OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

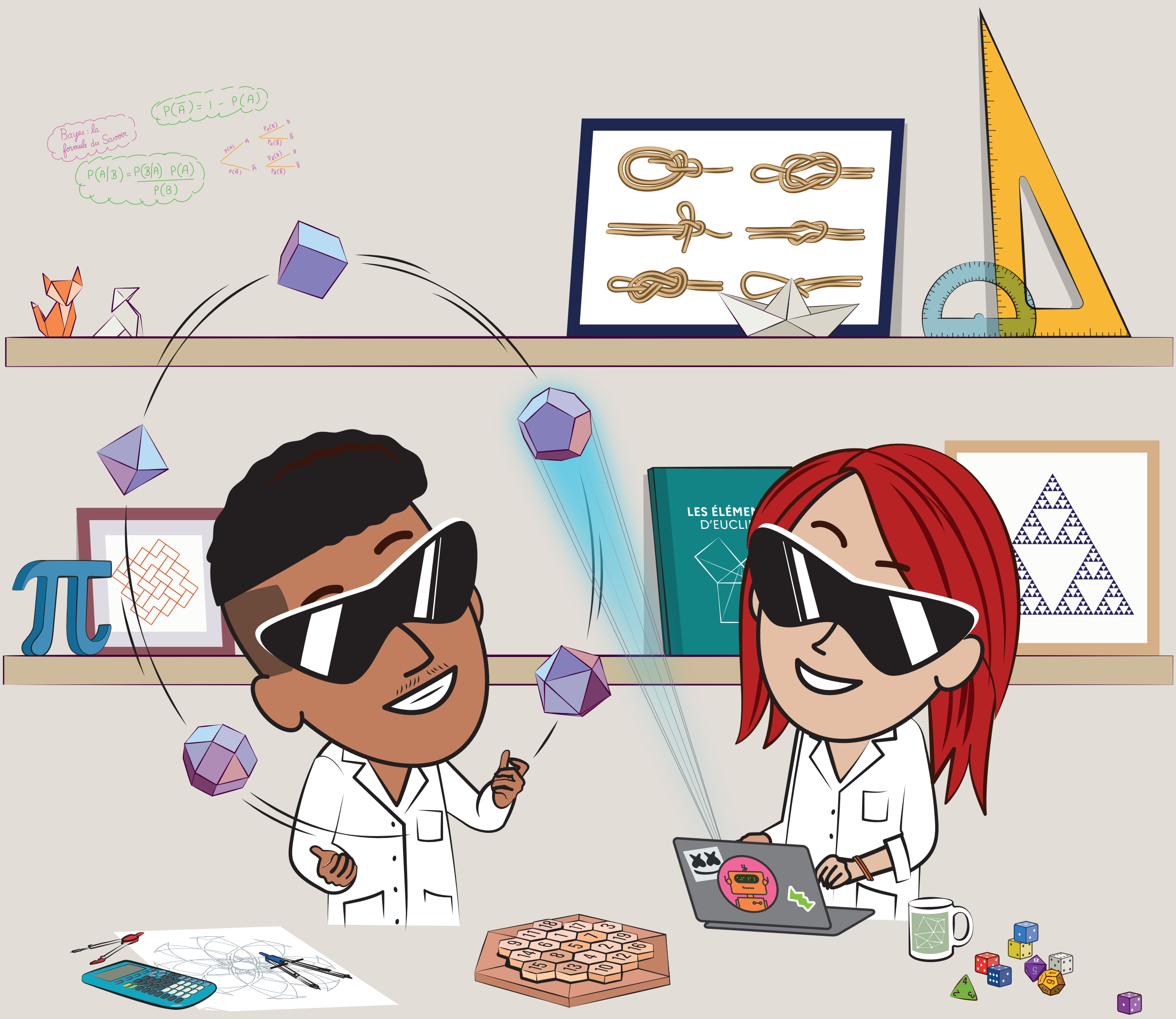
ACADÉMIE DE ROUEN
2023

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

Sujet EDS, corrigé

Exercice 1 : PLUS FORT !

