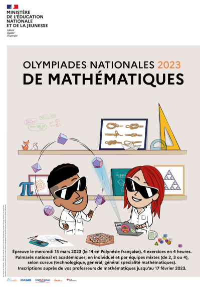
a. Soit y un réel. Montrer que (x_1, x_2, y) est solution de (E) si, et seulement si, y est une racine de Q.
b. Indiquer une première racine de Q à partir des données de l'énoncé.
c. Vérifier que $Q(x_2) = (3 - \alpha x_1)x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)$ et en déduire que $Q(x_2) < 0$.
d. Quel est le signe de $Q(0)$?
e. Démontrer que Q a deux racines distinctes : celle donnée précédemment et une autre notée y ; ranger dans l'ordre croissant les nombres $0, x_2$ et x_3 et y et justifier qu'ils sont tous distincts.
f. Montrer que (x_1, x_2, y) est un triplet d'entiers naturels solution de l'équation (E).

3. Que donne le raisonnement de la question 2 en remplaçant le triplet solution (x_1, x_2, x_3) par le triplet constitué de x_1, x_2, y rangés dans l'ordre croissant ?

4. Expliquer comment aboutir à une absurdité et conclure quant aux triplets d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

5. Démontrer le résultat suivant :
« Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha > n \geq 2$.
L'équation $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \alpha x_1 \ldots x_n$ d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n'admet pas de n-uplet d'entiers relatifs solution autre que $(0,0, \ldots, 0)$. »

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté Égalité Fraternité



ACADÉMIE DE NORMANDIE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Exercices académiques (2h)

Candidats de la voie générale ayant choisi l'enseignement de spécialité mathématiques

<u>7 indications avant de commencer</u> :

- Pour cette partie, la recherche se fait en équipe.
- Le sujet contient 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.
- La calculatrice est autorisée conformément à la règlementation en vigueur.
- En lieu et place de votre nom, vous porterez sur votre copie le numéro du groupe et les numéros de candidats des membres de votre groupe.
- Afin de faciliter le travail de correction, il est demandé de rédiger sur des feuilles distinctes les solutions des exercices 3 et 4 (un en-tête par exercice). Bien penser à ajouter l'annexe de l'exercice 4 (page 7/7).
- Si vous n'arrivez pas à formuler une réponse complète, il est néanmoins conseillé d'exposer le bilan des recherches que vous avez pu entreprendre.
- Si vous repérez ce qui vous semble une erreur d'énoncé, indiquez-le sur votre copie et expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre et poursuivez votre composition.

Exercice 3

Carrés de Dirichlet

Un carré de Dirichlet est une grille carrée de nombres où ceux des cases du « carré intérieur » sont la moyenne de ceux écrits dans les **quatre cases** voisines (**en haut, en bas, à droite, à gauche**).

Il est dit de taille n si le carré intérieur est constitué de n lignes et n colonnes (n entier naturel non nul).

Les carrés de Dirichlet constituent une modélisation simplifiée du problème de la propagation de la chaleur dans les pièces d'une maison.

Partie 1 : ***les 5 questions suivantes sont indépendantes***.

1. Vérifiez que la grille 1 est bien un carré de Dirichlet de taille 3.
On se limitera à vérifier les nombres des trois cases grisées et on admettra que les six autres du carré intérieur sont exactes.

	6	0	4	
5	4,5	3	4	5
5	4	3,5	4	5
3	3	3	3,5	4
	2	2	3	

grille 1

2. Compléter la grille 2 afin qu'elle devienne un carré de Dirichlet.

	…	…	
…	1	1	…
…	1	1	…
	…	…	

grille 2

3. On veut déterminer quatre réels a, b, c et d afin que la grille 3 devienne un carré de Dirichlet.
a. Vérifier que 4a = 1 + b + c.
b. Déterminer des valeurs possibles pour a, b, c et d.

	1	0	
0	a	b	0
0	c	d	0
	0	0	

grille 3

c. En déduire sans calcul comment compléter la grille 4 afin qu'elle devienne un carré de Dirichlet.
d. Combien d'autres carrés de Dirichlet pourrait-on ainsi obtenir sans calcul supplémentaire ?

	0	1	
0	…	…	0
0	…	…	0
	0	0	

grille 4

4. La grille 5 est un carré de Dirichlet de « tour extérieur » la liste [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8].
a. Construire un carré de Dirichlet ayant le même « carré intérieur » mais un autre « tour extérieur » que celui de la grille 5.
b. Combien de carrés de Dirichlet différents peut-on construire ayant le même « carré intérieur » que celui de la grille 5 mais d'autres « tours extérieurs » avec **des entiers naturels** ?

