OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE RENNES
2022

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE

22e OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES

Sujet et Corrigé vous sont présentés par freemaths.fr . . .

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE

Olympiades académiques de mathématiques 2022

Académie de Rennes

Mercredi 9 mars 2022

Exercices académiques

Éléments de correction

Exercice académique n°1 – 2022, année stylée

Partie I

1) $(23\,;7\,;38)$ n'est pas un triplet stylé car les nombres ne sont pas écrits dans l'ordre croissant.
Le triplet $(10\,;25\,;36)$ n'est pas stylé car $10^2+25^2+36^2=2021\neq 2022$.
Le triplet $(7\,;23\,;38)$ est stylé car 7, 23 et 38 sont des entiers naturels tels que $7\leq 23\leq 38$ et $7^2+23^2+38^2=2022$.

2) Si le triplet de la forme $(m\,;m\,;m)$ est stylé alors $3m^2=2022$ soit $m^2=674$. Or $25<\sqrt{674}<26$ donc *m* n'est pas un entier. Il n'existe donc pas de triplets stylés de la forme $(m\,;m\,;m)$.

3) Un triplet stylé de la forme $(0\,;n\,;p)$ doit vérifier : *n* et *p* sont des entiers naturels tels que $n\leq p$ et $n^2+p^2=2022$. On a donc $p^2=2022-n^2$ soit encore $p=\sqrt{2022-n^2}$ avec $n\leq\sqrt{2022}$ soit $n\leq 44$. On recherche donc des entiers naturels *x* inférieurs ou égaux à 44 dont l'image par la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{2022-x^2}$ est un entier supérieur ou égal à *x*. Le tableur de la calculatrice permet d'affirmer que c'est impossible. Il n'existe donc pas de triplet stylé de la forme $(0\,;n\,;p)$.

4) On procède comme au 3) avec la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{2021-x^2}$. $g(x)$ doit être un entier supérieur ou égal à *x*. Le tableur de la calculatrice permet d'affirmer que c'est impossible. Il n'existe donc pas de triplet stylé de la forme $(1\,;n\,;p)$.

5) Gwénolé sait sans aucun calcul que le triplet $(10\,;25\,;36)$ n'est pas stylé car 25 est le seul nombre impair les deux autres sont pairs donc d'après les propriétés admises 10^2 et 36^2 sont pairs et 25^2 est impair. Ainsi $10^2+25^2+36^2$ est impair et ne peut pas être égal à 2022, nombre pair. Gwénolé en déduit sans calcul que le triplet $(10\,;25\,;36)$ n'est pas stylé.

Partie II

1) Soit $(m\,;n\,;p)$ un triplet quelconque stylé. Si parmi les trois nombres *m*, *n* et *p* deux sont pairs et le troisième impair alors parmi m^2, n^2 et p^2 deux sont pairs et le troisième impair ; leur somme est donc impaire ce qui est impossible.

2) Si les trois nombres *m*, *n* et *p* sont impairs alors m^2, n^2 et p^2 le sont aussi ainsi que leur somme qui ne peut donc pas être égale à 2022, nombre pair.

3) Si les trois nombres *m*, *n* et *p* sont pairs alors m^2, n^2 et p^2 sont des multiples de 4 ainsi que leur somme qui ne peut donc pas être égale à 2022, nombre non multiple de 4.

4) On peut conclure alors que dans tout triplet stylé un seul nombre est pair.

5) D'après la question 4), les trois nombres d'un triplet stylé sont de la forme $2u+1$, $2v+1$ et $2w$ avec *u*, *v* et *w* des entiers naturels. On a donc $(2u+1)^2+(2v+1)^2+(2w)^2=2022$ puis, en développant, $4u^2+4u+4v^2+4v+4w^2=2020$ soit encore $u^2+u+v^2+v+w^2=505$.
On remarque que u^2+u est pair puisque u^2 et *u* ont la même parité d'après le rappel, idem pour v^2+v donc w^2 est impair car 505 l'est ; ainsi *w* est impair et le nombre pair est de la forme 2 × (nombre impair).
En conclusion, dans un triplet stylé le seul nombre pair est de la forme $4a+2$, avec *a* entier, donc n'est pas un multiple de 4.

NB : On aurait pu aussi raisonner par l'absurde.