---

1. ***a.*** $[8, 1, \mathbf{7}, 6, 5, 2, \mathbf{3}, \mathbf{4}]$ est une autre liste de longueur 8 et de score 3.

   b. Les listes de longueurs 3 sont $[1, \mathbf{2}, \mathbf{3}]$, $[1, \mathbf{3}, 2]$, $[2,1, \mathbf{3}]$, $[2, \mathbf{3}, 1]$, $[3,1, \mathbf{2}]$, $[3,2,1]$ et les scores associés sont respectivement $2, 1, 1, 1, 1, 0$.

2.

```
def score(n):
  '''renvoie le score d'une liste L de longueur n'''
  S=0
  for k in range(n-1):
    if L[k+1]>L[k]:
      S=S+1
  return S
```

3. Le score est un nombre positif ou nul et le joueur marque 0 point avec la liste $[n, n-1, \ldots, 2,1]$.
Dans le meilleur des cas, toutes les cartes sont dans l'ordre croissant et la liste $[1, \mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{n}]$ apporte le nombre maximal de points qui est $n-1$.

4. ***a.*** La liste $[1, \mathbf{2}, . . , \boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}, n-1, . . , k+1]$ a pour score k et est de longueur n donc il existe au moins une liste de longueur n et de score k.

b. La liste $[n-1, . . , k+1, 1, \mathbf{2}, . . , \boldsymbol{k}, \boldsymbol{n}]$ est différente de la précédente et donne aussi k points donc, pour tout k entre 1 et $n-2$, on peut trouver deux listes de longueur n et de score k.

5. La première liste donnée dans la question **2**. est la seule de longueur n et de score 0 (les nombres doivent tous être rangés dans l'ordre décroissant. De même, la deuxième liste donnée dans la question **2**. est la seule de longueur n et de score $n-1$, donc $L_n(0) = L_n(n-1) = 1$.

6. ***a.*** En appliquant le résulta de la question précédente à $n = 3$, $L_3(0) = L_3(2) = 1$.
   Les listes de longueurs 3 sont $[1, \mathbf{2}, \mathbf{3}]$, $[1, \mathbf{3}, 2]$, $[2,1, \mathbf{3}]$, $[2, \mathbf{3}, 1]$, $[3,1, \mathbf{2}]$, $[3,2,1]$ et on en déduit $L_3(1) = 4$.
   On remarque que $[3,1, \mathbf{2}]$ rapporte 1 point. Parmi les 4 possibilités d'insertion du 4, les listes dont le score est toujours 1 sont $[\mathbf{4}, 3,1,2]$ et $[3,1, \mathbf{4}, 2]$.

   b. La liste $[3,2,1]$ a pour score 0. On obtient une liste ayant encore le score 0 uniquement en insérant le n°4 au début, ce qui donne la liste $[\mathbf{4}, 3,2,1]$.

   c. Toute liste de longueur 4 et de score 1 ne peut être obtenue que par insertion du n°4 dans une liste de longueur 3 et de score 0 ou 1. En effet, insérer 4 à la liste $[1, \mathbf{2}, \mathbf{3}]$ donnera une liste de score 2 au moins.
   Pour chaque liste de longueur 3 et score 1, il y a deux possibilités d'insertion du n°4, ce qui fait 2 $L_3(1)$ telles listes possibles.
   À cela on ajoute les 3 possibilités obtenues à partir de la liste de longueur 3 et score 0, ce qui ajoute 3 $\boldsymbol{L_3}(0)$ listes possibles.
   On obtient donc bien $L_4(1) = 2L_3(1) + L_3(0)$.

   d. On construit une liste de longueur $n+1$ et score 1 à partir d'une liste de longueur n et score 0 ou 1, en insérant le n° $n+1$ judicieusement.
   Remarquons d'abord que la position 1 ne rapporte pas de point.
   Dans une liste de longueur n et score 1, on peut insérer le n° $n+1$ soit au tout début (en position 1), soit juste avant le numéro marquant l'unique point (position au moins 2). Ces deux positions sont distinctes, et ce sont les seules possibles, ce qui fait 2 $\boldsymbol{L_n}(1)$ listes de ce type.
   Dans une liste de longueur n et de score 0, on peut insérer le n° $n+1$ n'importe où sauf au tout début, la liste obtenue rapportera bien 1 point. Il y a donc n positions possibles pour ce numéro $n+1$, ce qui fait n $\boldsymbol{L_n}(0)$ listes de ce type.

