OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE ROUEN
2021

SUJET DE L'ÉPREUVE

21e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté Égalité Fraternité

ACADÉMIE DE NORMANDIE
Liberté Égalité Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Mardi 23 mars

Sujet destiné aux candidats de première de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité « mathématiques »

Seconde partie de l'épreuve : exercices académiques

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

Parabole de sûreté

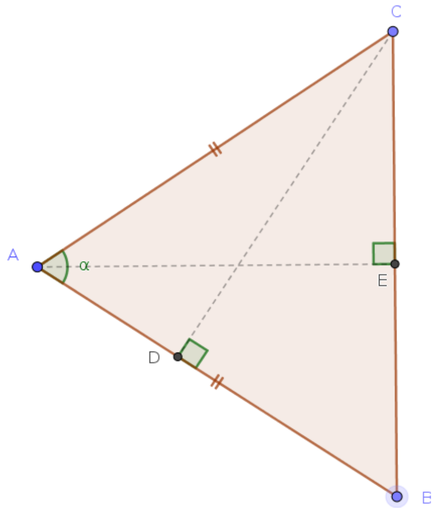
A. Questions préliminaires

1. La duplication du sinus

On considère un triangle ABC isocèle en A avec AB = 1.

On notera α l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ exprimé en radian où $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Les points D et E sont respectivement les pieds des hauteurs issues des sommets C et A.



a. Exprimer en fonction de α les longueurs AD, DB et DC.

b. Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de α.

c. En décomposant ABC d'une autre façon, exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de $\frac{\alpha}{2}$.

d. En déduire que, pour tout $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$: $\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}$

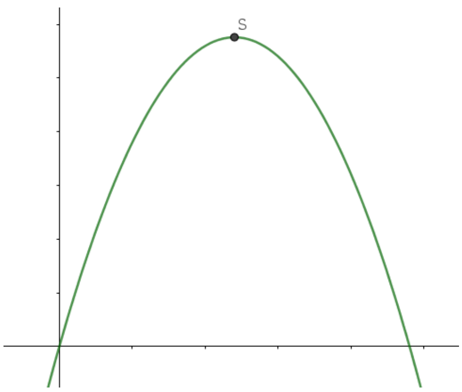
Pour la suite on admettra que :

- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, pour tout $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$;
- $\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}$, pour tout nombre réel α.

2. Points remarquables d'une parabole

Soient a et b deux réels strictement positifs.

On considère la parabole d'équation $y = -ax^2 + bx$ dans un repère orthogonal.



a. Justifier que cette parabole passe par l'origine du repère et par un autre point B dont les coordonnées sont $\left(\frac{b}{a}; 0\right)$.

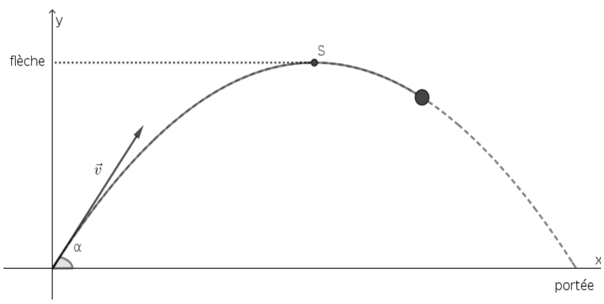
b. Démontrer que le sommet de cette parabole est le point S de coordonnées $\left(\frac{b}{2a}\,;\,\frac{b^2}{4a}\right)$.

B. Trajectoire d'un boulet de canon

Si on néglige les frottements et la résistance de l'air, la trajectoire d'un boulet tiré d'un point O avec une vitesse initiale v suivant un angle d'inclinaison α par rapport à l'horizontale est la parabole d'équation :

$$\boldsymbol{y = \frac{-g}{2v^2(\cos\alpha)^2}x^2 + (\tan\alpha)x,}$$

où g est l'accélération de la pesanteur ($g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$). Dans toute la suite, la vitesse initiale notée v est fixée (elle s'exprime en $\mathrm{m.s^{-1}}$).



1. La **flèche** est l'altitude maximale atteinte par le boulet.

a. Démontrer que la flèche est égale à $\frac{v^2}{2g}\,(\sin\alpha)^2$.

b. Pour quel angle de tir la flèche est-elle maximale ?

On notera h la valeur de la flèche maximale.

Exprimer h en fonction de v et g.

2. La **portée** est la distance de O au point d'impact du boulet avec le sol.

a. Démontrer que la portée est égale à $\frac{2v^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$.

