OLYMPIADES MATHÉMATIQUES LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE ROUEN 2021

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

21^{e} OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

Correction exercices de l'académie

Exercice académique 1

Parabole de sûreté

Pour les candidats ayant suivi la spécialité « mathématiques »

A. Questions préliminaires

1. La duplication du sinus

On considère un triangle ABC isocèle en A avec AB = 1.
On notera α l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ exprimé en radian où $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.
Les points D et E sont respectivement les pieds des hauteurs issues des sommets C et A.

a. Comme le triangle ADC est rectangle en D alors $\cos\alpha = \frac{AD}{AC}$ et $\sin\alpha = \frac{DC}{AC}$
Or $\mathrm{AC} = 1$ donc $\mathrm{AD} = \cos\alpha$, $\mathrm{DC} = \sin\alpha$.

On en déduit donc que $\mathrm{DB} = 1 - \cos\alpha$.

b. $Aire_{ABC} = Aire_{ADC} + Aire_{BDC} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{2} + \frac{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2}$.

c. Le triangle AEC est rectangle en E donc $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}} = \mathrm{AE}$ et $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AC}} = \mathrm{CE}$ car $\mathrm{AC} = 1$.
Le triangle ABC est isocèle en A donc la hauteur issue de A est aussi la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ donc $\widehat{\mathrm{EAC}} = \frac{\alpha}{2}$.

De plus cette hauteur est aussi un axe de symétrie du triangle ABC, donc les triangles AEC et AEB sont isométriques, d'où :

$$\mathrm{Aire_{ABC}} = 2 \times \mathrm{Aire_{AEC}} = 2\frac{\mathrm{AE} \times \mathrm{CE}}{2} = \mathrm{AE} \times \mathrm{CE} = \cos\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}$$

d. On a calculé l'aire du triangle ABC de deux façons , on en déduit l'égalité $\frac{\sin\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}$
d'où l'égalité $\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}$

Pour la suite on admettra que :

- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, pour tout $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$;
- $\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}$, pour tout nombre réel α.

2. Points remarquables d'une parabole

Soit a et b deux réels strictement positifs. On considère la parabole d'équation $y = -ax^2 + bx$ dans un repère orthogonal.

a. On définit la fonction f pour tout réel x par $f(x) = -ax^2 + bx$.
b. La parabole a donc pour équation $y = f(x)$. Comme $f(0) = 0$, la parabole passe par l'origine O du repère.

On résout l'équation $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(-ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; -ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = \frac{b}{a}$$

On peut donc affirmer que la parabole passe aussi par le point $B\left(\frac{b}{a}\,;0\right)$.

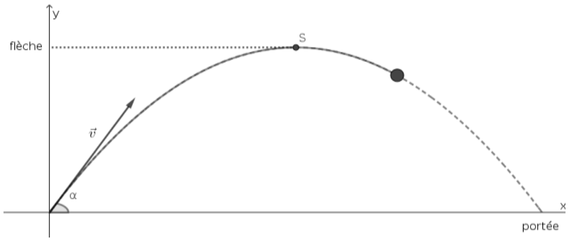
c. Démontrer que le sommet de cette parabole est le point S de coordonnées $\left(\frac{b}{2a};\frac{b^2}{4a}\right)$.
On étudie les variations de la fonction f. f est dérivable pour tout réel x et $f'(x) = -2ax + b$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{2a}$ et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{b}{2a}$ (car $-2a < 0$)

Donc f est croissante sur $\left[0\,;\frac{b}{2a}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{b}{2a};\frac{b}{a}\right]$, par conséquent f présente un maximum atteint en $\frac{b}{2a}$ et $f\left(\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a}$.

B. Trajectoire d'un boulet de canon

Si on néglige les frottements et la résistance de l'air, la trajectoire d'un boulet tiré d'un point O avec une vitesse initiale v suivant un angle d'inclinaison α par rapport à l'horizontale est la parabole d'équation : $\boldsymbol{y = \frac{-g}{2v^2(\cos\alpha)^2}x^2 + (\tan\alpha)x}$, où g est l'accélération de la pesanteur ($g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$).
Dans toute la suite, la vitesse initiale notée v est fixée (elle s'exprime en $\mathrm{m.s^{-1}}$).



1. La **flèche** est l'altitude maximale atteinte par le boulet.

a. On remarque que la parabole a pour équation $y = -ax^2 + bx$ avec $a = \frac{g}{2v^2(\cos\alpha)^2}$ et $b = \tan\alpha$.
D'après A2. Le sommet S de la parabole a pour coordonnées $\left(\frac{b}{2a};\frac{b^2}{4a}\right)$ donc la flèche est égale à :

$$y_S = \frac{b^2}{4a} = \frac{\tan^2\alpha}{\frac{4g}{2v^2\cos^2\alpha}} = \tan^2\alpha \times \frac{2v^2\cos^2\alpha}{4g} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} \times \frac{2v^2\cos^2\alpha}{4g} = \frac{v^2}{2g}\sin^2\alpha$$

b. La flèche $y_S = \frac{v^2}{2g}\sin^2\alpha$ est maximale lorsque $\sin^2\alpha$ est maximal c'est à dire lorsque $\sin\alpha$ est maximal.
On sait que $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et la plus grande valeur possible pour $\sin\alpha$ est 1 , atteinte pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
La flèche maximale est donc bien $h = \frac{v^2}{2g}$.