Enfin, insérer $n + 1$ à une liste de longueur n et de score supérieur ou égal à 2 donnera une liste de score supérieur ou égal à 2 : en effet, si on l'insère en queue, cela augmentera le score d'une unité, et sinon, cela conservera le score initial.
On trouve donc bien $L_{n+1}(1) \ = 2L_n(1) + nL_n(0)$.

e. On a $L_{n+1}(k) = (k + 1)L_{\boldsymbol{n}}(k) + (n + 1 - k)L_{\boldsymbol{n}}(k - 1)$. En effet :

- Si on insère le n° $n + 1$ dans une liste de longueur n et score k, la nouvelle liste a encore un score de k si et seulement si l'insertion s'est faite en position 1, ou juste avant un numéro qui marquait un point, ce qui fait $k + 1$ possibilités.
- Si on insère le n° $n + 1$ dans une liste de longueur n et score $k - 1$, la nouvelle liste a un score de k si et seulement si l'insertion s'est faite dans l'une des positions non évoquées ci-dessus, ce qui donne $n + 1 - k$ possibilités.
- Enfin, comme précédemment, insérer $n + 1$ à une liste de score strictement inférieur à $k - 1$, ou strictement supérieur à k, ne conduira jamais à une nouvelle liste de score k.

f. On obtient, grâce aux questions précédentes :

	$\boldsymbol{k = 0}$	$\boldsymbol{k = 1}$	$\boldsymbol{k = 2}$	$\boldsymbol{k = 3}$	$\boldsymbol{k = 4}$
$\boldsymbol{n = 3}$	1	4	1		
$\boldsymbol{n = 4}$	1	11	11	1	
$\boldsymbol{n = 5}$	1	26	66	26	1

Exercice 2 : UNE DESCENTE INFINIE

Partie 1.

1. $b = -(r_1 + r_2)$ et $c = r_1 r_2$.

2. $c \geq 0$ donc r_1 et r_2 sont de même signe. $b \leq 0$ est négatif donc la somme de r_1 et r_2 est positive. On en déduit donc que r_1 et r_2 sont positifs.

Partie 2.

1. ***a.*** Comme (x_1, x_2, x_3) solution de l'équation (1), on a $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$.
Or $\alpha > 0$ et $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ donc $x_1 x_2 x_3 \geq 0$.
Ainsi $|x_1||x_2||x_3| = |x_1 x_2 x_3| = x_1 x_2 x_3$ et $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de l'équation (E).
b. Si (x_1, x_2, x_3) est triplet d'entiers relatifs différent de (0,0,0) solution de l'équation (1), alors d'après la question précédente, $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ solution triplet d'entiers naturels de l'équation (1) différent de $(0,0,0)$.

2. Par commutativité du produit et de la somme, le triplet (x_2, x_1, x_3) est alors aussi solution de l'équation (E).

3. Si l'équation (E) admet une solution (x_2, x_1, x_3) différente de $(0,0,0)$, d'après la question 1b., on obtient un triplet de nombres entiers naturels différents de $(0,0,0)$ et solution de (E). Puis, d'après la question 2., en et en la généralisant d'autres permutations du triplet), on obtient une solution (x_1, x_2, x_3) différente du triplet $(0,0,0)$ telle que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Partie 3.