	1	2	
8	4,5	3,5	3
7	5,5	4,5	4
	6	5	

grille 5

5. Soit G la plus grande des valeurs d'un carré de Dirichlet de taille 2.

a. Montrer que si G est située dans le « carré intérieur » alors toutes les valeurs du carré de Dirichlet sont égales à G.

b. On suppose que le carré a au moins **deux valeurs différentes sur son « tour extérieur ».**

Montrer que la plus grande valeur d'un tel carré de Dirichlet est nécessairement sur son « tour extérieur ».
(On admettra qu'il en est de même pour la plus petite des valeurs d'un tel carré de Dirichlet)

Partie 2 : une technique experte

L'objectif de cette partie est de déterminer des réels a, b, c et d pour que la grille M soit un carré de Dirichlet.

	14	6	
10	a	b	0
5	c	d	8
	7	4	

grille M

1. A, B, C et D désignent des réels.
   A partir des grilles M et N, on a construit la grille 6 :

	14	6	
10	a	b	0
5	c	d	8
	7	4	

grille M

	12	16	
1	A	B	10
25	C	D	18
	13	14	

grille N

	26	22	
11	a+A	b+B	10
30	c+C	d+D	26
	20	18	

grille 6

a. Comment la grille 6 a-t-elle été construite à partir des grilles M et N ?

b. Montrer que si les grilles M et N sont des carrés de Dirichlet, alors la grille 6 est aussi un carré de Dirichlet.

2. Soit t un réel, démontrer que si la grille M est un carré de Dirichlet, il en est de même de la grille ci-contre :

	14t	6t	
10t	at	bt	0
5t	ct	dt	8t
	7t	4t	

3. En utilisant les carrés de Dirichlet de la partie 1, questions 3, déduire des questions précédentes que a = 9.
Déterminer de même les valeurs de b, c et d.

	14	6	
10	a	b	0
5	c	d	8
	7	4	

4. Imaginons qu'il existe d'autres nombres A, B, C et D permettant de compléter la grille M pour en faire un carré de Dirichlet (grille P).

	14	6	
10	9	b	0
5	c	d	8
	7	4	

grille M

	14	6	
10	A	B	0
5	C	D	8
	7	4	

grille P

	0	0	
0	9-A	b-B	0
0	c-C	d-D	0
	0	0	

grille 10

a. Justifier rapidement que si les grilles M et P sont des carrés de Dirichlet alors la grille 10 est aussi un carré de Dirichlet.

b. Que peut-on en déduire pour la grille 10 ?

c. Que peut-on en déduire sur le nombre de carrés de Dirichlet avec la liste [14; 6 ; 0; 8; 4; 7; 5;10] pour « tour extérieur » ?

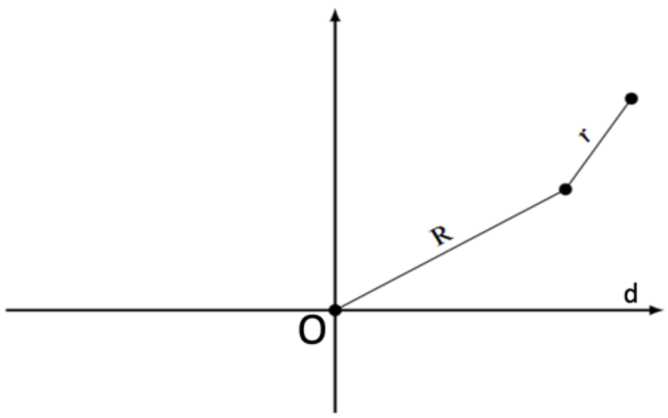
Exercice 4

Représentations du mouvement d'un robot.

On considère un robot constitué de deux tiges mises bout à bout qui pivotent à volonté parallèlement à la surface d'un plan autour d'axes perpendiculaires à ce plan.
La première tige est plus longue que la deuxième, laquelle est fixée au bout de la première.

Pour représenter le mouvement du robot, on se donne un repère orthonormé dont on place l'origine sur l'axe de rotation du premier bras.

Mesurées dans l'unité du repère, la première tige est de longueur R et la deuxième de longueur r.
Ce robot peut dessiner à l'aide d'un feutre placé au bout de la deuxième tige. Ce feutre a deux modes : écriture « activée » et écriture « non activée ».
Le schéma ci-dessous modélise la situation sans figuration de l'unité du repère :



Partie 1 : Représentation du mouvement dans un repère cartésien.

Aucune justification n'est demandée pour les questions 1, 2 et 3.