Partie III

1)
a) Le triplet $(m\,;n\,;p)$ est stylé donc $m\leq n\leq p$; on a alors $m^2\leq n^2\leq p^2$ donc $m^2+m^2+m^2\leq m^2+n^2+p^2$ soit encore $3m^2\leq 2022$. On peut en déduire que $m\leq\sqrt{674}$. Or $\sqrt{674}\approx 25{,}96$ donc la plus grande valeur possible de *m* est 25.
D'après les questions 3 et 4 de la partie I, on en déduit alors $2\leq m\leq 25$.
b) La plus grande valeur possible de *p* sera obtenue lorsque $m=2=n$ donc $8+p^2\leq 2022$ soit $p\leq\sqrt{2014}$; la plus grande valeur possible de *p* est donc 44. On a $m^2\leq n^2\leq p^2$ donc $m^2+n^2+p^2\leq p^2+p^2+p^2$ soit encore $2022\leq 3p^2$; on peut en déduire que $\sqrt{674}\leq p$; or $\sqrt{674}\approx 25{,}96$ donc la valeur minimale de *p* est 26. On en déduit $26\leq p\leq 44$.
c) La plus grande valeur possible de *n* sera obtenue lorsque $m=2$ et $n=p$ donc $4+2n^2\leq 2022$ soit $n\leq\sqrt{1009}$; la plus grande valeur possible de *n* est donc 31. La plus petite valeur possible de *n* sera obtenue lorsque $m=n$ et p maximum donc $2n^2+44^2\geq 2022$ soit $n\geq\sqrt{43}$; la plus petite valeur possible de *n* est donc 7. On en déduit $7\leq n\leq 31$.

2) On sait que $2 \leq m \leq 25$ donc il y a 25-2+1 possibilités pour m soit 24 possibilités. De même, il y a 25 possibilités pour n et 19 possibilités pour p. Comme $24 \times 25 \times 19 = 11\,400$, il y a $11\,400$ triplets possibles.

3) sur casio :

```
======2022 ===
1→M:1→N:1→P↵
For 2→M To 25↵
For M→N To 31↵
For N→P To 44↵
If M²+N²+P²=2022↵
Then ↵
Goto 1↵
Else ↵
Goto 2↵
IfEnd↵
Lbl 1↵
M◢
N◢
P◢
Lbl 2↵
Next↵
Next↵
Next↵
```

sur TI (TI-Basic):

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
ÉDIT MENU: [alpha] [f5]
PROGRAM:STYLE22
:For(M,2,25)
:For(N,M,31)
:For(P,N,44)
:If M²+N²+P²=2022
:Then
:Disp M,N,P,","
:End
:End
:End
:
```

sur Numworks (Python):