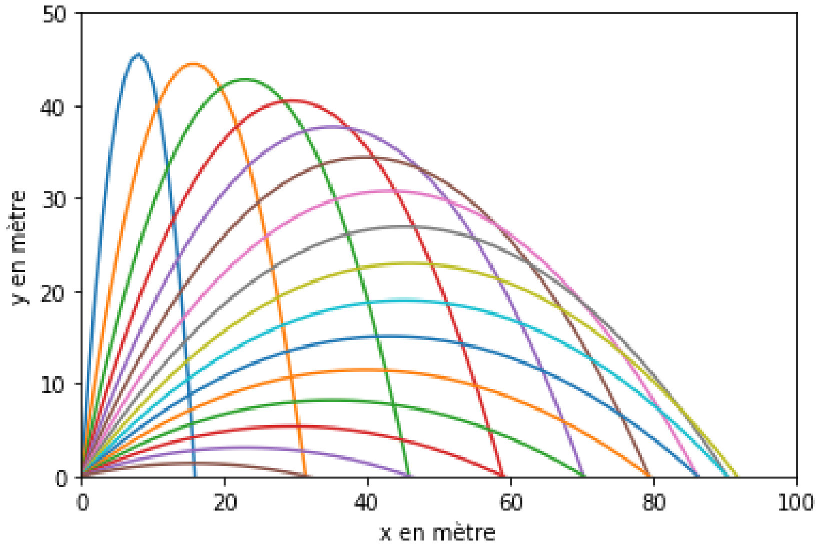
b. En utilisant la partie A, déterminer la valeur maximale du produit $\cos\alpha\sin\alpha$.

c. En déduire la valeur de α pour laquelle la portée est maximale.

d. Quelle relation simple existe-t-il entre la portée maximale et la flèche maximale ?

3. La **parabole de sûreté**

La figure suivante est obtenue après programmation en langage Python d'une simulation de 16 tirs ayant tous pour vitesse initiale $v = 30\ \mathrm{m.s^{-1}}$.



On peut observer que, quel que soit l'angle de départ, certains points du plan ne pourront pas être atteints par le boulet.

En balistique, on désigne par « ***parabole de sûreté*** » la courbe qui enveloppe toutes les trajectoires paraboliques possibles d'un projectile (assimilé à un point) lancé depuis d'un point fixe avec une vitesse initiale fixée.

Aucun point « au-dessus » de cette courbe ne peut être atteint par le projectile ayant cette vitesse initiale : la zone est considérée comme « sûre », d'où le nom de la courbe.

On admet que cette *parabole de sûreté* est l'unique parabole dont le sommet a pour coordonnées $(0; h)$, passant par le point de coordonnées $(2h\,; 0)$.

Déterminer une équation de la *parabole de sûreté*.

Exercice académique 2
Jeu de « trac »

Règle du jeu :

On dispose d'un plateau de jeu comportant neuf palets mobiles numérotés de 1 à 9 (voir ci-contre).

- *Chaque joueur lance deux dés, additionne les deux nombres obtenus et abaisse une série de palets dont la somme des numéros est égale à la somme des deux dés ;*
- *Si les palets 7, 8 et 9 ont déjà été abaissés, on peut choisir de ne lancer qu'un seul dé.*

On relance ensuite les dés jusqu'à ce qu'il soit impossible de continuer.
Puis on additionne les numéros inscrits sur les palets restant.

Le but du jeu est d'obtenir le score final le plus faible.

Exemple de partie :

Sur l'image ci-dessus, la somme des deux dés lancés est égale à 8.
Le joueur a abaissé le palet numéro 8, mais il aurait pu abaisser le 7 et le 1, ou le 6 et le 2, ou le 5 et le 3, ou encore les palets 5, 2 et 1 ou 4, 3 et 1.
En pratique, compte tenu du but du jeu, on cherche d'abord à abaisser les palets correspondant aux numéros les plus élevés.
En revenant à la partie engagée sur la photo, si, à la suite du 8, on obtient en lançant les dés une somme de 6, on peut abaisser le palet numéro 6 et conserver les palets numérotés 1-2-3-4-5-7-9.
Supposons que l'on obtienne ensuite, en lançant à nouveau les dés, une somme égale à 4, on peut abaisser le 4 et conserver les palets numérotés 1-2-3-5-7-9.
Avec un total de 5 au lancer suivant, on peut choisir de garder les palets numérotés 1-2-3-7-9
Avec un total de 11 au lancer suivant, on décide d'abaisser deux palets : les numéros 9 et 2.
Il ne reste plus que les palets numérotés 1-3-7.
Après avoir lancé les deux dés, on obtient une somme de 7 et on abaisse la palet 7.
Il ne reste que les palets numérotés 1-3. On choisit de ne lancer qu'un seul dé et l'on obtient le 2.
La partie est alors terminée et le score final est 1 + 3 = 4. Peut-être les autres joueurs ont-ils fait mieux !