Le feutre est en position écriture **« activée ».**

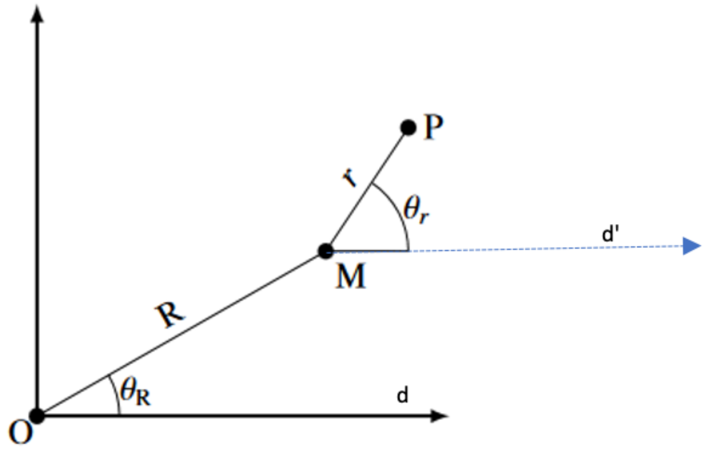
1. La tige de longueur R est fixe, dans la position du schéma ci-dessus.
La tige de longueur r effectue un tour complet autour de son axe.
Représenter sur le schéma 1, en annexe, ce que le robot trace durant ce mouvement.

2. La tige de longueur r est fixe, dans la position du schéma ci-dessus.
La tige de longueur R effectue un tour complet autour de son axe.
Représenter sur le schéma 2, en annexe, ce que le robot trace durant ce mouvement.

3. Les deux tiges tournent de façon indépendante.
Représenter sur le schéma 3, en annexe, toute la zone que pourrait colorier le robot.

Partie 2 : un peu de géométrie analytique

Le feutre est en position écriture **« activée »** et les deux tiges tournent de façon indépendante.
A partir des demi-droites parallèles d et d', on introduit les angles θ_R et θ_r représentés ci-dessous (de mesure en radians).



1. Justifier que les coordonnées du point M sont $(\mathrm{R}\cos(\theta_\mathrm{R}); \mathrm{R}\sin(\theta_R))$.

2. Justifier de même que les coordonnées du point P sont $(\mathrm{R}\cos(\theta_R) + \mathrm{r}\cos(\theta_r)\,; \mathrm{R}\sin(\theta_R) + \mathrm{r}\sin(\theta_r))$.

3. Exprimer OP^2 en fonction de R, r, θ_R et θ_r sous la forme d'une somme de 3 termes.

On pourra se rappeler l'identité « $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ » et admettre que pour tous réels a et b, on a :

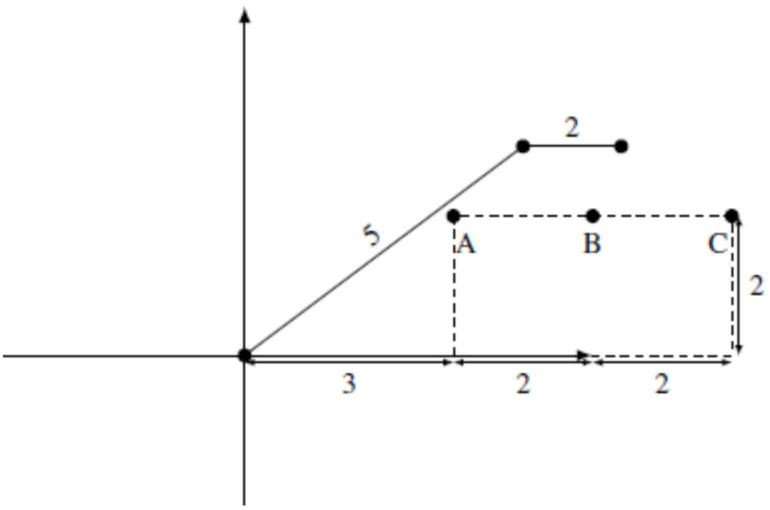
$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

4. En déduire que : $\mathrm{R} - \mathrm{r} \leq \mathrm{OP} \leq \mathrm{R} + \mathrm{r}$

5. En admettant que OP peut prendre toute valeur entre $\mathrm{R} - \mathrm{r}$ et $\mathrm{R} + \mathrm{r}$, quel résultat retrouve-t-on par ce calcul ?