2. La **portée** est la distance de O au point d'impact du boulet avec le sol.

a. Comme $y = -ax^2 + bx$, la portée est donc égale, d'après la partie A2, à $\frac{b}{a}$ et :

$$\frac{b}{a} = \frac{\tan\alpha}{\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{2v^2\cos^2\alpha}{g} = \frac{2v^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha.$$

b. D'après la partie A 1 : $\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Or la plus grand valeur de $\sin 2\alpha$ est 1 : le maximum de $\cos\alpha\sin\alpha$ est donc $\frac{1}{2}$.

c. On sait $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $2\alpha \in [0;\pi]$ et $\sin 2\alpha = 1$ lorsque $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ c'est à dire lorsque $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

d. La portée maximale est donc égale à $\frac{2v^2}{g} \times \frac{1}{2} = \frac{v^2}{g} = 2\frac{v^2}{2g} = 2h$.

On a donc démontré que la portée maximale est **le double** de la flèche maximale.

3. La parabole de sûreté

La parabole de sûreté est l'unique parabole dont le sommet a pour coordonnées $(0; h)$, passant par le point de coordonnées$(2h; 0)$.

Une équation de la parabole de sûreté est donc de la forme : $y = f(x)$ où :

$f(x) = m(x-2h)(x+2h) = m(x^2-4h^2)$

$f(0) = h$ donc $m(-4h^2) = h$ et $m = \frac{-1}{4h}$.

La parabole a donc pour équation : $y = h - \frac{1}{4h}x^2$.

Exercice académique 1

Le jeu du Tamina

Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité « mathématiques »

1. a. 2 buts et zéro panier.

   b. 2 buts et 4 paniers.

2. Si x et y désignent respectivement le nombre de buts et de paniers marqués, avec x et y entiers naturels, alors le problème revient à résoudre dans IN l'équation $10\,x + 3\,y = 40$ qui équivaut à :

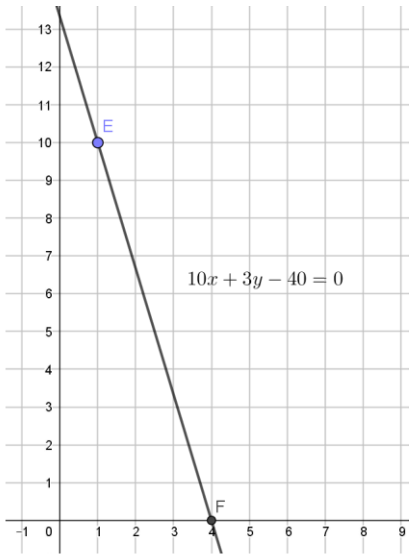
$$10\,x + 3\,y - 40 = 0.$$

En rapportant le plan à un repère on reconnaît une équation cartésienne de droite.

Graphiquement, on cherche tous les couples d'entiers naturels solutions c'est à dire tous les points de la droite à coordonnées entières positives.

On trouve par lecture deux points qui conviennent E(1 ; 10) et F(4 ; 0).

On a bien 1 × 10 + 10 × 3 = 40 et 4 × 10 + 0 × 3 = 40 et comme un vecteur directeur de la droite a pour coordonnées (3 ; – 10) on peut être sûr qu'il n'y a pas d'autre solution entière positive.



3. a. On montre facilement que l'équation $10\,x + 3\,y = 17$ n'a pas de solution soit par méthode exhaustive (cela est très rapide : $x = 0$, 1 et y allant de 0 à 5 ne donne aucune solution), soit à l'aide d'un algorithme, soit en traçant la droite correspondant dans le plan rapporté à un repère.

   b. On ne peut pas atteindre 17 mais :

- On peut atteindre 18 (6 paniers) et donc 21, 24 , … soit 18 + 3k, avec $k \in \mathbb{N}$
- On peut atteindre 19 (1 but et 3 paniers) et donc 22, 25, … soit 18 + 3k + 1, avec $k \in \mathbb{N}$
- On peut atteindre 20 (2 buts) et donc 23, 26, … soit 18 + 3k + 2, avec $k \in \mathbb{N}$

On peut aussi l'expliquer ainsi : on peut obtenir une séquence de trois scores consécutifs (18, 19 et 20) et comme un panier rapporte 3 points on est certain de pouvoir obtenir tous les scores suivants.

