OLYMPIADES MATHÉMATIQUES
LYCÉE, PREMIÈRE

ACADÉMIE DE REIMS
2022

SUJET DE L'ÉPREUVE

ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 09 mars 2022

Candidats suivant la spécialité mathématiques de la voie générale

Seconde partie – de 10h10 à 12h10
Composition par équipe

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 1
Des chaussettes dans des tiroirs

« Si, dans n tiroirs, on range plus de n chaussettes alors il y a un tiroir qui contient au moins deux chaussettes. »
C'est le principe de Dirichlet (mathématicien prussien, 1805-1859). Même si son énoncé est simple, il permet de résoudre un grand nombre de problèmes et en particulier…

Problème n°1 : Des nombres dans l'intervalle $[0 ; 1]$

1. Sur la droite des réels, on place trois réels a, b et c dans l'intervalle $[0 ; 1]$
   En découpant l'intervalle $[0 ; 1]$ en deux « tiroirs » $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et $\left]\frac{1}{2} ; 1\right]$, montrer que la distance entre deux des trois réels a, b et c est nécessairement inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$.
2. On place cinq réels dans l'intervalle $[0 ; 1]$. Montrer que la distance entre deux de ces réels est nécessairement inférieure ou égale à $\frac{1}{4}$.
3. Soit n un entier naturel non nul. Sans démonstration, donner un énoncé généralisant les affirmations des questions 1. et 2. à $n + 1$ réels dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

Problème n°2 : Avec la division euclidienne par 13.

Pour rappel, nous trouvons le quotient et le reste de la division euclidienne de 53 par 13 ainsi :
$53 = 13 \times 4 + 1$ et, puisque $0 \leq 1 < 13$, le quotient est $q = 4$ et le reste est $r = 1$.
En répondant aux questions ci-dessous, nous allons prouver que parmi 14 entiers naturels choisis arbitrairement, on peut toujours en trouver deux tels que leur différence soit un multiple de 13.

1. Quels sont les restes possibles d'un entier dans la division euclidienne par 13 ? Combien y en a-t-il ?
2.
   a. Dans la division euclidienne par 13, calculer les restes des 14 entiers ci-après :
   120 ; 108 ; 85 ; 112 ; 92 ; 49 ; 39 ; 53 ; 70 ; 123 ; 85 ; 132 ; 76 et 21
   b. Parmi les entiers ci-dessus, en trouver deux dont la différence est un multiple de 13.
3. On revient au cas général : on choisit arbitrairement 14 entiers naturels.
   a. En rangeant les 14 entiers (« chaussettes ») selon leur reste (« tiroir »), prouver qu'au moins deux de ces entiers ont même reste dans la division euclidienne par 13.
   b. En écrivant ces deux entiers sous la forme $13q + r$ et $13q' + r$ où, $r, q\ et\ q'$ sont des entiers, prouver que la différence de ces deux entiers est un multiple de 13.

Problème n°3 : Des bêtes à mauvais caractère.

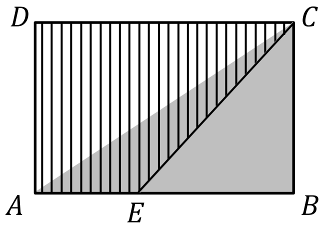
Dans un enclos rectangulaire de dimensions 15 et 18 mètres, un fermier voudrait placer 10 bêtes à mauvais caractères. Elles ne peuvent cohabiter que si elles sont distantes l'une de l'autre d'au moins 8 mètres.
Est-ce possible ? Prouver votre réponse.

À vos tiroirs ! À vos chaussettes !

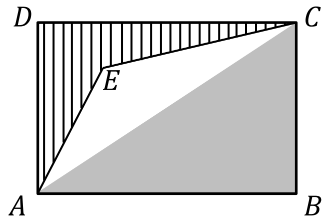
Exercice 2
La quadrature d'un polygone

L'objectif de cet exercice est de savoir si l'on peut découper un polygone quelconque en plusieurs pièces polygonales de sorte qu'en les recombinant, **sans chevauchement ni vide**, on obtient un carré.