```python
from math import *
for M in range(2,26):
  for N in range (M,32):
    for P in range(N,45):
      if M**2+N**2+P**2==2022:
        print(M,N,P)
```

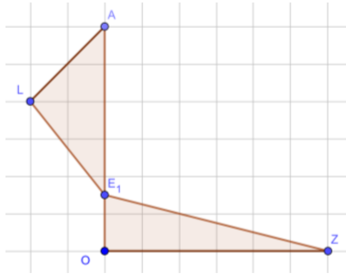
```
>>> from style2022 import *
2 13 43
5 29 34
7 23 38
10 31 31
11 26 35
13 22 37
17 17 38
>>>
```

On obtient les sept triplets stylés suivants : $(2\,;13\,;43)$, $(5\,;29\,;34)$, $(7\,;23\,;38)$, $(10\,;31\,;31)$, $(11\,;26\,;35)$, $(13\,;22\,;37)$ et $(17\,;17\,;38)$.

Exercice académique n°2 – Zoé et Léa chez ZOLA

1) <u>Cas n°1</u> :

L'aire du triangle ZOE_1 est : $\frac{OZ\times OE_1}{2}=\frac{6\times 1{,}5}{2}=4{,}5m^2$.

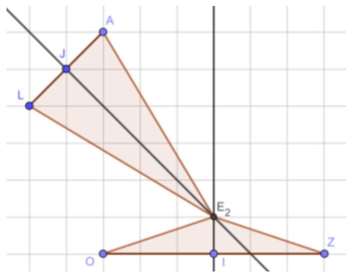


On observe que le côté $[E_1A]$ mesure 4,5m et que la hauteur relative à ce côté mesure 2m. L'aire du triangle LE_1A est donc : $\frac{4{,}5\times 2}{2}=4{,}5m^2$.

Les deux parcelles ont la même aire, aucune des deux amies n'est donc lésée dans ce cas.

2) <u>Cas n°2</u> :

On sait qu'un triangle est isocèle si et seulement si son sommet est sur la médiatrice du côté opposé.

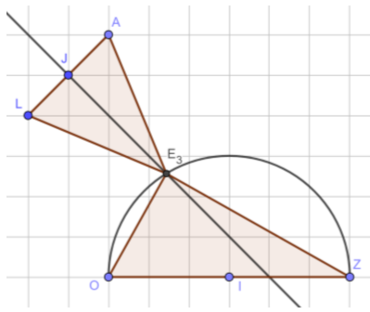


On observe que les médiatrices des segments $[LA]$ et $[OZ]$ sont sécantes en un point situé à l'intérieur de $ZOLA$, donc le point E_2 existe bien.

Il semble que dans ce cas Zoé est lésée.

3) <u>Cas n°3</u> :

Le triangle ZOE_3 est rectangle en E_3 si le point E_3 est sur le cercle de diamètre $[OZ]$, d'après le premier rappel.

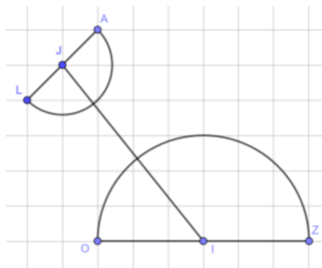


On observe que la médiatrice du segment $[LA]$ et le cercle de diamètre $[OZ]$ se coupent en un point dans $ZOLA$. Le point E_3 existe donc bien.

Il semble que dans ce cas c'est Léa qui est lésée.

4) <u>Cas n°4</u> :

Pour que les triangles LEA et ZOE soient rectangles en E il faudrait que le point E soit sur le cercle de diamètre $[LA]$ et sur le cercle de diamètre $[OZ]$.



Or ces deux cercles n'ont pas de point d'intersection.

On valorisera les copies où figurent des éléments du style : la distance $[IJ]$ est supérieure à la somme des rayons des deux cercles.

5) a) On a : $AE=\sqrt{(x-0)^2+(y-6)^2}=\sqrt{x^2+(y-6)^2}$ et $LE=\sqrt{\left(x-(-2)\right)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}$.

On obtient les égalités équivalentes suivantes :
$AE=LE$; $AE^2=LE^2$; $x^2+(y-6)^2=(x+2)^2+(y-4)^2$; $x^2+y^2-12y+36=x^2+4x+4+y^2-8y+16$; $-12y+8y=4x+20-36$; $-4y=4x-16$; $y=-x+4$.
Le point E appartient donc bien à la droite d'équation $y=-x+4$.
b) La médiatrice du segment $[OZ]$ a pour équation $x=3$.
c) Les coordonnées du point E_2 vérifient les deux équations $y=-x+4$ et $x=3$. On en déduit : $E_2(3\,;1)$.
d) L'aire du triangle ZOE_2 est $\frac{ZO\times IE_2}{2}=\frac{6\times 1}{2}=3\text{ m}^2$ et l'aire du triangle LE_2A est égale à $\frac{LA\times JE_2}{2}$.
Calculons : $LA=\sqrt{(6-4)^2+(0-(-2))^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{2\times 4}=\sqrt{2}\times\sqrt{4}=2\sqrt{2}$