1. On sait déjà que $x_1 \geq 0$. Si $x_1 = 0$, alors le membre de droite de l'égalité est nul et donc $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, les x_i sont donc tous nuls et la seule solution est le triplet $(0,0,0)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2.

a. (x_1, x_2, y) est solution si et seulement si $x_1^2 + x_2^2 + y^2 = \alpha x_1 x_2 y$ c'est-à-dire y est racine de Q.

b. x_3 est une racine de Q.

c. On écrit $Q(x_2) = (x_2^2 - \alpha x_1 x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2) = (2x_2^2 + x_2^2 - \alpha x_1 x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2)$ d'où le résultat.
On sait que x_1, x_2 sont des entiers non nuls donc supérieurs ou égaux à 1, d'où $3 - \alpha x_1 x_2 \leq 3 - \alpha < 0$ et $x_2^2 > 0$ donc $(3 - \alpha x_1 x_2) x_2^2 < 0$ et on a $0 < x_1 \leq x_2$ donc donc $x_1^2 - x_2^2 \leq 0$.
D'où en sommant $Q(x_2) < 0$.

d. $Q(0) = x_1^2 + x_2^2$ et $0 < x_1 \leq x_2$ donc $Q(0) > 0$.

e. $Q(x_2) < 0$ donc la fonction polynôme du second degré Q change se signe sur **R**. On en déduit que l'équation $Q(x) = 0$ possède exactement deux solutions distinctes réelles. On connaît x_3. On note y l'autre solution.
La fonction polynôme Q est positive à l'extérieur des racines et négative à l'intérieur. Donc, comme $Q(x_2) < 0$, x_2 est entre ces racines (strictement). Comme $x_2 \leq x_3$, on en déduit que $y < x_2 < x_3$.
On sait que $Q(0) > 0$, donc 0 est à l'extérieur des racines donc soit inférieur strictement à y soit strictement supérieur à x_3. Mais comme $0 < x_2$, on en conclut que $0 < y < x_2 < x_3$.

f. D'après la partie **1.**, $y + x_3 = \alpha x_1 x_2$ qui est un entier comme produit d'entiers. Comme x_3 est un entier, y est un entier. Il est naturel d'après la question **e.**.

3. En réitérant ce procédé sur le triplet (x_1, x_2, y) (réordonné dans l'ordre croissant) au lieu de (x_1, x_2, x_3), on obtient un triplet d'entiers distincts de (0,0,0) dont le max a encore strictement décru .
On obtient ainsi une suite strictement décroissante d'entier naturels y_n, ce qui est impossible. Ainsi, il n'existe pas de triplet d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) différent de (0,0,0), solution de (E) tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

4. Par l'absurde, s'il existait un triplet d'entiers relatifs (x_1, x_2, x_3) différent de (0,0,0), solution de (E), alors, d'après la question **3.** de la partie 2, il existerait un triplet d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) différent de (0,0,0), solution de (E) tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, ce qui est impossible d'après la question précédente.

5. On généralise le raisonnement en considérant d'abord le polynôme $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 \dots x_{n-1} x + x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2$, en montrant que $Q(x_{n-1}) = (n - \alpha x_1 \dots x_{n-2}) x_{n-1}^2 + (x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 - (n-2) x_{n-1}^2)$ d'où on déduit $Q(x_{n-1}) > 0$ alors qu'on a $Q(0) > 0$.

Exercice 3 : CARRÉS DE DIRICHLET

Partie 1

1. ¼ (4 + 3 + 2 + 3) = 12/4 = 3,
   ¼ (3 + 4 + 3 + 4) = 3,5
   ¼ (4 + 5 + 3,5 +3,5) = 4
2. Il suffit de mettre des 1 sur le « tour extérieur ».
3. a. Par définition d'un carré de Dirichlet, a=¼ (0+1+b+c) d'où 4a=b+c+1
   b. On obtient de même trois autres équations 4b=a+d, 4c= a+d, 4d = b+c.
   De ces quatre équations, on peut en déduire une solution : a=7/24, b=1/12, c=1/12, d=1/24…

   Cela donne au final le carré de Dirichlet suivant :

	1	0	
0	7/24	1/12	0
0	1/12	1/24	0
	0	0	

c. d.

