OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

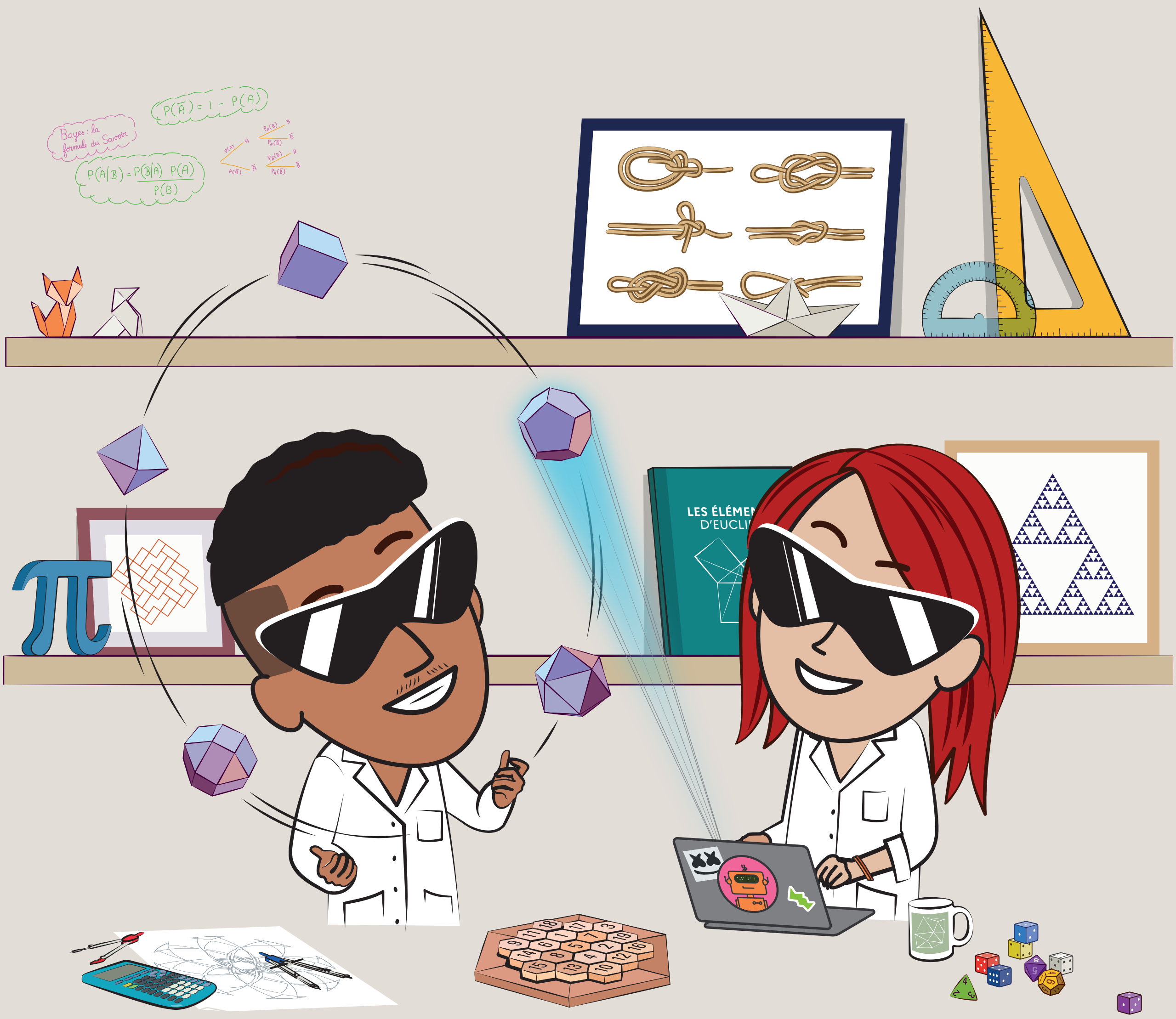
ACADÉMIE DE REIMS
2023

SUJET DE L'ÉPREUVE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

Liberté
Égalité
Fraternité

OLYMPIADES NATIONALES 2023
DE MATHÉMATIQUES



Épreuve le mercredi 15 mars 2023 (le 14 en Polynésie française). 4 exercices en 4 heures.
Palmarès national et académiques, en individuel et par équipes mixtes (de 2, 3 ou 4), selon cursus (technologique, général, général spécialité mathématiques).
Inscriptions auprès de vos professeurs de mathématiques jusqu'au 17 février 2023.

ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 15 mars 2023

Candidats suivant la spécialité mathématiques de la voie générale

Deuxième partie – de 10h10 à 12h10
Composition par équipe

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercice 1 - Au pays des heureux

Un pays a pour monnaie l'*heureux*. Pour les échanges entre ses habitants, il existe des pièces pour chaque valeur entière jusqu'à 1000.

Contrairement à nos pièces, dans ce pays, plus la pièce est de valeur importante, plus elle est légère. Ceci a été mis en place pour inciter les habitants à manipuler des pièces avec une forte valeur plutôt qu'un tas de pièces de faible valeur.

Une commerçante de ce pays cherche à savoir quelle composition de pièces lui permet de rendre la monnaie pour n'importe quelle somme entre 0 et N *heureux* : elle veut savoir à la fois quelles valeurs de pièces prendre et quel nombre de pièces de chaque valeur elle doit posséder.

On appelle **composition** la donnée d'un tableau dans lequel la première ligne représente les différentes valeurs possibles des pièces données dans l'ordre strictement croissant et la deuxième ligne les nombres de pièces de chaque valeur.

Le max est la valeur totale en heureux de la composition.

Par exemple, pour la composition ci-contre, on a :

$$max = 1 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 1 = 11$$

Valeur en *heureux*	1	3	4
Nombre de pièces disponibles	1	2	1

On dit qu'une **composition est complète** s'il est possible d'atteindre n'importe quelle valeur comprise entre 1 et max, inclus, en additionnant les valeurs de pièces de la composition. Dans l'exemple précédent, la composition est incomplète car on ne peut pas avoir le 2.

1. On considère, dans cette question uniquement, la composition ci-contre.

Valeur en *heureux*	1	2	3	4	5
Nombre de pièces disponibles	1	1	1	1	1

a) Calculer la valeur max de cette composition.
b) Déterminer si cette composition est complète ou non.

2. On considère, dans cette question uniquement, la composition ci-contre.

Valeur en *heureux*	1	3	5	7	9
Nombre de pièces disponibles	1	1	1	2	2

a) Calculer la valeur max de cette composition.
b) Déterminer si cette composition est complète ou non.

Afin de réduire le poids de la composition (pour rappel, plus une pièce a une valeur importante plus elle est légère), la commerçante décide de constituer une composition de p valeurs de pièces de la manière suivante :

Valeur en *heureux*	v_1	v_2	v_3	...	v_p
Nombre de pièces disponibles	1	2	3	...	p

Une telle composition est dite **composition désirée**.

3. Montrer que la composition ci-contre est désirée **et** complète.

Valeur en *heureux*	1	2	3
Nombre de pièces disponibles	1	2	3

4. a) Montrer que la composition désirée suivante est complète.

Valeur en *heureux*	1	2
Nombre de pièces disponibles	1	2

b) En déduire que la composition désirée suivante est complète.

Valeur en *heureux*	1	2	5
Nombre de pièces disponibles	1	2	3

c) En itérant le procédé, montrer que la composition désirée suivante est complète.

Valeur en *heureux*	1	2	5	10	50
Nombre de pièces disponibles	1	2	3	4	5

5. Dans cette question, on souhaite construire des **compositions parfaites**, c'est-à-dire des compositions **désirées**, **complètes**, les **moins lourdes possibles.**
Ci-dessous, on donne une composition parfaite pour une valeur de pièce et pour deux valeurs de pièces.

Pour une valeur

Valeur en *heureux*	1
Nombre de pièces disponibles	1

Pour deux valeurs

Valeur en *heureux*	1	2
Nombre de pièces disponibles	1	2

a) Montrer que la composition parfaite à 3 valeurs est

Valeur en *heureux*	1	2	6
Nombre de pièces disponibles	1	2	3

b) Déterminer la composition parfaite à 4 valeurs.

Dans la suite, on considère la composition parfaite ci-dessous :

Valeur en heureux	v_1	v_2	v_3	...	v_p
Nombre de pièces disponibles	1	2	3	...	p

On note max la valeur maximale atteignable avec cette composition.