et $JE_2=\sqrt{(3-(-1))^2+(1-5)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{2\times 16}=4\sqrt{2}$.

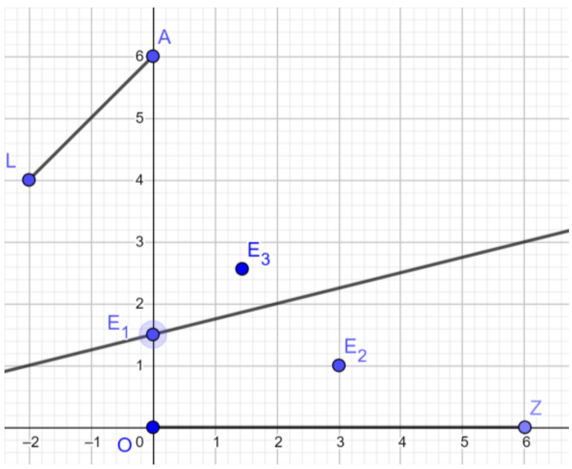
D'où, l'aire du triangle LE_2A : $\frac{2\sqrt{2}\times4\sqrt{2}}{2} = 8\ \text{m}^2$.
Zoé se trouve particulièrement lésée puisque la parcelle de Léa est plus de deux fois plus grande que la sienne. Ceci avait été conjecturé à la question **2)**.

6) a) Le point E_3 est sur le cercle de centre I et de rayon 3. Il vérifie donc la condition : $E_3I = 3$ soit encore $E_3I^2 = 9$, ce qui s'écrit aussi $(x-3)^2 + y^2 = 9$.
b) Le point E_3 est sur la médiatrice du segment $[LA]$, donc ses coordonnées vérifient l'équation $y = -x + 4$. Si on remplace y par son expression en fonction de x dans l'équation de la question précédente on obtient successivement :
$(x-3)^2 + (-x+4)^2 = 9$; $x^2 - 6x + 9 + x^2 - 8x + 16 = 9$; $2x^2 - 14x + 16 = 0$.
Ce qui s'écrit aussi $x^2 - 7x + 8 = 0$.
c) Résolvons l'équation ci-dessus.
$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 49 - 32 = 17$.
$\Delta > 0$ donc $x_1 = \frac{-(-7)-\sqrt{17}}{2\times1} = \frac{7-\sqrt{17}}{2} \approx 1{,}44$ et $x_2 = \frac{7+\sqrt{17}}{2} \approx 5{,}56$.
La solution x_2 conduirait à une valeur négative de y, ce qui est exclu.
Donc l'ordonnée du point E_3, qui est aussi la hauteur du triangle ZOE_3 relative à la base OZ, vaut approximativement :
$-1{,}44 + 4 = 2{,}56$.
L'aire de la parcelle de Zoé serait alors à peu près de $\frac{2{,}56\times6}{2} = 7{,}68\ \text{m}^2$.
Dans ce cas c'est Léa qui serait lésée, conformément à ce qui avait été conjecturé à la question **3)**.

7) a) La droite (HE) est parallèle à la médiatrice de $[AL]$ dont l'équation réduite a été obtenue à la question **5) a)** : $y = -x + 4$.
Donc l'équation réduite de la droite (HE) est de la forme : $y = -x + p$.
Le point $E(a\,;b)$ appartient à la droite (HE) donc : $b = -a + p$, d'où : $p = a + b$.
L'équation réduite de la droite (HE) est donc : $y = -x + a + b$.
Le point H est l'intersection des droites (AL) et (HE), donc ses coordonnées vérifient : $y_H = x_H + 6$ et $y_H = -x_H + a + b$.
En sommant ces deux équations terme à terme on obtient $y_H = \frac{a+b+6}{2}$.
On en déduit $x_H = \frac{a+b-6}{2}$ et on a donc bien : $H\left(\frac{a+b-6}{2}\,;\,\frac{a+b+6}{2}\right)$.

b) Ni Zoé ni Léa ne sont lésées si les aires des triangles ZOE et LEA sont égales.
Or l'aire du triangle ZOE est $3b$, et l'aire du triangle LEA est : $\frac{LA\times HE}{2} = \sqrt{2}\,HE$.
Avec $HE = \sqrt{\frac{1}{4}\left((a-b+6)^2 + (-a+b-6)^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}(a-b+6)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}|a-b+6|$.
Or le point E doit être « sous » la droite (LA) d'équation $y = x + 6$, on a donc la condition : $b < a + 6$, soit $a - b + 6 > 0$.