	0	1	
0	1/12	7/24	0
0	1/24	1/12	0
	0	0	

puis 6 autres par « rotations ou symétries »

	0	0	
0	1/12	7/24	1
0	1/24	1/12	0
	0	0	

	0	0	
0	1/24	1/12	0
0	1/12	7/24	1
	0	0	

	0	0	
0	1/24	1/12	0
0	1/12	7/24	0
	0	1	

	0	0	
0	1/12	1/24	0
0	7/24	1/12	0
	1	`0	

	0	0	
0	1/12	1/24	0
1	7/24	1/12	0
	0	`0	

	0	0	
1	7/24	1/12	0
0	1/12	1/24	0
	0	`0	

4. a. Ce qui compte, c'est que les deux valeurs touchant un sommet du carré aient la même somme.
   On peut ainsi proposer :

	9	5	
0	4,5	3,5	0
0	5,5	4,5	9
	13	0	

	4	5	
5	4,5	3,5	0
0	5,5	4,5	9
	13	0	

   b. En haut à gauche : 9= 9+0 = 8+1= … = 0 +9 soit 10 couples possibles
   Et de même, 6 couples en haut à droite, 10 en bas à gauche et 14 en bas à droite.
   On pourrait ainsi construire $\underbrace{10 \times 6 \times 10 \times 14}_{8400}$ carrés différents.

	a	…	
b	M	d	…
…	c	…	…
	…	…	

5. a. Supposant G dans le carré intérieur et a, b, c, d ses quatre voisines.
   Comme G est la plus grande des valeurs du carré de Dirichlet alors : a$\leq$ G, $b \leq G, c \leq G, d \leq G$.
   Supposons qu'il existe une des quatre voisines strictement inférieure à G, par exemple a, alors $\underbrace{\frac{a+b+c+d}{4}}_{G} < \frac{G\times 4}{4}$ soit G < G ce qui est aburde.
   On en déduit que donc toutes les voisines de G sont égales à G.
   En refaisant ce raisonnement pour les voisines de G situées dans le carré intérieur, on montre de proche en proche que toutes les valeurs du carré de Dirichlet sont égales à G.
   b. Si G est dans le carré intérieur, alors toutes les valeurs du carré de Dirichlet sont égales à G, ce qui est absurde si le tour extérieur contient au moins deux valeurs disctinctes. On en déduit que dans ce cas, la plus grande valeur du carré de Dirichlet est donc nécessairement sur son tour extérieur.

Partie 2

1. a. On a additionné les valeurs situées au même emplacement.
   b. Si M et N sont des carrés de Dirichlet, pour les cases en haut à droite, on a :
   a=¼ (10+14+b+c) et A=¼ (1+12+B+C) donc a+A = ¼ (10+14+b+c+1+12+B+C) = ¼ (26 + 11 + (b+B)+(c+C))
   donc a+A est bien la moyenne de ses voisines.
   En raisonnement de mêmes pour les autres cases des carrés intérieurs, on montre ainsi que si M et N sont des carrés de Dirichlet, il en est de même de la grille 6.
2. a = (14 + b + c + 10) / 4 donc at = (14t + bt + ct + 10t) /4.
   La case en haut à gauche de la nouvelle grille est bien la moyenne de ses quatre voisines.
3. On effectue des « combinaisons linéaires » des tableaux de la partie 1 question 3.
   Cela donne en haut à gauche : $\mathbf{14} \times \frac{7}{24} + \mathbf{6} \times \frac{1}{12} + \mathbf{0} \times \frac{1}{12} + \mathbf{8} \times \frac{1}{24} + \mathbf{4} \times \frac{1}{24} + \mathbf{7} \times \frac{1}{12} + \mathbf{5} \times \frac{1}{12} + \mathbf{10} \times \frac{7}{24} = 9.$

   En raisonnant de même, on obtient :