On note v_{p+1} la valeur à ajouter à notre composition pour obtenir une composition parfaite à $(p + 1)$ valeurs.

c) Montrer que $v_{p+1} = max + 1$.

Exercice 2 – Carrés magiques

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Résultat préliminaire (admis) :

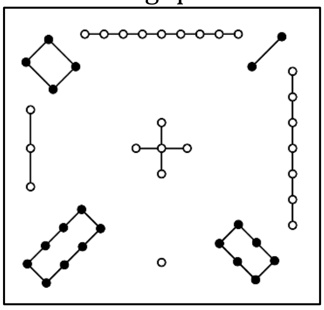
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

A. Carrés magiques

Un **carré magique** d'ordre n est composé de n^2 entiers strictement positifs, écrits sous la forme d'un tableau carré. Ces nombres sont disposés de telle sorte que les sommes sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale soient égales (ce qui fait 8 sommes dans un carré magique d'ordre 3 par exemple). On nomme alors **constante magique** la valeur de cette somme commune.
Ci-contre est proposé le carré magique de *Luo Shu* (un des plus anciens carrés magiques).
La constante magique de ce carré est 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ci-dessous une représentation originale du carré magique de *Luo Shu :*



Un **carré magique** est dit **normal** s'il est constitué de tous les nombres entiers de 1 à n^2, où n est l'ordre du carré. Le carré de *Luo Shu* est normal car il y figure tous les entiers de 1 à 3^2.

1. Le carré ci-contre, d'ordre 4, est-il magique ? normal ?

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

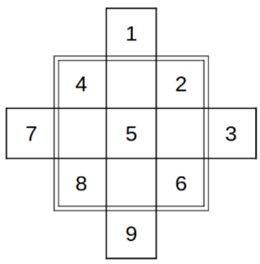
2. Un carré d'ordre n constitué du même entier dans chaque case est-il magique ? normal ?

3. Dans un **carré normal** d'ordre n, on note S_n la somme des nombres le constituant.
a) Calculer S_3.
b) Exprimer S_n en fonction de n.

4. Reprenons le carré de *Luo Shu*.
a) Si on échange deux nombres dans ce tableau, le carré reste-t-il magique ? Expliquer pourquoi.
b) En échangeant des nombres du tableau, que ne change-t-on pas ?

B. Une méthode de construction de carrés magiques

1. a) Dans la figure ci-contre, les nombres entre 1 et 9 sont rangés successivement par diagonale ; le contour du carré central 3 par 3 est accentué.
On imagine maintenant le tube formé par l'enroulement de la figure obtenu en faisant coïncider les deux bords horizontaux accentués. Dans quelles cases du carré central se positionnent alors les nombres 1 et 9 ?
b) Expliquer comment retrouver à partir de cette figure le carré magique de *Luo Shu*.



2. En complétant la figure **fournie en annexe (à rendre avec la copie)**, démontrer qu'il existe au moins un carré magique normal d'ordre 5.

C. Carrés magiques d'ordre 3 - Cas général

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Dans cette question, nous considérons, ci-contre, un carré magique d'ordre 3 NON nécessairement normal.
A priori, il y a donc 9 inconnues.
Nous allons, dans un premier temps, prouver que l'on peut se ramener à seulement 3 inconnues.

1. En notant M la constante magique, écrire les 8 sommes ayant pour valeur M.
2. En déduire que $4M = 3M + 3e$, puis exprimer e en fonction de M.