Cela permet d'écrire : $HE = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b+6)$.
L'aire du triangle LEA s'écrit alors : $a - b + 6$.
L'équité impose donc : $3b = a - b + 6$, soit $a - 4b + 6 = 0$, ou encore : $b = \frac{1}{4}a + \frac{3}{2}$.
L'équation réduite de la droite cherchée est donc $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ et on la trace sur l'annexe.

Annexe à rendre



Exercice académique n°3 - Énigmes…

I - Énigme 1

1) On peut atteindre le score de 28 points de différentes manières : $2 \times 5 + 6 \times 3 = 28$ et $5 \times 5 + 1 \times 3 = 28$.

2) 1 ; 2 ; 4 et 7 ne sont pas des scores possibles alors que les scores 3, 5 et 6 le sont. De plus, on peut obtenir les scores 8 (=5+3), 9 (=3x3) et 10 (=5x2). A partir de là, en ajoutant 3, on obtient les scores 11 ; 12 et 13. Et ainsi de suite, en ajoutant 3. Tous les scores strictement supérieurs à 7 sont donc possibles. Seuls les scores 1 ; 2 ; 4 et 7 ne sont pas possibles.

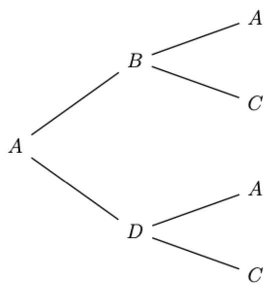
II - Énigme 2

$C \times F = 10^{13} = (2 \times 5)^{13} = 2^{13} \times 5^{13}$; or C et F ne sont pas divisibles par 10 donc ils ne peuvent pas contenir dans leur décomposition en facteurs premiers 2×5 et comme C < F alors on a nécessairement C = 2^{13} = 8192

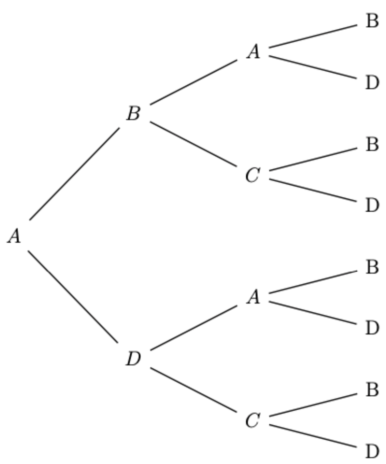
III - Énigme 3

1) Une modélisation par arbres est possible.

a)

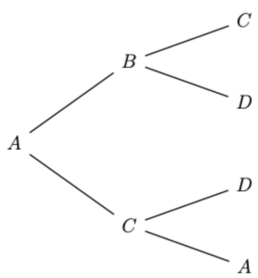
	2 issues sur 4 conduisent au point de départ (ici on a choisi A mais ce pourrait être n'importe quel point). La probabilité cherchée est donc égale à $\frac{1}{2}$

b)

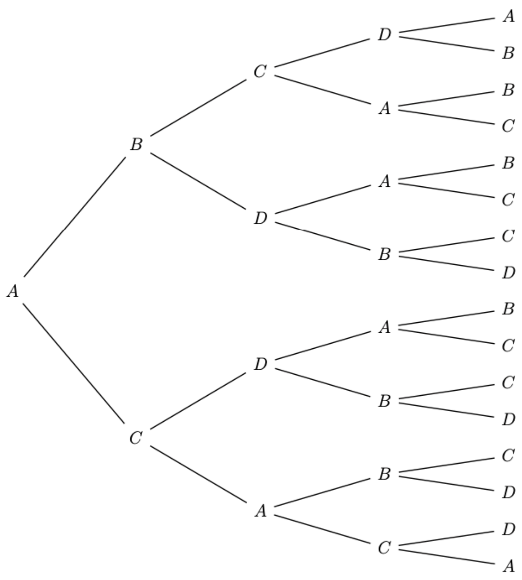
	En prolongeant l'arbre avec 3 lancers, en partant de A, on se rend compte que les points atteints sont : - B ou D (pour un nombre de lancers impair) - A ou C (pour un nombre de lancers pair) Donc après 7 lancers, si l'on est parti de A (par exemple), on arrive en B ou en D. La probabilité cherchée est donc nulle.

2) Une modélisation par arbres est possible.

a)

	Prenons A (par exemple) comme point de départ. La probabilité cherchée est donc de $\frac{1}{4}$.

b)



En partant de A, la position d'arrivée la plus probable est le point C avec une probabilité égale à $\frac{6}{16}$.
Donc le plus probable est d'arriver au point diamétralement opposé.

Pour avoir le plus de chance d'arriver en A, il faut donc partir de C.

3)

<u>1</u>

1re méthode

On lance 2 fois le dé.
Les sommes des valeurs possibles sont donc les nombres de 2 à 12.

En « comptant » les déplacements sur le cercle (en partant par exemple de A), on constate que les valeurs qui nous ramènent en A sont 4 ; 8 et 12.

Or :
12 = 6 + 6.
8=2+6 ; 8 = 6+2 ; 8=3+5 ; 8=5+3 ; 8=4+4.
4=3+1 ; 4=1+3; 4=2+2.

Cela donne 9 possibilités sur 36 donc une probabilité égale à $\frac{1}{4}$

2e méthode : utilisation d'un arbre pondéré