OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE ROUEN
2022

SUJET DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS

Liberté
Égalité
Fraternité

ACADÉMIE DE NORMANDIE

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2022

Mercredi 9 mars

Seconde partie de l'épreuve : exercices académiques

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

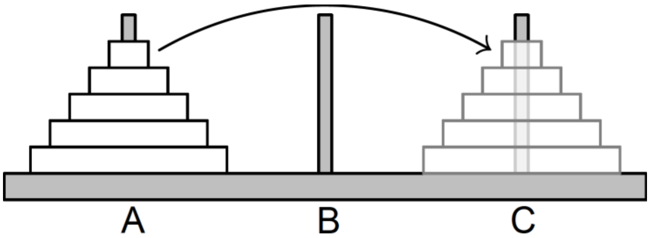
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus dans la copie.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

LES TOURS DE HANOÏ

On appelle jeu des tours de Hanoï un casse-tête, inventé par le mathématicien Edouard Lucas (1842-1891), composé de n disques de bois s'empilant sur 3 tiges.



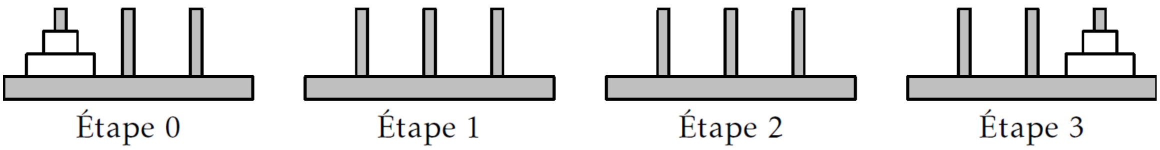
Au départ, les disques sont placés par ordre décroissant de taille sur la tige de gauche. L'objectif est de déplacer cette pile vers la tige de droite. Pour cela, il faut respecter les règles suivantes :
- on ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois sur n'importe quelle tige ;
- on ne peut pas placer un disque sur un disque plus petit que lui.

Dans ce problème, on appellera A, B et C les trois tiges de gauche à droite et nous allons nous intéresser au nombre de coups permettant de résoudre ce casse-tête.

Partie A : la solution la plus rapide

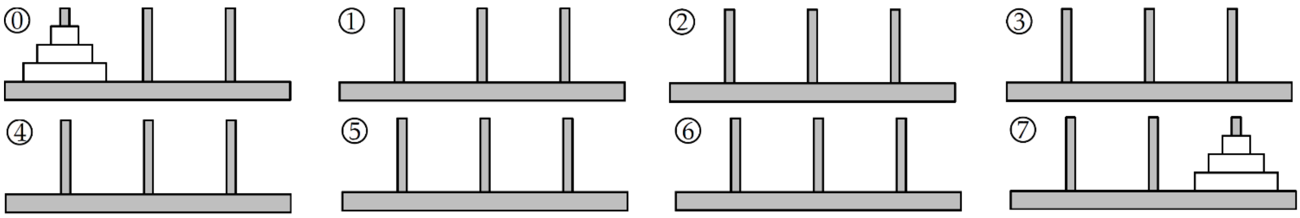
Nous allons déterminer le nombre minimal de coups $u(n)$ pour déplacer une tour de n disques de la tige A à la tige C.
Lorsque la tour n'est composée que d'un disque, il est clair qu'un seul déplacement suffit pour finir le jeu. On a donc $u(1) = 1$.