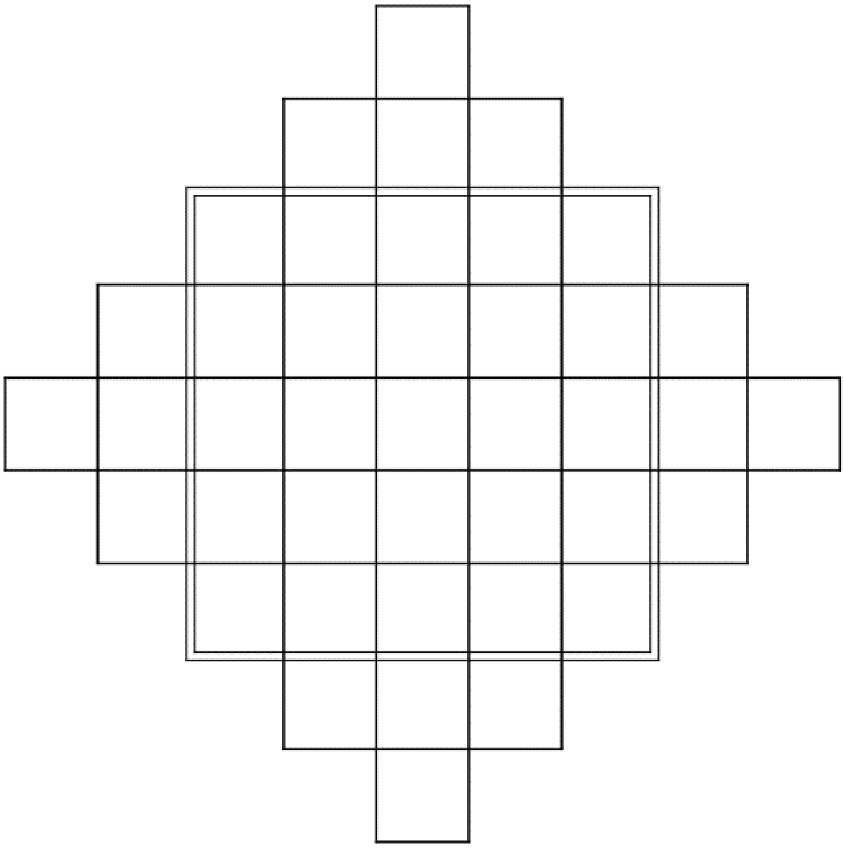
3. On pose $x = e - a$ et $y = e - c$.
   Montrer alors que le carré initial se ramène au carré ci-contre.

$e - x$	$e + x + y$	$e - y$
$e + x - y$	e	$e - x + y$
$e + y$	$e - x - y$	$e + x$

4. Si on impose maintenant que ce carré soit normal, quelle est la valeur de e ? Justifier votre réponse.

5. Combien de carrés magiques normaux d'ordre 3 existe-t-il ?

ANNEXE – Carrés magiques
à rendre avec la copie



ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 15 mars 2023

Candidats ne suivant pas la spécialité mathématiques de la voie générale

Deuxième partie – de 10h10 à 12h10
Composition par équipe

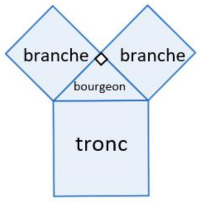
Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

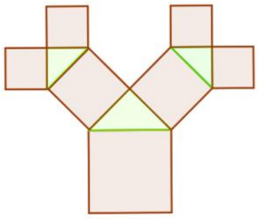
Exercice 1 - Un arbre pythagoricien

Au printemps 2021 (année 1), M Pitt Hagor a décidé de planter un jeune arbre fruitier un peu particulier.

- Le tronc est formé d'un carré de côté égal à 1 mètre.
- Le bourgeon est formé d'un triangle rectangle isocèle.
- Ce bourgeon a donné deux branches carrées sur ses deux petits côtés.



Les températures printanières de 2022 (année 2) ont permis à l'arbre de pousser de la manière suivante : chaque branche a donné à son extrémité un bourgeon en forme de triangle rectangle isocèle et chaque bourgeon a lui-même donné deux nouvelles branches carrées.



L'arbre continue de grandir les années suivantes de la même façon : chaque branche nouvellement apparue une année donne, l'année suivante, un bourgeon (triangle rectangle isocèle) qui donne lui-même deux branches carrées de même côtés.

1. Représenter l'arbre la 3ème année sur **l'annexe fournie (à rendre avec la copie)**, à partir du tronc déjà construit.

La récolte : Chaque branche de l'arbre donne un et un seul fruit par an (elle en redonnera un l'année suivante) et le tronc ne donne aucun fruit. Chaque année, les fruits arrivent à maturité en début d'été où ils sont tous récoltés. Ils pèsent alors exactement 5 grammes chacun.