Exemple de chevauchement :
Le trapèze $ADCE$ et le triangle ABC se chevauchent au niveau du triangle ACE .



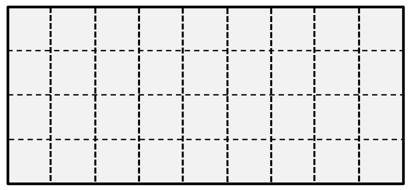
Exemple de vide :
Il y a un vide entre le polygone $ADCE$ et le triangle ABC. Ce vide correspond au triangle ACE.



Dans cet exercice, vous pouvez utiliser les figures de l'annexe pour tester des découpages...

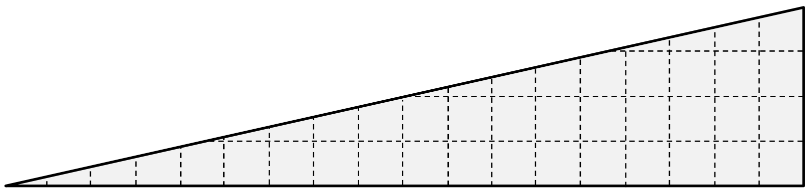
__Partie A : Quelques cas particuliers__

1. Montrer que le rectangle de longueur 9 et de largeur 4 peut être découpé en pièces dont la recombinaison, sans chevauchement ni vide, peut former un carré à préciser.



2.

a. Montrer que le triangle rectangle de longueur de base 18 et de hauteur 4 peut être découpé en pièces simples dont la recombinaison, sans chevauchement ni vide, peut former un rectangle.



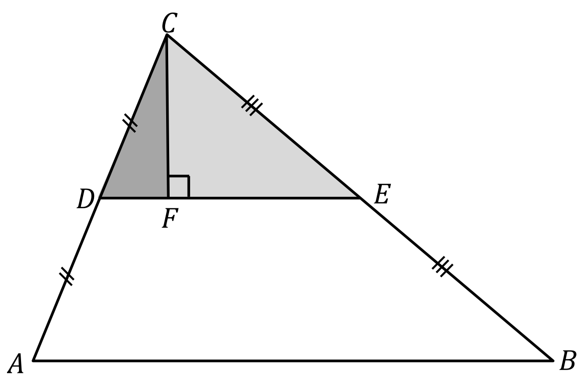
b. Peut-on découper le rectangle obtenu afin de former un carré sans chevauchement ni vide ? Justifier.

3. Peut-on découper un rectangle de longueur 6 et de largeur 4 afin de former, sans chevauchement ni vide, un carré de côté 5 ? Justifier.

__Partie B : Cas généraux__

1. On considère un triangle ABC.
On suppose dans les questions **4.a.** et **4.b.** que les angles géométriques en A et en B sont des angles aigus.

a. On note D et E les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$. On note F le projeté orthogonal du point C sur la droite (DE). Les angles aigus en A et en B impliquent que F appartient au segment $[DE]$.
Justifier que la droite (DE) est parallèle à la droite (AB).