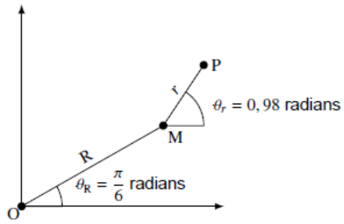
6. Application

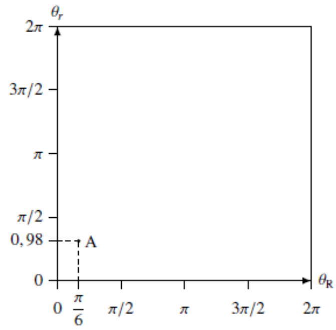
Le robot est désormais équipé d'une pince plutôt que d'un feutre.
Justifier pour chacun des objets A, B et C s'ils peuvent ou non être saisis par le robot.



Partie 3 : repérage par les angles

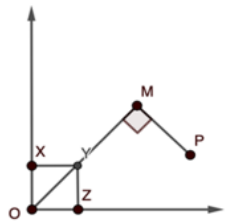
Les longueurs des tiges étant préalablement fixées, seuls les angles θ_{R} et θ_r peuvent varier. Pour simplifier, on considérera qu'ils peuvent prendre toutes les valeurs de 0 à 2π radians.
En P, on rééquipe le robot d'un feutre en position écriture **« activée ».**
Considérons le carré C proposé ci-contre à droite.





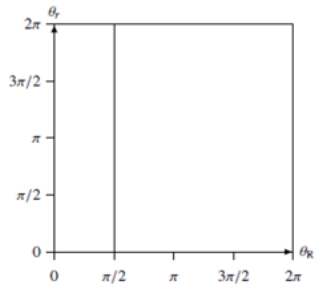
A chaque position du point P dans le plan correspond le point de coordonnées $(\theta_{\mathrm{R}}; \theta_r)$ dans le carré C.
A chaque point de coordonnées $(\theta_{\mathrm{R}}; \theta_r)$ du carré C correspond une position de P dans le plan.
Par exemple, le point A sur le schéma de droite correspond à la position du robot du schéma de gauche.

1. M est sur la diagonale du carré OXYZ.
   Compléter le schéma 4 de l'annexe avec le point de C correspondant à cette position du robot (on le notera B).
   Attention : $\theta_r \neq \frac{3\pi}{2}$.

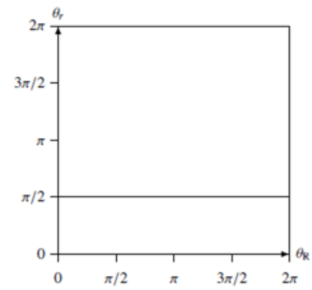


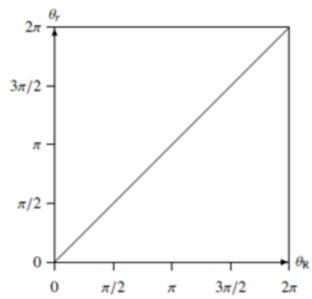
2. Citer une position du robot qui correspond à plusieurs points du carré C.

3. Montrer que le feutre du robot trace un cercle lorsque la représentation de son mouvement dans C est la courbe ci-contre.
   On précisera le centre et le rayon du cercle.



4. Quel est le dessin réalisé par le robot lorsque son mouvement est représenté dans C par la courbe ci-contre ?
   (Aucune justification n'est attendue, mais outre la nature du dessin, on donnera ses éléments caractéristiques)





5. Que peut-on dire des deux bras du robot quand son mouvement est représenté par la courbe ci-contre ? Bien justifier.
   En déduire le dessin réalisé par le robot.

6. Le robot a tracé le cercle de centre (0;0) dans le repère initial et de rayon $\mathrm{R}-r$.
   Déterminer la courbe obtenue dans C et la représenter sur le schéma 5 de l'annexe.
   Indication : on pourra commencer par exprimer l'angle θ_r en fonction de l'angle θ_{R}.

GROUPE : …………………… et membres : ……………………………………………….

ANNEXE (à remettre avec votre copie)

Schéma 1 (partie 1, question 1)

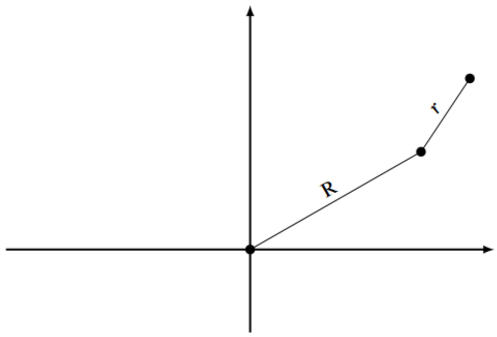


Schéma 2 (partie 1, question 2)