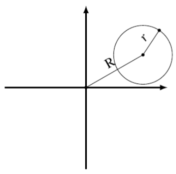
	14	6	
10	9	21/4	0
5	27/4	6	8
	7	4	

4. a. On raisonne comme aux questions 1 et 2 (avec t=-1) de la partie 2.
   b. Si la grille 10 est un carré de Dirichlet, alors 9-A = ¼(0+0+0+0) = 0 donc 9-A = 0 donc A= 9. De même B=b, C=c, D=d.
   c. Il y a bien qu'un seul quadruplet (a ; b ; c ; d) permettant de transformer la grille M en un carré de Dirichlet : celui déterminé à la question 3.

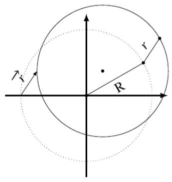
Exercice 4 : REPRÉSENTATIONS DU MOUVEMENT D'UN ROBOT

Partie 1

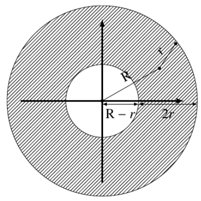
1.



2.



3.



Partie 2

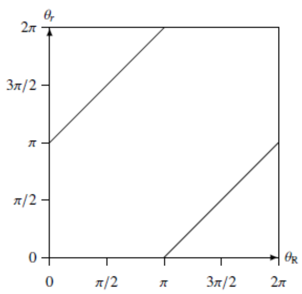
1. A partir de la définition du sinus et du cosinus. Mais on acceptera une justification utilisant la trigonométrie.
2. Évocation d'une translation ou d'un décalage …
3. $(R\cos\theta_R + r\cos\theta_r)^2 = R^2\,(\cos\theta_R)^2 + r^2(\cos\theta_r)^2 + 2Rr\cos\theta_R\cos\theta_r$

Idem en remplaçant cos par sin. En utilisant les deux rappels, on obtient l'égalité $OP^2 = R^2 + r^2 + 2Rr\cos(\theta_R - \theta_r)$.

4. Comme $\cos(\theta_R - \theta_r)$ est dans l'intervalle $[-1; 1]$, on déduit de 3. que $R^2 + r^2 - 2Rr \leq OP^2 \leq R^2 + r^2 + 2Rr$ soit : $(R - r)^2 \leq OP^2 \leq (R + r)^2$.
   Enfin, puisque $R > r > 0$ et $OP \geq 0$, on en déduit que $R - r \leq OP \leq R + r$.
5. Le feutre pourrait colorier tout point de la couronne centrée en l'origine de rayon intérieur $R - r$ et de rayon extérieur $R + r$.
6. Le robot peut saisir tout objet situé dans la couronne centrée en l'origine de rayon intérieur 3 et de rayon extérieur 7.
   - Distance de A à l'origine : $\sqrt{13}$ encadré par 3 et 7. On peut saisir A.
   - Distance de B à l'origine : $\sqrt{29}$ encadré par 3 et 7. On peut saisir B.
   - Distance de C à l'origine : $\sqrt{53}$ non encadré par 3 et 7.
     On ne peut pas saisir C.

Partie 3

1. On place le point B de coordonnées $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.
2. Quand chaque tige est horizontale, on peut lire $\theta = 0$ ou 2π.
3. L'angle θ_R reste constant, donc la première tige est fixe.
   L'angle θ_r prend toutes les valeurs de 0 à 2π (un tour complet) donc le feutre parcourt d'une façon ou d'une autre (à laquelle on n'a pas accès) le cercle de centre M (0;R) et de rayon r.
4. Cette fois, c'est l'angle θ_r qui reste constant, donc c'est la deuxième tige qui est fixe, au sens où le vecteur $\overrightarrow{MP}$ est constant.
   L'angle θ_R prend toutes les valeurs de 0 à 2π (un tour complet) donc le feutre parcourt d'une façon ou d'une autre (à laquelle on n'a pas accès) le cercle de centre $(0; 0)$ et de rayon R translaté par le vecteur $\overrightarrow{MP}$.
   On peut lire graphiquement que $\theta_r \sim \frac{\pi}{2}$ donc le vecteur $\overrightarrow{MP}$ a pour coordonnées $(0; r)$.
5. On a θ_r = θ_R, ce qui signifie que les deux bras sont parallèles (alignés de façon « dépliée »), et les deux angles prennent toutes les valeurs entre de 0 à 2π donc le feutre parcourt d'une façon ou d'une autre (à laquelle on n'a pas accès) le cercle de rayon $R + r$ centré en l'origine du repère.
6. On a θ_r=θ_R+π, afin de « replier » la petite tige sur la grande.
   D'où :