1. a. Il suffit de trois étapes pour déplacer une pile de deux disques.
   Compléter les étapes intermédiaires sur le schéma ci-dessous :



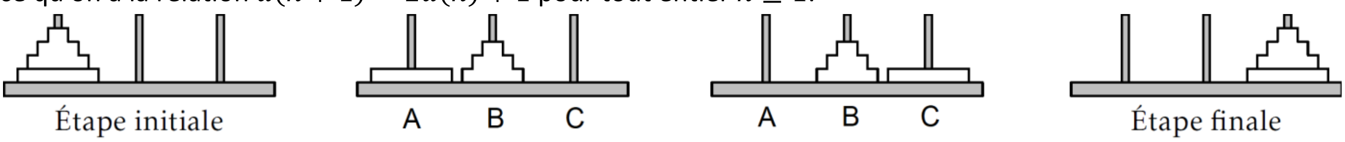
On a donc $u(2) \leq 3$.

   b. Il suffit de sept étapes pour déplacer une pile de trois disques.
   Compléter les étapes intermédiaires sur le schéma ci-dessous :



On a donc $u(3) \leq 7$.

2. a. En remarquant que pour pouvoir déplacer la plus grosse pièce, il est nécessaire d'avoir reconstitué une tour avec les autres pièces sur une des tiges, comme le montre la figure ci-dessous, expliquer pourquoi est-ce qu'on a la relation $u(n+1) = 2u(n) + 1$ pour tout entier $n \geq 1$.



   b. En déduire le nombre minimal de déplacements nécessaires pour une tour à deux disques, puis à trois disques.

On considère la quantité $v(n) = u(n) + 1$ pour tout entier $n \geq 1$.
On a calculé dans le tableur ci-contre les valeurs de $u(n)$ et $v(n)$ pour différentes valeurs de n.

	A	B	C
1	n	u(n)	v(n)
2	1	1	2
3	2	3	4
4	3	7	8
5	4	15	16
6	5	31	32
7	6	63	64
8	7	127	128
9	8	255	256

c. Quelles formules entrées en B3 et en C3 permettent d'obtenir ces valeurs par recopie vers le bas ?
d. Conjecturer une expression de $v(n)$ puis de $u(n)$ en fonction de n.
e. Montrer que $v(n+1) = 2v(n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
f. En déduire une expression de $v(n)$ puis de $u(n)$ en fonction de n.

3. En inventant le jeu des tours de Hanoï, Edouard Lucas l'a assortie d'une légende selon laquelle des prêtres d'un temple indien résolvent, depuis des temps immémoriaux, le jeu avec 64 disques. Lucas précise que quand ils termineront le jeu, ce sera la fin du monde. De nos jours, les ordinateurs sont capables de remplacer l'homme dans bien des tâches et permettraient d'accélérer considérablement le travail des prêtres.

a. En supposant qu'un ordinateur simule le déplacement d'un disque en un dix-millième de seconde, donner une estimation du nombre d'années qui s'écouleront avant la « fin du monde » prophétisée par Edouard Lucas.

b. On se propose de répondre à la même question au moyen d'une fonction Python.
Compléter le script ci-dessous pour qu'il donne une estimation du nombre d'années nécessaires pour résoudre le jeu avec 64 disques.

```
def hanoi():
    u=1
    for k in range(........):
        u=..................
    return .................
```

Partie B : la solution la plus lente

Nous allons introduire une nouvelle règle au jeu initial : on interdit aux disques d'aller directement de la tige A à la tige C ou de la tige C à la tige A. En d'autres termes, à chaque fois qu'on voudrait faire passer un disque de la tige A à la tige C, on s'oblige à le faire passer d'abord par la tige B.
En s'inspirant du travail effectué dans la première partie du problème, déterminer le nombre minimal de coups $w(n)$ pour déplacer une tour de n disques du piquet A au piquet C avec cette nouvelle règle.