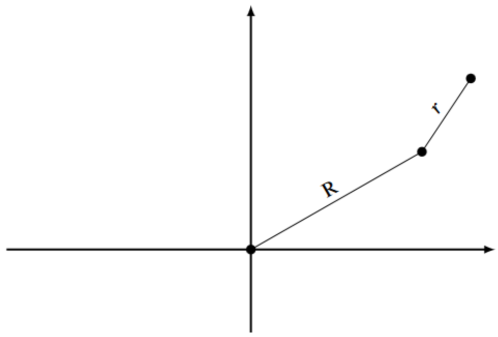


Schéma 3 (partie 1, question 3)

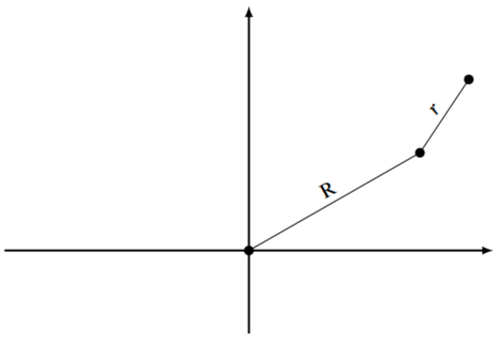


Schéma 4

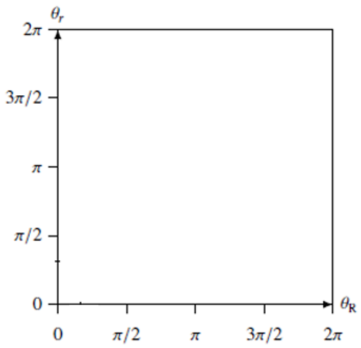
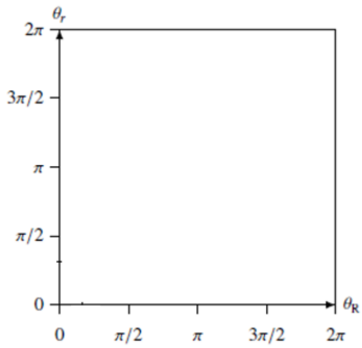


Schéma 5



MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Exercices nationaux (2h)

Candidats de la voie générale n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques
Candidats de la voie technologique

7 indications avant de commencer :

1. Pour cette partie, la recherche est individuelle.
2. Le sujet contient 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.
3. La calculatrice est autorisée conformément à la règlementation en vigueur.
4. En lieu et place de votre nom, vous porterez sur votre copie le numéro de candidat qui vous sera fourni par l'établissement.
5. Afin de faciliter le travail de correction, il est demandé de rédiger sur des feuilles distinctes les solutions des exercices 1 et 2 (un en-tête par exercice).
6. Si vous n'arrivez pas à formuler une réponse complète, il est néanmoins conseillé d'exposer le bilan des recherches que vous avez pu entreprendre.
7. Si vous repérez ce qui vous semble une erreur d'énoncé, indiquez-le sur votre copie et expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre et poursuivez votre composition.

Exercice 1

PLUS FORT !

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un joueur dispose de n cartes numérotées de 1 à n. Il les mélange puis note dans l'ordre la suite des numéros des cartes obtenue. On appelle *liste* la suite des numéros ainsi observés.
Le nombre n sera appelé *longueur* de la liste.
Par exemple, avec $n = 8$, une liste possible est $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$.
Avec une liste donnée, le joueur marque un point chaque fois que le numéro d'une carte est supérieur à celui de la carte précédente.
Par exemple avec la liste $L = [2, \mathbf{5}, \mathbf{7}, 6,1, \mathbf{8}, 4,3]$, le joueur marque 3 points.
On appelle *score* le nombre de points marqués par le joueur. Le score précédent est donc 3.

1. Quelques exemples

a. Donner un autre exemple de liste de longueur 8 et de score 3.

b. Donner toutes les listes de longueur 3 possibles ainsi que les scores correspondants.

2. Écrire sur votre copie la syntaxe d'une fonction Python qui, prenant en argument une liste L et sa longueur n, renvoie le score de la liste L.

On revient au cas général ainsi qu'à des considérations théoriques.

3. Démontrer que tout score est compris entre 0 et $n-1$. Donner une liste dont le score vaut 0 et une liste dont le score vaut $n-1$.

4. Soit k un entier compris entre 1 et $n-2$.

a. Démontrer qu'il existe une liste de longueur n et de score k.

b. Peut-on trouver deux listes de longueur n et de score k ?

On note désormais $L_n(s)$ le nombre de listes de longueur n et de score s.