2. Combien de fruits M Pitt Hagor récolte-t-il la 1ère année ? la 2ème année ? la 3ème année ?

3. Pour $n \geq 1$, on note $N(n)$ le nombre de nouvelles branches apparues sur l'arbre l'année n.
On a $N(1) = 2$ et $N(2) = 4$.

a) Donner la valeur de $N(3), N(4)$ et $N(5)$.
b) Donner le lien entre $N(n+1)$ et $N(n)$.
c) Donner, sans démonstration, la valeur de $N(n)$ en fonction de n.

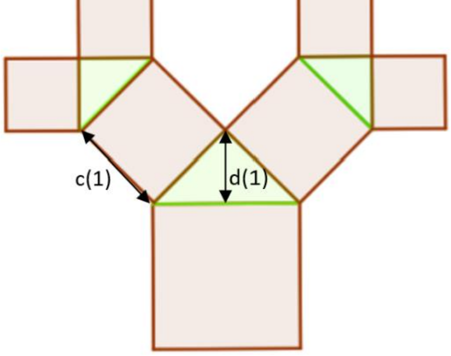
4. a) Montrer que pour tout réel a et tout entier naturel non nul n :

$$(a-1)(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n) = a^{n+1}-1$$

b) En déduire que $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$
c) Donner, en fonction de n, le nombre total de fruits récoltés l'année n.

5. a) Donner la masse de la récolte la 10ème année.
b) Combien d'années faudra-t-il attendre pour que la récolte dépasse 1 tonne ?

Hauteur de l'arbre : Pour $n \geq 1$, On notera $c(n)$ la longueur du côté d'une des branches nouvellement apparues en mètres au printemps 2020+n ($n^{\text{ème}}$ année) et on notera $d(n)$ la hauteur du bourgeon d'une des branches nouvellement apparues en mètres au printemps 2020+n ($n^{\text{ème}}$ année).



6. a) Justifier que $c(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ mètres.
b) Justifier que la hauteur de l'arbre en 2021 est :

$$1 + 2d(1)$$

En déduire la hauteur exacte de l'arbre la première année.

7. a) Justifier que la hauteur de l'arbre en 2022 est donnée par

$$1 + 2d(1) + c(2)$$

b) En déduire que la hauteur de l'arbre est alors de 2,5 mètres.

8. Calculer, de même, la hauteur de l'arbre en 2023 ? en 2024 ?

Exercice 2 – Carrés magiques

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Résultat préliminaire (admis) :

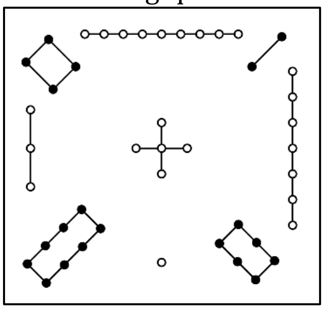
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

A. Carrés magiques

Un **carré magique** d'ordre n est composé de n^2 entiers strictement positifs, écrits sous la forme d'un tableau carré. Ces nombres sont disposés de telle sorte que les sommes sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale soient égales (ce qui fait 8 sommes dans un carré magique d'ordre 3 par exemple). On nomme alors **constante magique** la valeur de cette somme commune.
Ci-contre est proposé le carré magique de *Luo Shu* (un des plus anciens carrés magiques).
La constante magique de ce carré est 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Ci-dessous une représentation originale du carré magique de *Luo Shu :*



Un **carré magique** est dit **normal** s'il est constitué de tous les nombres entiers de 1 à n^2, où n est l'ordre du carré. Le carré de *Luo Shu* est normal car il y figure tous les entiers de 1 à 3^2.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

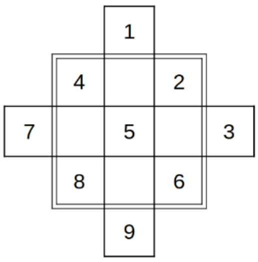
1. Le carré ci-contre, d'ordre 4, est-il magique ? normal ?

2. Un carré d'ordre n constitué du même entier dans chaque case est-il magique ? normal ?

3. Dans un **carré normal** d'ordre n, on note S_n la somme des nombres le constituant.
a) Calculer S_3.
b) Exprimer S_n en fonction de n.

4. Reprenons le carré de *Luo Shu*.
a) Si on échange deux nombres dans ce tableau, le carré reste-t-il magique ? Expliquer pourquoi.
b) En échangeant des nombres du tableau, que ne change-t-on pas ?