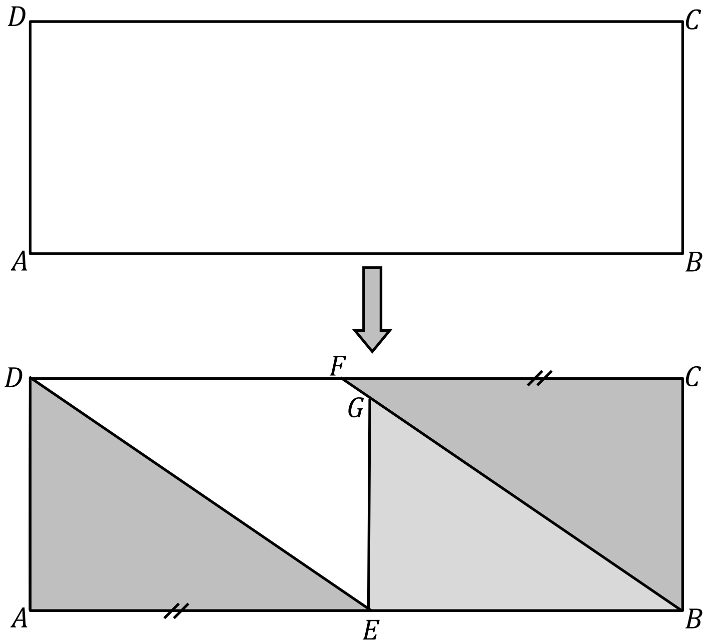


b. Justifier que les triangles DCF, CEF et le trapèze $ABED$ peuvent être combinés, sans chevauchement ni vide, de sorte à former un rectangle.

c. L'hypothèse selon laquelle les angles en A et en B sont aigus est-elle restrictive ? Justifier.

2. On considère un rectangle $ABCD$ de longueur a et de largeur b tel que $a \geq 4b$.
Expliquer comment découper ce rectangle afin de construire un rectangle de longueur a'et de largeur b' tel que $\frac{a'}{b'} = \frac{1}{4} \times \frac{a}{b}$.

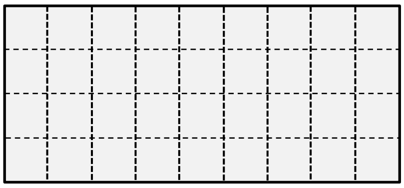
3. On considère un rectangle $ABCD$ de longueur a et de largeur b tel que $0 < b \leq a < 4b$.
On découpe ce rectangle en quatre pièces avec E le point de la demi-droite $[AB)$ tel que $AE = \sqrt{ab}$, F celui de $[CD)$ tel que $CF = \sqrt{ab}$ et G le point d'intersection de la droite (BF) avec la perpendiculaire à (AB) passant par E.
Ci-dessous est représenté un tel rectangle avant et après découpage.

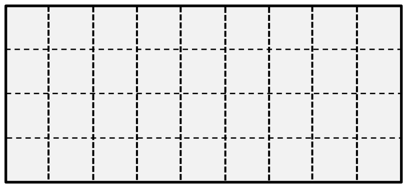


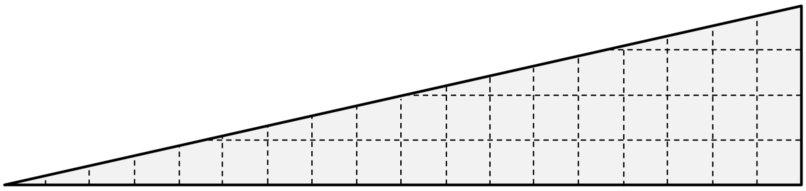
a. Justifier que le point E appartient au segment $[AB]$.
b. Justifier que la perpendiculaire à (AB) passant par E coupe bien le segment $[FB]$.
c. On munit la figure précédente d'un repère orthonormé $\left(A\,; \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{b}\,\overrightarrow{AD}\right)$.
Dans ce repère orthonormé, le point A a pour coordonnées $(0\,;\ 0)$, le point B a pour coordonnées $(a\,;\ 0)$ et le point D a pour coordonnées $(0\,;\ b)$.
Déterminer les coordonnées des points C, E et F dans ce repère.
d. Justifier que le point G a pour coordonnées dans ce repère $(\sqrt{ab}\,;\ \sqrt{ab} - b)$.
e. En déduire la longueur GE.
f. Justifier rigoureusement que l'on peut utiliser le découpage du rectangle pour obtenir un carré, par recombinaison, sans chevauchement ni vide.