5. Déterminer $L_n(0)$ et $L_n(n-1)$.

6. *Une relation de récurrence*

a. Déterminer $L_3(0), L_3(1)$ et $L_3(2)$. Comment insérer dans la liste $[3,1,2]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score vaut encore 1 ?

b. Comment insérer dans la liste $[3,2,1]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score reste nul ?

c. Vérifier que $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$L_{n+1}(1) = 2L_n(1) + nL_n(0).$$

e. Pour tout n et pour tout entier naturel k non nul, exprimer $L_{n+1}(k)$ à l'aide de $L_n(k)$ et $L_n(k-1)$.

f. Dresser un tableau des valeurs de $L_n(k)$ pour $n \in \{3, 4, 5\}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 2

CODES DÉTECTEURS ET CORRECTEURS

Question préliminaire

1. Soient a et b deux nombres entiers.
Montrer que le nombre $a+b$ est pair si, et seulement si, a et b sont de la même parité.

Codage d'un message

Un *message* est ici un nombre M codé sous la forme d'un quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) où x_1, x_2, x_3 et x_4 sont des « bits », c'est-à-dire des nombres ne pouvant valoir que 0 ou 1. Le nombre M que représente le quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4), appelé aussi demi-octet *d'information*, vaut par définition :

$$M = x_1 + 2 \times x_2 + 4 \times x_3 + 8 \times x_4$$

Par exemple, le code $(0{,}0{,}1{,}1)$ représente le nombre $M = 12$ puisque $12 = 0 + 2 \times 0 + 4 \times 1 + 8 \times 1$.

2. ***a.*** Quel est le message M que code le quadruplet $(1{,}0{,}0{,}1)$?
b. Trouver un code qui représente $M = 10$. Trouver un code qui représente $M = 15$.
c. Peut-on trouver un code pour représenter $M = 20$?
d. Quels sont les différents messages possibles ?

Un message est parfois altéré (on dit aussi « corrompu ») lors de sa transmission du fait d'un matériel défectueux ou de signaux parasites. Des erreurs modifient des bits, un 0 se transformant en 1 ou un 1 se transformant en 0. Aussi des techniques permettant de détecter et de corriger ces anomalies ont-elles été mises au point. Ceci fait l'objet de la suite.

Codage d'un message avec protection contre les erreurs

3. ***Principe du bit de parité***

Le code (x_1, x_2, x_3, x_4) est transformé en le quintuplet (x_1, x_2, x_3, x_4, y), dont le dernier bit y, dit de *parité*, vaut 0 si la somme $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ est paire, et 1 si elle est impaire. C'est ce quintuplet qui est transmis, il représente le même message M que le code (x_1, x_2, x_3, x_4), à savoir $M = x_1 + 2 \times x_2 + 4 \times x_3 + 8 \times x_4$. Les bits dits d'information demeurent x_1, x_2, x_3, x_4 et le bit de parité, y, est transmis avec les plus grandes précautions.
Par exemple, pour transmettre le nombre $M = 12$ correspondant à $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ et $x_4 = 1$, on calcule d'abord $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, qui est pair ; on pose donc $y = 0$ et on émet le quintuplet $(0{,}0{,}1{,}1{,}0)$.

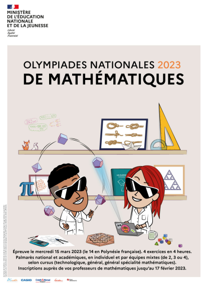
a. Quel est le bit y de parité associé au quadruplet $(1{,}0{,}0{,}1)$ codant le nombre $M = 9$ à l'émission ?
b. On reçoit le quintuplet $(1{,}1{,}0{,}1{,}0)$ dont on suppose le bit de parité (le cinquième, donc) fiable. Justifier que l'information véhiculée par le code a été corrompue.
c. Si on est sûr du bit de parité, peut-on détecter une altération, et peut-on la localiser
- dans le cas où un seul bit d'information est faux à l'arrivée ?
- dans le cas où deux bits d'information sont faux à l'arrivée ?