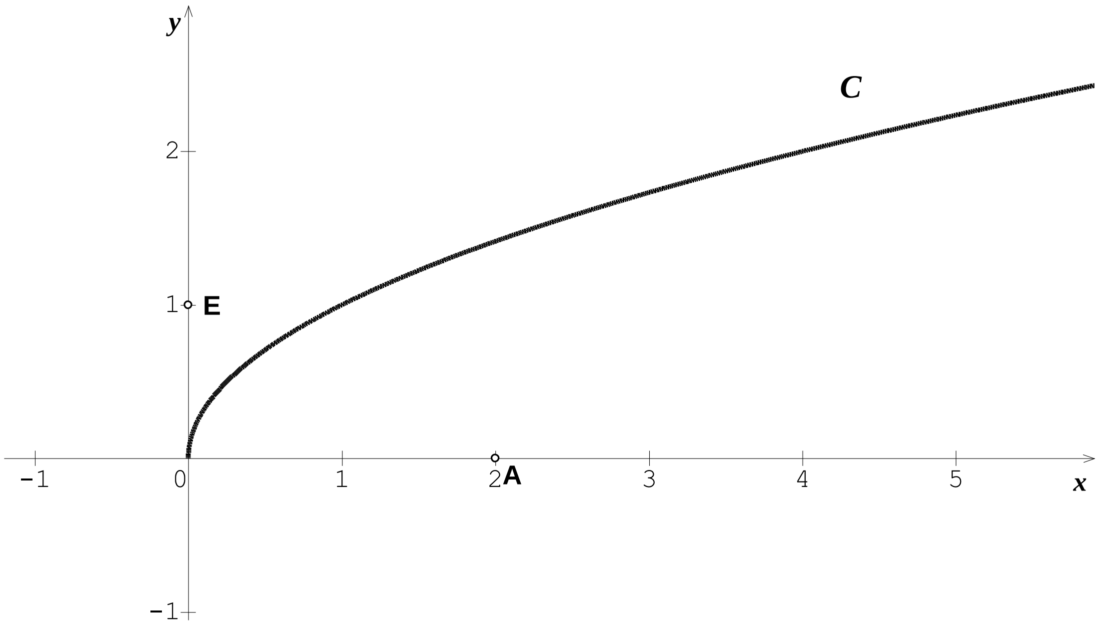
Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé la courbe (C) d'équation $y = \sqrt{x}$.

Soit A le point de coordonnées $(2\ ;0)$ et E le point de coordonnées $(0\ ;1)$.

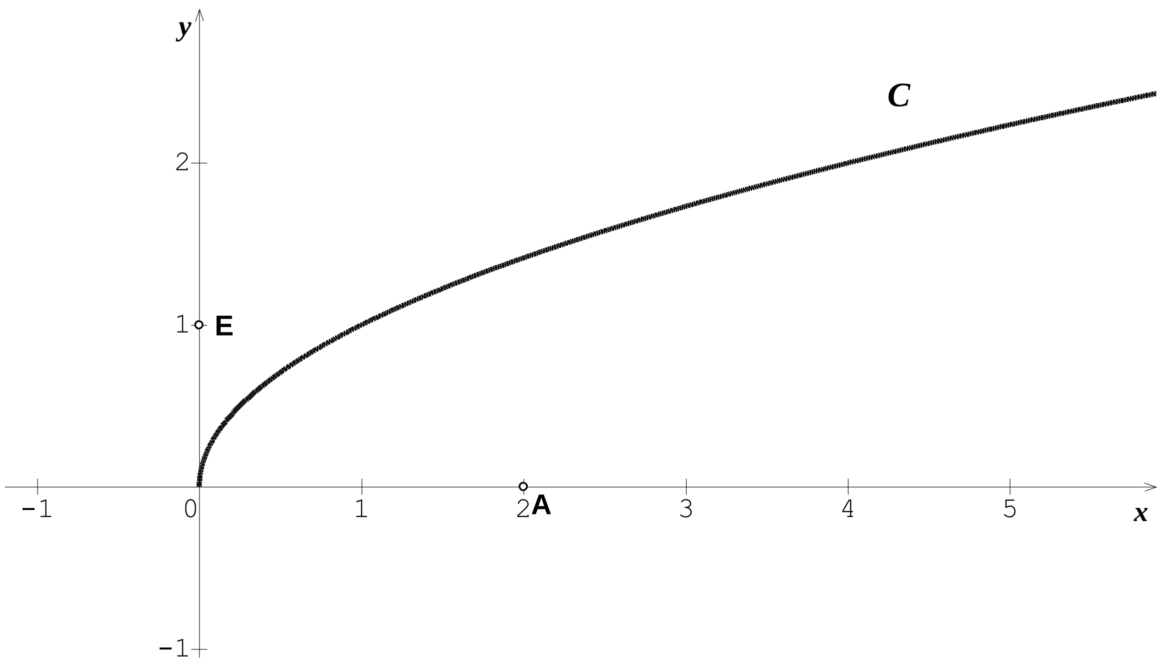
1. a) Placer sur le graphique suivant un point P de la courbe (C) et un point D de l'axe des abscisses tels que le triangle ADP soit rectangle et isocèle en P. Y a-t-il plusieurs possibilités ?