B. Une méthode de construction de carrés magiques



1. a) Dans la figure ci-contre, les nombres entre 1 et 9 sont rangés successivement par diagonale ; le contour du carré central 3 par 3 est accentué.
On imagine maintenant le tube formé par l'enroulement de la figure obtenu en faisant coïncider les deux bords horizontaux accentués. Dans quelles cases du carré central se positionnent alors les nombres 1 et 9 ?
b) Expliquer comment retrouver à partir de cette figure le carré magique de *Luo Shu*.

2. En complétant la figure **fournie en annexe (à rendre avec la copie)**, démontrer qu'il existe au moins un carré magique normal d'ordre 5.

C. Carrés magiques d'ordre 3 - Cas général

Dans cette question, nous considérons, ci-contre, un carré magique d'ordre 3 NON nécessairement normal.
A priori, il y a donc 9 inconnues.
Nous allons, dans un premier temps, prouver que l'on peut se ramener à seulement 3 inconnues.

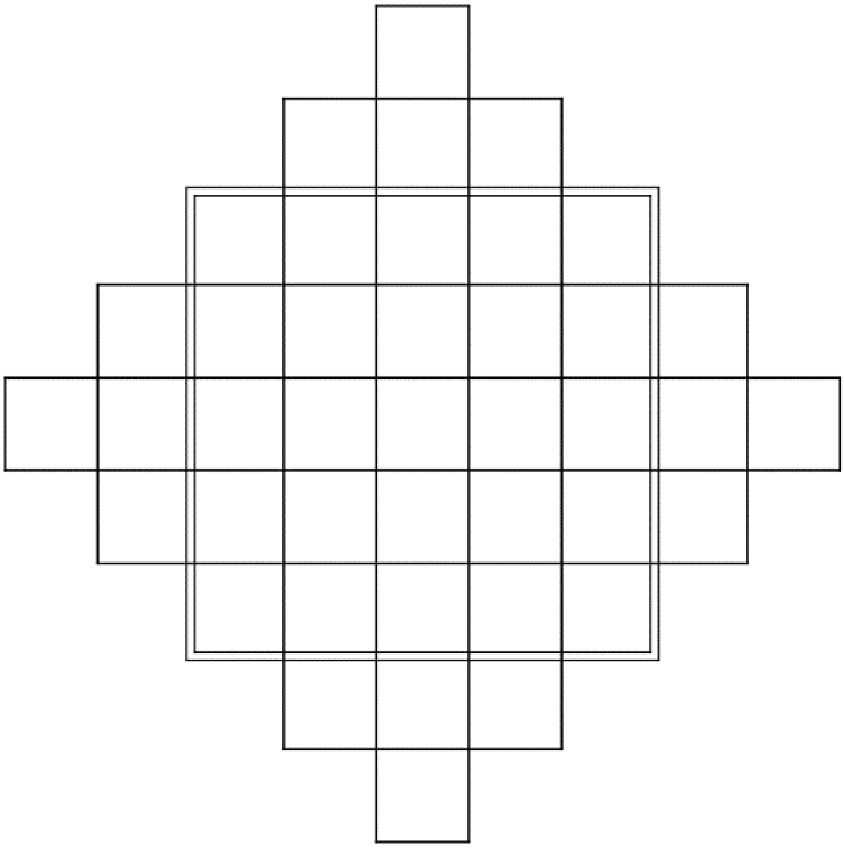
a	b	c
d	e	f
g	h	i

1. En notant M la constante magique, écrire les 8 sommes ayant pour valeur M.
2. En déduire que $4M = 3M + 3e$, puis exprimer e en fonction de M.
3. On pose $x = e - a$ et $y = e - c$.
   Montrer alors que le carré initial se ramène au carré ci-contre.

$e - x$	$e + x + y$	$e - y$
$e + x - y$	e	$e - x + y$
$e + y$	$e - x - y$	$e + x$

4. Si on impose maintenant que ce carré soit normal, quelle est la valeur de e ? Justifier votre réponse.
5. Combien de carrés magiques normaux d'ordre 3 existe-t-il ?

ANNEXE – Carrés magiques
à rendre avec la copie



ANNEXE – Arbre pythagoricien

à rendre avec la copie