4. Le joueur de Tamina a pu marquer ses 2 018 points de 67 façons différentes.

On peut envisager un algorithme (pour x allant de 0 à 202 et pour y allant de 0 à 673) ou utiliser la droite dont une équation cartésienne est : $10\,x + 3\,y = 2\,018$ et chercher une solution à coordonnées entières positives puis compter toutes les autres en utilisant les vecteur directeurs de coordonnées (– 3 ; 10) et (3 ; – 10). Par exemple (5 ; 656) est une solution donc (2 ; 666) en est une autre et (8 ; 646) etc. La dernière est (…. ; 6). En utilisant la suite arithmétique de premier terme u_0 = 666 et de raison – 10, on a u_{66} = 6 ce qui fait bien 67 ordonnées entières positives.

Exercice académique 2
Jeu de « trac »

1. Le joueur très malchanceux obtient le total minimal de 2 au premier lancer des deux dés, abaisse le palet 2 mais obtient à nouveau un total de 2 et se trouve bloqué.
Son score final est alors : $1+3+4+5+6+7+8+9=43$.

2. Le joueur chanceux obtient un total maximal de 12 au premier lancer des deux dés et abaisse les palets 9 et 3 puis encore un total de 12 et abaisse les palets 8 et 4, suivi encore d'un total de 12 et abaisse les palets 7 et 5 (*le joueur très chanceux obtient à chaque fois un total de 12, ce qui lui permet de fermer les palets de numéro élevé*). Il reste les palets 1, 2 et 6 et, en obtenant un total de 9, il abaisse les derniers palets 6, 2 et 1 (*cela nécessite qu'il choisisse de conserver les deux dés alors qu'il a abaissé les palets 7, 8 et 9*). Il peut donc abaisser tous les palets en quatre lancers au minimum.

3. Recherche de stratégies en fonction de l'état d'avancement de différentes parties indépendantes

Partie 1 :

a. Il reste les palets 1-2-3-7-9. Le joueur n'a pas à s'inquiéter car il peut obtenir toutes les valeurs des palets restants :
$2\,;\ 3\,;\ 4=3+1\,;\ 5=3+2\,;\ 6=1+2+3\,;\ 7\,;\ 8=7+1\,;\ 9\,;\ 10=9+1\,;\ 11=9+2\,;$
$12=9+3$.

b. Il a obtenu un total de 7 et conservé les palets 1-2-3-9.
Il peut obtenir les totaux suivants : 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12. Il ne pourra pas continuer au tour suivant s'il obtient un 7 ou 8, avec une probabilité de $\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}$.

c. Il a obtenu 11 et gardé les palets 1 et 3. En lançant un seul dé, il sera bloqué en obtenant un 2 ou un 5 ou un 6. La probabilité qu'il ne puisse pas continuer au prochain lancer est donc de $\frac{1}{2}$.

Partie 2 :

Il reste 1-2-3-4-5-6-8-9 et le joueur obtient un 7.

S’il conserve les palets 2-3-4-5-8-9, il pourra viser 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 et sera certain de pouvoir continuer.
S’il conserve les palets 1-3-4-6-8-9, il pourra viser 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ;10 ; 11 ; 12. Il sera bloqué s’il obtient un 2 (probabilité : $\frac{1}{36}$) .
S’il conserve les palets 1-2-5-6-8-9, il pourra viser 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12. Il sera bloqué s’il obtient un 4 (probabilité : $\frac{3}{36}$) .
Conclusion : il vaut mieux abaisser les palets 1 et 6.

Partie 3 :
Il reste 2-4-5.
En lançant un dé, il peut viser les totaux suivants : 2 ; 4 ; 5 ; 6.
La probabilité qu’il puisse poursuivre la partie est donc $\frac{4}{6}$.
En lançant deux dés, il pourra jouer s’il obtient les totaux suivants :
2 ; 4 ; 5 ; 6 (2 + 4) ; 7 (2 + 5) ; 9 (4 + 5) ; 11 (2 + 4 + 5).
La probabilité qu’il puisse poursuivre la partie est donc : $\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36}=\frac{25}{36}$.
Conclusion : il vaut mieux lancer deux dés.

Partie 4 :
Il reste 1-2-4-5.
Dans les deux cas, s’il lance un dé ou deux dés, il est certain de pouvoir abaisser des palets.
Conclusion : il vaut mieux lancer deux dés pour tenter d’obtenir un résultat le plus élevé possible et abaisser plusieurs palets.

Si le joueur lance deux dés et obtient une somme égale à 7.
Pour déterminer la probabilité de ne pas pouvoir poursuivre au coup suivant, on peut construire un arbre prenant en compte tous les résultats possibles et, pour chacun d’entre eux, calculer la probabilité d’être bloqué au coup suivant.
Si l’on abaisse les palets 1, 2 et 4, il reste le palet 5 que l’on peut abaisser en lançant un dé avec une probabilité de $\frac{1}{6}$.
Si l’on abaisse 2-5, il reste les palets 1 et 4. On peut viser les palets 1 ou 4 ou 5, que l’on peut abaisser en lançant un dé avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.
Conclusion : il est plus prudent d’abaisser les palets 2 et 5.