   b) Calculer les coordonnées du point D.



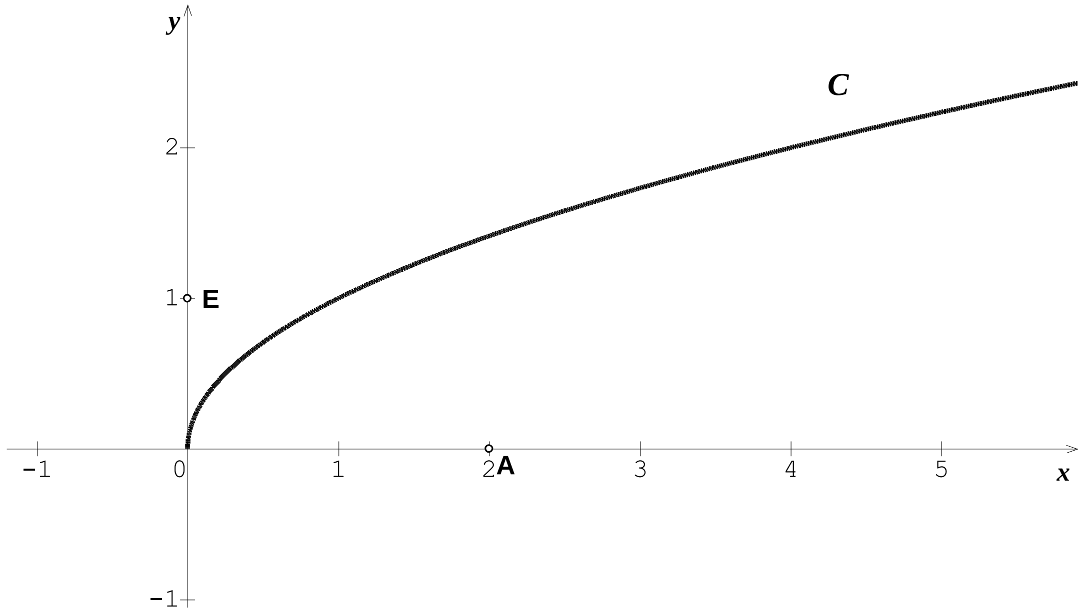
2. a) Placer sur le graphique suivant un point M de la courbe (C) et un point B de l'axe des abscisses tels que le triangle ABM soit équilatéral. Y a-t-il plusieurs possibilités ?

   b) Calculer la longueur du côté d'un tel triangle.



3. a) Placer sur le graphique suivant un point Q de la courbe (C) tel que le triangle AEQ soit isocèle en Q.

b) Calculer les coordonnées du point Q.



4. a) Calculer les coordonnées du point M_0 de la courbe C pour lequel la distance AM_O soit minimale et donner cette distance minimale.

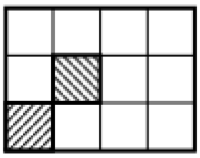
b) Calculer les coordonnées du point R de l'axe des ordonnées telles que le triangle AM_0R soit rectangle en M_0.

Exercice 3 (candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité de la voie générale)

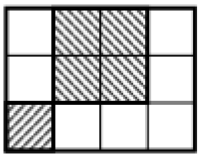
Sangaku

On joue au jeu suivant : une partie consiste à hachurer deux carrés ne se chevauchant pas à l'intérieur d'un rectangle. On définit le score comme la proportion de surface hachurée dans ce rectangle.