EXERCICE 3 : CARRÉS DE DIRICHLET

Partie 1

1. ¼ (4 + 3 + 2 + 3) = 12/4 = 3,
   ¼ (3 + 4 + 3 + 4) = 3,5
   ¼ (4 + 5 + 3,5 +3,5) = 4
2. Il suffit de mettre des 1 sur le « tour extérieur ».
3. a. Par définition d'un carré de Dirichlet, a=¼ (0+1+b+c) d'où 4a=b+c+1
   b. On obtient de même trois autres équations 4b=a+d, 4c= a+d, 4d = b+c.
   De ces quatre équations, on peut en déduire une solution : a=7/24, b=1/12, c=1/12, d=1/24…

   Cela donne au final le carré de Dirichlet suivant :

	1	0	
0	7/24	1/12	0
0	1/12	1/24	0
	0	0	

c. d.

	0	1	
0	1/12	7/24	0
0	1/24	1/12	0
	0	0	

puis 6 autres par « rotations ou symétries »

	0	0	
0	1/12	7/24	1
0	1/24	1/12	0
	0	0	

	0	0	
0	1/24	1/12	0
0	1/12	7/24	1
	0	0	

	0	0	
0	1/24	1/12	0
0	1/12	7/24	0
	0	1	

	0	0	
0	1/12	1/24	0
0	7/24	1/12	0
	1	`0	

	0	0	
0	1/12	1/24	0
1	7/24	1/12	0
	0	`0	

	0	0	
1	7/24	1/12	0
0	1/12	1/24	0
	0	`0	

4. a. Ce qui compte, c'est que les deux valeurs touchant un sommet du carré aient la même somme.
   On peut ainsi proposer :

	9	5	
0	4,5	3,5	0
0	5,5	4,5	9
	13	0	

	4	5	
5	4,5	3,5	0
0	5,5	4,5	9
	13	0	

   b. En haut à gauche : 9= 9+0 = 8+1= … = 0 +9 soit 10 couples possibles
   Et de même, 6 couples en haut à droite, 10 en bas à gauche et 14 en bas à droite.
   On pourrait ainsi construire $\underbrace{10 \times 6 \times 10 \times 14}_{8400}$ carrés différents.

	a	…	
b	M	d	…
…	c	…	…
	…	…	

5. a. Supposant G dans le carré intérieur et a, b, c, d ses quatre voisines.
   Comme G est la plus grande des valeurs du carré de Dirichlet alors : a$\leq$ G, b $\leq$ G, c $\leq$ G, d $\leq$ G.
   Supposons qu'il existe une des quatre voisines strictement inférieure à G, par exemple a, alors $\underbrace{\frac{a+b+c+d}{4}}_{G} < \frac{G\times 4}{4}$ soit G < G ce qui est aburde.
   On en déduit que donc toutes les voisines de G sont égales à G.
   En refaisant ce raisonnement pour les voisines de G situées dans le carré intérieur, on montre de proche en proche que toutes les valeurs du carré de Dirichlet sont égales à G.
   b. Si G est dans le carré intérieur, alors toutes les valeurs du carré de Dirichlet sont égales à G, ce qui est absurde si le tour extérieur contient au moins deux valeurs disctinctes. On en déduit que dans ce cas, la plus grande valeur du carré de Dirichlet est donc nécessairement sur son tour extérieur.