1. Déterminer le score final maximal que pourrait obtenir un joueur très malchanceux.

2. Déterminer le nombre minimum de lancers de dés pour qu'un joueur très chanceux réussisse à abaisser les neuf palets.

3. Recherche de stratégies en fonction de l'état d'avancement de différentes parties indépendantes

Partie 1

a. Il ne reste, à ce stade de la partie, que les palets numérotés 1-2-3-7-9.

Pourquoi le joueur n'a-t-il aucune raison de s'inquiéter en lançant à nouveau les dés ?

b. Le joueur obtient une somme égale à 7 en lançant les dés et conserve les palets numérotés 1-2-3-9.

Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas continuer au prochain lancer ?

c. Le joueur obtient une somme égale à 11 en lançant les dés et conserve les palets numérotés 1-3.

Il choisit de ne lancer qu'un seul dé. Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas continuer au prochain lancer ?

Pour les parties 2 et 3 suivantes, quelle stratégie peut-on conseiller au joueur pour optimiser ses chances de ne pas être bloqué ?

Partie 2
Il reste, à ce stade de la partie, les palets numérotés 1-2-3-4-5-6-8-9. Le joueur obtient une somme égale à 7 en lançant les dés.

Il hésite entre abaisser les palets numérotés 1 et 6 ou les palets numérotés 2 et 5 ou ceux numérotés 3 et 4.

Partie 3
Il ne reste, à ce stade de la partie, que les palets numérotés 2-4-5.

Le joueur hésite entre lancer un dé ou deux dés.

Partie 4
Il ne reste, à ce stade de la partie, que les palets numérotés 1-2-4-5.

Vaut-il mieux que le joueur lance un dé ou deux dés ?

Si le joueur lance deux dés et obtient une somme égale à 7, quels palets abaisser : les numéros 1-2-4 ou 2-5 ?

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE LA JEUNESSE ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

ACADÉMIE DE NORMANDIE
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2021

Mardi 23 mars

Sujet destiné aux candidats de première de la voie générale n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité « mathématiques »

Seconde partie de l'épreuve : exercices académiques

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

Le jeu du Tamina

Le jeu du Tamina se joue à deux équipes de neuf joueurs sur un terrain de 45 mètres $\times$ 32 mètres.

Un match se joue en deux manches de trente minutes.

Au Tamina, on peut marquer des buts et des paniers.

Quand elle marque un but, une équipe gagne 10 points mais seulement 3 points quand elle marque un panier.

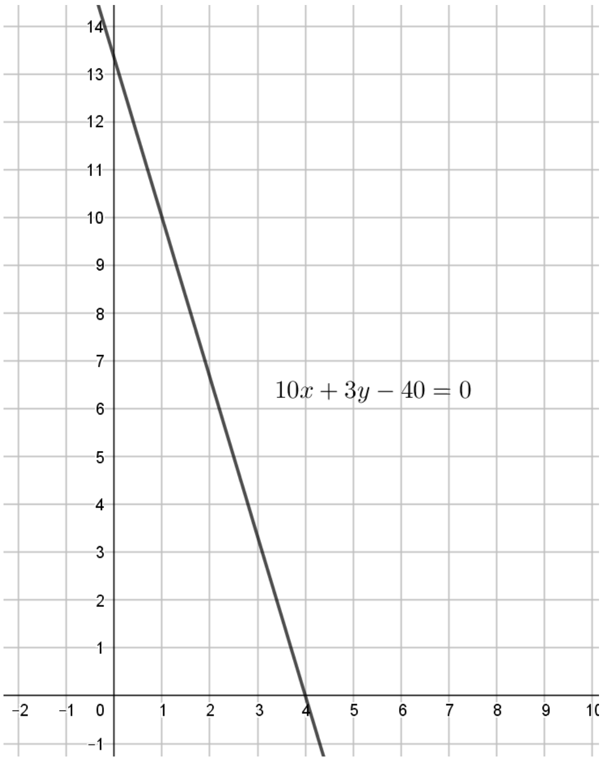
1. a. Une équipe a marqué 20 points lors d'un match.

   Combien de buts et de paniers ont pu être marqués ?

   b. Une équipe a marqué 32 points lors d'un match.

   Combien de buts et de paniers ont pu être marqués ?