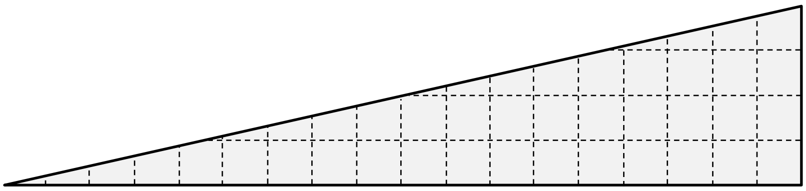
Annexe

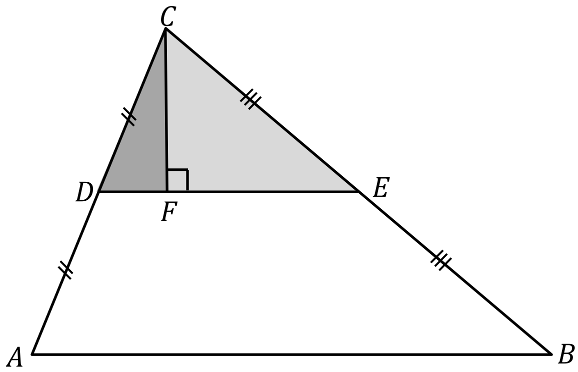
Vous pouvez utiliser les figures de cette annexe pour tester des découpages…











ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 09 mars 2022

Candidats ne suivant pas la spécialité mathématiques

Seconde partie – de 10h10 à 12h10
Composition par équipe

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 1
Des chaussettes dans des tiroirs

« Si, dans n tiroirs, on range plus de n chaussettes alors il y a un tiroir qui contient au moins deux chaussettes. »
C'est le principe de Dirichlet (mathématicien prussien, 1805-1859). Même si son énoncé est simple, il permet de résoudre un grand nombre de problèmes et en particulier…

Problème n°1 : Des nombres dans l'intervalle $[0 ; 1]$

1. Sur la droite des réels, on place trois réels a, b et c dans l'intervalle $[0 ; 1]$
   En découpant l'intervalle $[0 ; 1]$ en deux « tiroirs » $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et $\left]\frac{1}{2} ; 1\right]$, montrer que la distance entre deux des trois réels a, b et c est nécessairement inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$.
2. On place cinq réels dans l'intervalle $[0 ; 1]$. Montrer que la distance entre deux de ces réels est nécessairement inférieure ou égale à $\frac{1}{4}$.
3. Soit n un entier naturel non nul. Sans démonstration, donner un énoncé généralisant les affirmations des questions 1. et 2. à $n + 1$ réels dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

Problème n°2 : Avec la division euclidienne par 13.

Pour rappel, nous trouvons le quotient et le reste de la division euclidienne de 53 par 13 ainsi :
$53 = 13 \times 4 + 1$ et, puisque $0 \leq 1 < 13$, le quotient est $q = 4$ et le reste est $r = 1$.
En répondant aux questions ci-dessous, nous allons prouver que parmi 14 entiers naturels choisis arbitrairement, on peut toujours en trouver deux tels que leur différence soit un multiple de 13.

1. Quels sont les restes possibles d'un entier dans la division euclidienne par 13 ? Combien y en a-t-il ?
2.
   a. Dans la division euclidienne par 13, calculer les restes des 14 entiers ci-après :
      120 ; 108 ; 85 ; 112 ; 92 ; 49 ; 39 ; 53 ; 70 ; 123 ; 85 ; 132 ; 76 et 21
   b. Parmi les entiers ci-dessus, en trouver deux dont la différence est un multiple de 13.
3. On revient au cas général : on choisit arbitrairement 14 entiers naturels.
   a. En rangeant les 14 entiers (« chaussettes ») selon leur reste (« tiroir »), prouver qu'au moins deux de ces entiers ont même reste dans la division euclidienne par 13.
   b. En écrivant ces deux entiers sous la forme $13q + r$ et $13q' + r$ où, $r, q\ et\ q'$ sont des entiers, prouver que la différence de ces deux entiers est un multiple de 13.

Problème n°3 : Des bêtes à mauvais caractère.

Dans un enclos rectangulaire de dimensions 15 et 18 mètres, un fermier voudrait placer 10 bêtes à mauvais caractères. Elles ne peuvent cohabiter que si elles sont distantes l'une de l'autre d'au moins 8 mètres.
Est-ce possible ? Prouver votre réponse.

À vos tiroirs ! À vos chaussettes !