4. ***Principe des bits de contrôle***

Le code (x_1, x_2, x_3, x_4) est transformé en l'heptuplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$, où
$y_1 = 0$ si $x_1 + x_2 + x_3$ est pair, $y_1 = 1$ sinon ; $y_2 = 0$ si $x_2 + x_3 + x_4$ est pair, $y_2 = 1$ sinon ; $y_3 = 0$ si $x_1 + x_3 + x_4$ est pair, $y_3 = 1$ sinon. Les bits dits d'information demeurent x_1, x_2, x_3, x_4.
L'heptuplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$ code toujours le message $M = x_1 + 2 \times x_2 + 4 \times x_3 + 8 \times x_4$.

a. Quels sont les bits y_1, y_2, y_3, dits de *contrôle*, associés au quadruplet $(1{,}0{,}0{,}1)$ codant le nombre $M = 9$?
b. Pourquoi est-on certain que l'heptuplet reçu $(1{,}1{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1)$ résulte d'une altération de transmission dans le cas où on est sûr des bits de contrôle ?
c. Si on est sûr de la justesse des bits de contrôle, dans l'hypothèse où exactement un des quatre bits d'information est erroné, pourquoi peut-on détecter qu'il y a eu une altération et pourquoi peut-on la localiser (et donc la corriger) ? Peut-on détecter l'erreur quand exactement deux des quatre bits d'information sont erronés ?

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté Égalité Fraternité



ACADÉMIE DE NORMANDIE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Exercices académiques (2h)

Candidats de la voie générale n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité mathématiques

Candidats de la voie technologique

__**7 indications avant de commencer**__ **:**

1. Pour cette partie, la recherche se fait en équipe.
2. Le sujet contient 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
3. La calculatrice est autorisée conformément à la règlementation en vigueur.
4. En lieu et place de votre nom, vous porterez sur votre copie le numéro du groupe et les numéros de candidats des membres de votre groupe.
5. Afin de faciliter le travail de correction, il est demandé de rédiger sur des feuilles distinctes les solutions des exercices 3 et 4 (un en-tête par exercice).
6. Si vous n'arrivez pas à formuler une réponse complète, il est néanmoins conseillé d'exposer le bilan des recherches que vous avez pu entreprendre.
7. Si vous repérez ce qui vous semble une erreur d'énoncé, indiquez-le sur votre copie et expliquant les initiatives que vous avez été amené à prendre et poursuivez votre composition.

Exercice 3
Carrés de Dirichlet

Un carré de Dirichlet est une grille carrée de nombres où ceux des cases du « carré intérieur » sont la moyenne de ceux écrits dans les **quatre cases** voisines (**en haut, en bas, à droite, à gauche**).

Il est dit de taille n si le carré intérieur est constitué de n lignes et n colonnes (n entier naturel non nul).

Les carrés de Dirichlet constituent une modélisation simplifiée du problème de la propagation de la chaleur dans les pièces d'une maison.

Partie 1 : ***les 5 questions suivantes sont indépendantes***.

1. Vérifiez que la grille 1 est bien un carré de Dirichlet de taille 3.
On se limitera à vérifier les nombres des trois cases grisées et on admettra que les six autres du carré intérieur sont exactes.

	6	0	4	
5	4,5	3	4	5
5	4	3,5	4	5
3	3	3	3,5	4
	2	2	3	

grille 1

2. Compléter la grille 2 afin qu'elle devienne un carré de Dirichlet.

	…	…	
…	1	1	…
…	1	1	…
	…	…	

grille 2

3. On veut déterminer quatre réels a, b, c et d afin que la grille 3 devienne un carré de Dirichlet.
a. Vérifier que 4a = 1 + b + c.
b. Déterminer des valeurs possibles pour a, b, c et d.

	1	0	
0	a	b	0
0	c	d	0
	0	0	

grille 3

c. En déduire sans calcul comment compléter la grille 4 afin qu'elle devienne un carré de Dirichlet.
d. Combien d'autres carrés de Dirichlet pourrait-on ainsi obtenir sans calcul supplémentaire ?

	0	1	
0	…	…	0
0	…	…	0
	0	0	

grille 4

4. La grille 5 est un carré de Dirichlet de « tour extérieur » la liste [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8].
a. Construire un carré de Dirichlet ayant le même « carré intérieur » mais un autre « tour extérieur » que celui de la grille 5.
b. Combien de carrés de Dirichlet différents peut-on construire ayant le même « carré intérieur » que celui de la grille 5 mais d'autres « tours extérieurs » avec **des entiers naturels** ?

	1	2	
8	4,5	3,5	3
7	5,5	4,5	4
	6	5	

grille 5

5. Soit G la plus grande des valeurs d'un carré de Dirichlet de taille 2.

a. Montrer que si G est située dans le « carré intérieur » alors toutes les valeurs du carré de Dirichlet sont égales à G.

b. On suppose que le carré a au moins **deux valeurs différentes sur son « tour extérieur ».**

Montrer que la plus grande valeur d'un tel carré de Dirichlet est nécessairement sur son « tour extérieur ».
(On admettra qu'il en est de même pour la plus petite des valeurs d'un tel carré de Dirichlet)

Partie 2 : une technique experte

L'objectif de cette partie est de déterminer des réels a, b, c et d pour que la grille M soit un carré de Dirichlet.