2. En utilisant la droite d'équation $10x + 3y - 40 = 0$ représentée ci-dessous, déterminer toutes les façons possibles pour une équipe de marquer 40 points lors d'un match.



3. a. Justifier qu'une équipe ne peut jamais marquer 17 points lors d'un match.

   b. Justifier que tous les scores supérieurs à 17 points peuvent être atteints à ce jeu.

4. L'un des plus grands joueurs de Tamina a marqué dans toute sa carrière 2 018 points.

   De combien de façons différentes a-t-il pu marquer ses 2 018 points ?

Exercice académique 2

***Jeu de* « *trac* »**

Règle du jeu :

On dispose d'un plateau de jeu comportant neuf palets mobiles numérotés de 1 à 9 (voir ci-contre).

- *Chaque joueur lance deux dés, additionne les deux nombres obtenus et abaisse une série de palets dont la somme des numéros est égale à la somme des deux dés ;*
- *Si les palets 7, 8 et 9 ont déjà été abaissés, on peut choisir de ne lancer qu'un seul dé.*

On relance ensuite les dés jusqu'à ce qu'il soit impossible de continuer. Puis on additionne les numéros inscrits sur les palets restant.

Le but du jeu est d'obtenir le score final le plus faible.

Exemple de partie :

Sur l'image ci-dessus, la somme des deux dés lancés est égale à 8.
Le joueur a abaissé le palet numéro 8, mais il aurait pu abaisser le 7 et le 1, ou le 6 et le 2, ou le 5 et le 3, ou encore les palets 5, 2 et 1 ou 4, 3 et 1.
En pratique, compte tenu du but du jeu, on cherche d'abord à abaisser les palets correspondant aux numéros les plus élevés.
En revenant à la partie engagée sur la photo, si, à la suite du 8, on obtient en lançant les dés une somme de 6, on peut abaisser le palet numéro 6 et conserver les palets numérotés 1-2-3-4-5-7-9.
Supposons que l'on obtienne ensuite, en lançant à nouveau les dés, une somme égale à 4, on peut abaisser le 4 et conserver les palets numérotés 1-2-3-5-7-9.
Avec un total de 5 au lancer suivant, on peut choisir de garder les palets numérotés 1-2-3-7-9
Avec un total de 11 au lancer suivant, on décide d'abaisser deux palets : les numéros 9 et 2.
Il ne reste plus que les palets numérotés 1-3-7.
Après avoir lancé les deux dés, on obtient une somme de 7 et on abaisse la palet 7.
Il ne reste que les palets numérotés 1-3. On choisit de ne lancer qu'un seul dé et l'on obtient le 2.
La partie est alors terminée et le score final est 1 + 3 = 4. Peut-être les autres joueurs ont-ils fait mieux !

1. Déterminer le score final maximal que pourrait obtenir un joueur très malchanceux.

2. Déterminer le nombre minimum de lancers de dés pour qu'un joueur très chanceux réussisse à abaisser les neuf palets.

3. Recherche de stratégies en fonction de l'état d'avancement de différentes parties indépendantes

Partie 1

a. Il ne reste, à ce stade de la partie, que les palets numérotés 1-2-3-7-9.

Pourquoi le joueur n'a-t-il aucune raison de s'inquiéter en lançant à nouveau les dés ?

b. Le joueur obtient une somme égale à 7 en lançant les dés et conserve les palets numérotés 1-2-3-9.

Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas continuer au prochain lancer ?

c. Le joueur obtient une somme égale à 11 en lançant les dés et conserve les palets numérotés 1-3.

Il choisit de ne lancer qu'un seul dé. Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas continuer au prochain lancer ?

Pour les parties 2 et 3 suivantes, quelle stratégie peut-on conseiller au joueur pour optimiser ses chances de ne pas être bloqué ?

Partie 2
Il reste, à ce stade de la partie, les palets numérotés 1-2-3-4-5-6-8-9. Le joueur obtient une somme égale à 7 en lançant les dés.

Il hésite entre abaisser les palets numérotés 1 et 6 ou les palets numérotés 2 et 5 ou ceux numérotés 3 et 4.

Partie 3
Il ne reste, à ce stade de la partie, que les palets numérotés 2-4-5.

Le joueur hésite entre lancer un dé ou deux dés.

Partie 4
Il ne reste, à ce stade de la partie, que les palets numérotés 1-2-4-5.

Vaut-il mieux que le joueur lance un dé ou deux dés ?

Si le joueur lance deux dés et obtient une somme égale à 7, quels palets abaisser : les numéros 1-2-4 ou 2-5 ?