Exercice 2
Déchiffrement

Une équipe d'enquêteurs doit étudier des messages échangés entre des malfrats sous surveillance.
Ces messages sont constitués d'une succession de 1 et de 0.
Chaque lettre des messages est ainsi codée par une séquence de cinq chiffres (appelée quintuplet) ; les espaces du message original sont supprimés avant que ce message ne soit codé.
L'un des enquêteurs a déterminé le procédé utilisé :
À chaque lettre, on associe son rang dans l'alphabet (A → 1, B → 2, C → 3…).
Ensuite chaque nombre est remplacé par un quintuplet :

(1 → 00001, 2 → 00010, 3 → 00011, 4 → 00100, …)

Pour convertir un nombre en son quintuplet associé, on utilise l'algorithme suivant :

- ✓ Déterminer le rang N compris entre 1 et 26 de la lettre à coder.
- ✓ Le quintuplet q prend la valeur 00000.
- ✓ Tant que $N \neq 0$:
  - Chercher l'entier k tel que 2^k soit le plus grand possible en restant inférieur ou égal à N.
  - Remplacer dans q le 0 à la position k par un 1 (*).
  - Remplacer N par $N - 2^k$.
- ✓ Afficher q

(*) Le tableau ci-dessous définit la position de chaque chiffre du quintuplet 01100 :

Chiffre du quintuplet	0	1	1	0	0
Position du chiffre	4	3	2	1	0

<u>Exemple</u> : Codage de la lettre E

- ✓ E est la 5ème lettre de l'alphabet donc N prend la valeur 5, ce qu'on note $N \leftarrow 5$.
- ✓ $q \leftarrow 00000$.
- ✓ Premier tour de la boucle « Tant que » : $4 = 2^2 \leq 5 < 2^3 = 8$ donc $k \leftarrow 2$, $q \leftarrow 00100$ et $N \leftarrow N - 4 = 1$.
  Second tour de la boucle « Tant que » : $1 = 2^0 \leq 1 < 2^1 = 2$ donc $k \leftarrow 0$, $q \leftarrow 00101$ et $N \leftarrow N - 1 = 0$.
  Fin de la boucle « Tant que »
- ✓ Afficher $q = 00101$

1. La lettre K est la 11ème lettre de l'alphabet.
   Vérifier, en exécutant pas à pas l'algorithme, que la lettre K sera codée 01011.
2. Déterminer le quintuplet codant la lettre Z.
3. Déterminer, en détaillant la méthode, la lettre codée en le quintuplet 01110.
4. Décoder le message suivant : 00010 10010 00001 10110 01111

Le tableau ci-contre donne la fréquence d'apparition de chaque lettre de l'alphabet dans la langue française.

Lettre	Fréquence	Lettre	Fréquence
A	8,40 %	N	7,13 %
B	1,06 %	O	5,26 %
C	3,03 %	P	3,01 %
D	4,18 %	Q	0,99 %
E	17,26 %	R	6,55 %
F	1,12 %	S	8,08 %
G	1,27 %	T	7,07 %
H	0,92 %	U	5,74 %
I	7,34 %	V	1,32 %
J	0,31 %	W	0,04 %
K	0,05 %	X	0,45 %
L	6,01 %	Y	0,30 %
M	2,96 %	Z	0,12 %

5. Quel devrait être le quintuplet le plus fréquent dans les messages échangés ?
6. Les malfrats, se sachant sous surveillance, décident de changer leur cryptage. Ils envoient le message codé suivant :

01011 10010 10010 01011 00111 01010 10010 01000
10010 00111 11011 11110 11111 01011 11011 11110

   a. Pourquoi ce message est, avec l'algorithme précédent, intraduisible ?

On apprend que les malfrats ont « **décalé** » toutes les lettres de l'alphabet dans leur codage d'une certaine valeur, pour l'instant, inconnue. On remarque que le quintuplet 01011 a une fréquence beaucoup plus élevée que les autres quintuplets.

   b. Que peut-on en déduire sur la signification de cette lettre ?
   c. En déduire la valeur du décalage.
   d. Traduire le message codé.