Partie 2

1. a. On a additionné les valeurs situées au même emplacement.
   b. Si M et N sont des carrés de Dirichlet, pour les cases en haut à droite, on a :
   a=¼ (10+14+b+c) et A=¼ (1+12+B+C) donc a+A = ¼ (10+14+b+c+1+12+B+C) = ¼ (26 + 11 + (b+B)+(c+C))
   donc a+A est bien la moyenne de ses voisines.
   En raisonnement de mêmes pour les autres cases des carrés intérieurs, on montre ainsi que si M et N sont des carrés de Dirichlet, il en est de même de la grille 6.
2. a = (14 + b + c + 10) / 4 donc at = (14t + bt + ct + 10t) /4.
   La case en haut à gauche de la nouvelle grille est bien la moyenne de ses quatre voisines.
3. On effectue des « combinaisons linéaires » des tableaux de la partie 1 question 3.
   Cela donne en haut à gauche : $\mathbf{14} \times \frac{7}{24} + \mathbf{6} \times \frac{1}{12} + \mathbf{0} \times \frac{1}{12} + \mathbf{8} \times \frac{1}{24} + \mathbf{4} \times \frac{1}{24} + \mathbf{7} \times \frac{1}{12} + \mathbf{5} \times \frac{1}{12} + \mathbf{10} \times \frac{7}{24} = 9.$

   En raisonnant de même, on obtient :

	14	6	
10	9	21/4	0
5	27/4	6	8
	7	4	

4. a. On raisonne comme aux questions 1 et 2 (avec t=-1) de la partie 2.
   b. Si la grille 10 est un carré de Dirichlet, alors 9-A = ¼(0+0+0+0) = 0 donc 9-A = 0 donc A= 9. De même B=b, C=c, D=d.
   c. Il y a bien qu'un seul quadruplet (a ; b ; c ; d) permettant de transformer la grille M en un carré de Dirichlet : celui déterminé à la question 3.

Exercice 4 : ENCORE DES MOYENNES

1. $\frac{2\times15+12\times8+7\times12}{2+12+7}=10$ .Dons sa moyenne est 10.

2. Soit x le nombre de notes égales à15.

$\frac{5\times7+6\times9+3\times10+4\times12+13+x\times15}{5+6+3+4+1+x}=10$

D'où $\frac{180+15x}{19+x}=10$ donc $180+15x=190+10x$ d'où $x=2$.

Il a eu deux notes égales à 15.

3. Soit *x* le nombre de devoirs dont la note est 15, *y* le nombre de devoirs dont la note est 8 et z le nombre de devoir dont la note est compris entre 8 et 15.

Donc $\frac{15x+8y+12z}{x+y+z}=10$.

D'où $15x+8y+12z=10x+10y+10z$ donc $5x-2y+2z=0$

Donc $5x=2(y-z)$.

x est donc un nombre pair or $x\neq0$ donc $x\geq2$.

D'où $5x\geq10$ donc $y-z\geq5$ et donc $y\geq z+5$.

Or $z>1$ donc $y>6$.

4. Soit x le nombre de devoirs dont la note 15 de Pierre.

Sa moyenne est donc $\overline{x_1}=\frac{12x+72+15x}{3x+6}=\frac{27x+72}{3x+6}=\frac{9x+24}{x+2}$

La moyenne de Sophie est $\overline{x_2}=\frac{6x+108+30x}{3x+9}=\frac{12x+36}{x+3}$

Or $\overline{x_2}=\overline{x_1}+2$ donc $\frac{12x+36}{x+3}=\frac{9x+24}{x+2}+2=\frac{11x+28}{x+2}$

D'où $x^2-x-12=0$

$\Delta=49$ donc 2 solutions $x_1=-3$ et $x_2=4$. (Le passage par le discriminant n'est pas exigible)

Le nombre de devoirs dont la note est 15 de Pierre est 4 sa moyenne est donc de 10

et celle de Sophie est de 12.