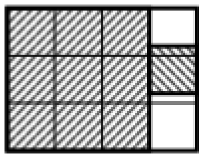
Voici trois exemples de parties.



Partie 1 : score $\frac{2}{12}$



Partie 2 : score $\frac{5}{12}$



Partie 3 : score $\frac{10}{12}$

Stratégie pour bien jouer :

- on hachure les carrés dont l'aire est la plus grande possible (la partie 2 est meilleure que la partie 1),
- on cherche à juxtaposer les deux carrés de façon à ce que la somme des côtés des carrés soit égale à la longueur du rectangle (cf partie 3).
  On dira qu'on « joue correctement » dans ce dernier cas.

1) Prise en main

a) Donner le meilleur score qu'il est possible d'obtenir avec un rectangle de 3 carreaux sur 5 carreaux. Peut-on jouer correctement avec un tel rectangle ?

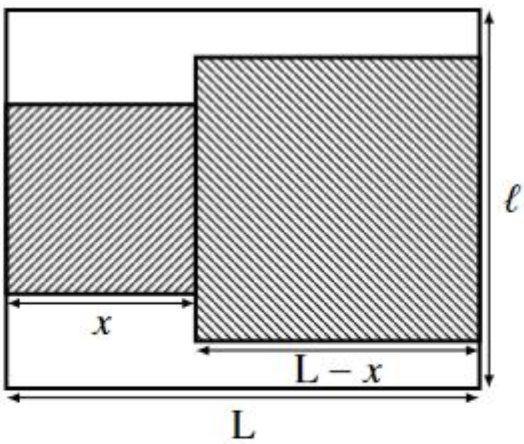
b) Donner le meilleur score qu'il est possible d'obtenir avec un rectangle de 3 carreaux sur 7 carreaux. Peut-on jouer correctement avec un tel rectangle ?

c) Quelle condition doivent respecter les dimensions d'un rectangle pour qu'il soit possible de jouer correctement ?

2) Etude des contraintes sur les dimensions des carrés hachurés

Désormais on joue correctement, on suppose qu'une unité de longueur a été fixée une bonne fois pour toutes, et que la largeur ℓ et la longueur L du rectangle sont telles que $\ell \leq \mathrm{L}$.

La situation peut être représentée par le schéma ci-dessous.



Démontrer que $L - \ell \leq x \leq \ell$.

3) Détermination du pire et du meilleur score (le rectangle est préalablement fixé)

a) Exprimer en fonction de la longueur variable x et des constantes ℓ et L l'aire $A(x)$ de la surface hachurée.

b) En déduire que, lors d'une partie correctement jouée, le score $S(x)$ est

$$\frac{2x^2 - 2xL + L^2}{L \times \ell}$$

c) On rappelle que dans tout repère orthogonal, une équation de l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (avec $a, b, et\ c$ réels et a non nul) est

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Donner une expression du pire puis du meilleur score lors d'une partie correctement jouée sur un rectangle de largeur ℓ et de longueur L.

4) Détermination du meilleur score envisageable (le rectangle n'est plus fixé)

Le meilleur score envisageable est le meilleur des meilleurs scores quand on joue correctement en faisant varier la forme du rectangle de base.

Cette forme est entièrement déterminée par le rapport $\rho = \frac{L}{\ell}$.

a) Expliquer pourquoi on a toujours $1 \leq \rho \leq 2$.

b) Le meilleur score exprimé en fonction du rapport ρ est maintenant noté $M(\rho)$.

Montrer que $M(\rho) = \rho - 2 + \frac{2}{\rho}$.

c) Par la méthode de votre choix, déterminer le minimum et le maximum de $M(\rho)$ sur l'intervalle $[1; 2]$.

d) La feuille A4 est-elle un bon ou un mauvais rectangle pour jouer correctement ? Justifier.

Rappel : le format A4 est un rectangle de 21 cm par 29,7 cm.