	14	6	
10	a	b	0
5	c	d	8
	7	4	

grille M

1. A, B, C et D désignent des réels.
   A partir des grilles M et N, on a construit la grille 6 :

	14	6	
10	a	b	0
5	c	d	8
	7	4	

grille M

	12	16	
1	A	B	10
25	C	D	18
	13	14	

grille N

	26	22	
11	a+A	b+B	10
30	c+C	d+D	26
	20	18	

grille 6

a. Comment la grille 6 a-t-elle été construite à partir des grilles M et N ?

b. Montrer que si les grilles M et N sont des carrés de Dirichlet, alors la grille 6 est aussi un carré de Dirichlet.

2. Soit t un réel, démontrer que si la grille M est un carré de Dirichlet, il en est de même de la grille ci-contre :

	14t	6t	
10t	at	bt	0
5t	ct	dt	8t
	7t	4t	

3. En utilisant les carrés de Dirichlet de la partie 1, questions 3c et 3d, déduire des questions précédentes que a = 9.
Déterminer de même les valeurs de b, c et d.

	14	6	
10	a	b	0
5	c	d	8
	7	4	

4. Imaginons qu'il existe d'autres nombres A, B, C et D permettant de compléter la grille M pour en faire un carré de Dirichlet (grille P).

	14	6	
10	9	b	0
5	c	d	8
	7	4	

grille M

	14	6	
10	A	B	0
5	C	D	8
	7	4	

grille P

	0	0	
0	9-A	b-B	0
0	c-C	d-D	0
	0	0	

grille 10

a. Justifier rapidement que si les grilles M et P sont des carrés de Dirichlet alors la grille 10 est aussi un carré de Dirichlet.

b. Que peut-on en déduire pour la grille 10 ?

c. Que peut-on en déduire sur le nombre de carrés de Dirichlet avec la liste [14; 6 ; 0; 8; 4; 7; 5;10] pour « tour extérieur » ?

Exercice 4

Des moyennes dans un autre contexte

Dans cet exercice, les notes sont des **entiers** compris entre 0 et 20 et tous les devoirs ont le même coefficient.

1. Paul veut calculer sa moyenne annuelle.

Il a eu deux devoirs notés 15, douze devoirs notés 8 et sept autres devoirs notés entre 9 et 14.

La moyenne des sept autres devoirs notés entre 9 et 14 est 12.

Déterminer sa moyenne annuelle.

2. Gwénaëlle a eu cinq devoirs notés 7, six devoirs notés 9, trois devoirs notés 10, quatre devoirs notés 12, un devoir noté 13 et d'autres devoirs notés 15.

Sachant que sa moyenne annuelle est 10, déterminer le nombre de notes égales à 15.

3. Yohann a eu 15 pour note maximale et 8 pour note minimale. Sa moyenne annuelle est 10.

S'il fait la moyenne de ses notes autres que 15 et 8, il trouve 12.

Soit *x* le nombre de devoirs dont la note est 15, *y* le nombre de devoirs dont la note est 8 et z le nombre de devoirs dont la note est comprise entre 8 et 15.

a) Montrer que $5x = 2(y - z)$.
b) En déduire que *x* est nombre pair et que *y* est supérieur à 6.

4. a. Les notes de Pierre à ses devoirs sont comprises entre 6 et 15.

- Il a eu exactement six devoirs notés entre 7 et 14.
- S'il fait la moyenne de ces six notes (comprises entre 7 et 14), il obtient 12.
- Le nombre de ses devoirs notés 6 est le double du nombre de ses devoirs notés 15.

Exprimer la moyenne de Pierre en fonction d'une seule inconnue *x* de votre choix que vous préciserez.

b. Les notes de Sophie à ses devoirs sont comprises entre 6 et 15.

- Elle a eu exactement neuf devoirs notés entre 7 et 14.
- Si elle fait la moyenne de ces neuf notes (comprises entre 7 et 14), elle obtient 12.

Pierre et Sophie constatent que le nombre de devoirs notés 15 de Sophie est le même que le nombre de devoirs notés 6 de Pierre et que le nombre de devoirs notés 6 de Sophie est le même que le nombre de devoirs notés 15 de Pierre.

Exprimer la moyenne de Sophie en fonction de *x.*

c. Sachant que la moyenne de Sophie est de 2 points supérieure à la moyenne de Pierre, déterminer la moyenne de ces deux élèves.